



Manhattan
Editores

CALA PNHKO



pre

SAN MARCOS

CICLO ORDINARIO

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

twitter.com/calapenshko

Ejercicios : 2020-I , 2019-II , 2019-I , 2018-II

Semana 01

Teoría 006

Ejercicios

2020-1 011

2019-2 020

2019-1 029

2018-2 040

Semana 02

Teoría 051

Ejercicios

2020-1 059

2019-2 067

2019-1 077

2018-2 087

Semana 03

Teoría 097

Ejercicios

2020-1 103

2019-2 114

2019-1 124

2018-2 133

Semana 04

Teoría 143

Ejercicios

2020-1 149

2019-2 162

2019-1 171

2018-2 179

Semana 05

Teoría 188

Ejercicios

2020-1 192

2019-2 202

2019-1 212

2018-2 222

Semana 06

Teoría 231

Ejercicios

2020-1 235

2019-2 245

2019-1 255

2018-2 265

Semana 07

Teoría 277

Ejercicios

2020-1 285

2019-2 294

2019-1 305

2018-2 319

Semana 08

Teoría 328

Ejercicios

2020-1 335

2019-2 343

2019-1 352

2018-2 363

Semana 09

Teoría 374

Ejercicios

2020-1 378

2019-2 391

2019-1 399

2018-2 409

Semana 10

Teoría 421

Ejercicios

2020-1 430

2019-2 442

2019-1 455

2018-2 464

Semana 11

Teoría 473

Ejercicios

2020-1 476

2019-2 487

2019-1 498

2018-2 503

Semana 12

Teoría 513

Ejercicios

2020-1 520

2019-2 532

2019-1 543

2018-2 554

Semana 13

Teoría 565

Ejercicios

2020-1 578

2019-2 589

2019-1 606

2018-2 620

Semana 14

Teoría 632

Ejercicios

2020-1 637

2019-2 649

2019-1 661

2018-2 671

Semana 15

Teoría 682

Ejercicios

2020-1 687

2019-2 699

2019-1 711

2018-2 724

Semana 16

Teoría 740

Ejercicios

2020-1 744

2019-2 754

2019-1 766

2018-2 597

Semana 17

Teoría 780

Ejercicios

2020-1 793

2019-2 801

2019-1 812

2018-2 822

Semana 18

Teoría 846

Ejercicios

2020-1 855

2019-2 868

2019-1 880

2018-2 890

twitter.com/calapenshko

ÁLGEBRA

SEM	CONTENIDO	SEM	CONTENIDO
1.	Expresiones algebraicas. Potenciación: propiedades. Radicación: propiedades		aspa doble especial y divisores binómicos.
2.	Los números reales: operaciones. Relación de orden. Propiedades. Intervalos. Operaciones con intervalos. Radicación: radicales dobles. Racionalización	11.	Mínimo común múltiplo. Máximo común divisor
3.	Ecuaciones de primer y de segundo grado en una variable. Planteo de ecuaciones de primer grado y segundo grado. Método de los puntos críticos para la resolución de las inecuaciones de segundo grado en una variable.	12.	Polinomio de grado superior. Naturaleza de sus raíces. Ecuación polinomial de grado superior. Ecuaciones bicuadradas. Ecuación binómica. Ecuaciones con radicales y ecuaciones con valor absoluto.
4.	Valor absoluto: Propiedades. Resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. Números complejos. Forma binomial conjugado y módulo de un número complejo. Operaciones	13.	Determinante de orden 2 por 2. Sistema de ecuaciones lineales con dos variables. Interpretación gráfica. Método de Cramer. Determinantes 3 por 3. Propiedades. Sistema de ecuaciones lineales con 3 variables. Método de Cramer y de Gauss. Sistema de ecuaciones no lineales con dos y 3 variables.
5.	Polinomios en una variable con coeficientes en $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z}$. Igualdad de polinomios. Adición, sustracción y multiplicación de polinomios. Grado. Valor numérico. Polinomio ordenado y completo. Polinomio en dos o más variables. Grado relativo. Grado absoluto. Polinomio homogéneo.	14.	Inecuaciones de grado superior. Teorema del discriminante. Solución de inecuaciones de grado superior por el método de los puntos críticos. Inecuaciones fraccionarias. Inecuaciones que contienen valores absolutos y/o radicales.
6.	Productos notables. Identidades.	15.	Sistemas de inecuaciones lineales de primer grado con dos variables. Planteo y solución de inecuaciones lineales. Introducción a la programación lineal. Aplicaciones.
7.	División de polinomios. Algoritmo de la división Técnicas de división sintética. Teorema del resto. Teorema del factor.	16.	Logaritmos. Identidades fundamentales y propiedades. Ecuaciones e inecuaciones logarítmicas. Ecuaciones e inecuaciones exponenciales.
8.	Binomio de Newton. Término general en el desarrollo del binomio. Cocientes notables: término general y central en el desarrollo de un cociente notable	17.	Funciones reales. Dominio y rango. Representación tabular y gráfica. Funciones especiales: lineal, cuadrática, raíz cuadrada y valor absoluto. Función par e impar. Modelación del mundo real con funciones.
9.	Raíces de polinomios. Relaciones entre raíces y coeficientes de un polinomio de segundo y tercer grado. Paridad de raíces irracionales y complejas.	18.	Funciones crecientes y decrecientes. Funciones inyectivas y sobreyectivas. Funciones inversas. Función exponencial. Función logarítmica.
10.	Factorización. Teorema fundamental del álgebra. Factor primo de un polinomio. Métodos de factorización: factor común, sumar y restar, aspa simple, aspa doble,		



twitter.com/calapenshko

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

01

semana

twitter.com/calapenshko

CALAPENSHKO



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

Expresiones algebraicas. Potenciación y Radicación.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es una combinación de constantes y variables que están relacionadas por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación una cantidad finita de veces.

Ejemplos:

$$E(x,y) = 5\sqrt{xy^2} - \frac{x^3}{y^4} + 5$$

$$T(x,y,z) = 5x^3y - 21x^{-2} - 2x^{\frac{1}{2}}z^2 - 2z.$$

Las expresiones algebraicas se clasifican en:

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Son aquellas expresiones en las que sus variables no están afectadas por la radicación ni su exponente es fraccionario.

Ejemplos:

$$E(x,y,z) = \pi x^5 y^2 + z^{-2}$$

$$M(x,y) = 2y^4 + 3x^4 + y^{-7}$$

Las expresiones algebraicas racionales pueden ser a su vez de dos tipos:

1.1 RACIONALES ENTERAS: Cuando los exponentes de las variables son números enteros no negativos.

Ejemplos:

$$E(x,y,z) = \pi x^5 y^2 + z^2$$

$$M(x,y) = 2y^4 + 3x^4 + y^7$$

1.2 RACIONALES FRACCIONARIAS: Cuando por lo menos hay una variable con un exponente entero negativo.

Ejemplos:

$$E(x,y,z) = \pi x^5 y^2 + z^{-2}$$

$$M(x,y) = 2y^4 + 3x^4 + y^{-7}$$

2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS IRRACIONALES

Es aquella expresión en la que al menos una de sus variables tiene un exponente racional no entero.

Ejemplos:

$$E(x,y) = 5\sqrt{xy^2} - \frac{x^3}{y^4} + 5$$

twitter.com/calapenshko

$$T(x,y,z) = 5x^3y - 21x^{-2} - 2x^{\frac{1}{2}}z^2 - 2z$$

POTENCIACIÓN

$a^n = b$, donde

a: base

n: exponente

b: potencia

Definición: $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ veces}}$ si $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{R}$.

Observación: la potencia 0^0 no está definida.

Propiedades

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$6. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

$$2. a^0 = 1, a \neq 0$$

$$7. a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

$$3. (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$8. (a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$$

$$4. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

$$9. a^{-m-n} = a^{-(m+n)}, a \neq 0$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, a \neq 0, b \neq 0$$

10.

$$\left\{ \left[(a^m)^n \right]^p \right\}^q = a^{mnpq} \neq a^{mnp^q}$$

RADICACIÓN en $\mathbb{R}$

Sea $n \in \mathbb{Z} / n \geq 2$

Si n es par y $a > 0$ ó si n es impar, se cumple:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

$$\begin{array}{c} \text{índice} \nearrow \sqrt[n]{a} = b \nwarrow \text{raíz} \\ \nearrow \text{radicando} \end{array}$$

Observación: En el caso de que $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ tal que n es par; $a > 0$ entonces $b > 0$.

Propiedades

Si los radicales de ambos miembros existen, se cumple que:

$$1. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$2. \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$$

$$3. \quad \sqrt[n]{a^m \cdot a^p} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^p}$$

$$4. \quad \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^p}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^p}}, \quad b \neq 0$$

$$5. \quad \sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

$$6. \quad \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mp}$$

$$7. \quad \sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{\sqrt[s]{a^n}}}} = \sqrt[pqrs]{a^n}$$

$$8. \quad \sqrt[m]{a^x} \cdot \sqrt[n]{a^y} \cdot \sqrt[p]{a^z} = a^{\frac{(x \cdot n + y) \cdot p + z}{mnp}}$$

Ejemplo 1:

$$\text{Si } N = \left[\frac{(-64)^{\frac{5}{3}}}{128} + 8(32)^{-\frac{1}{5}} + (169)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ determine el valor de}$$

$$\frac{N - 1\sqrt{N^2 + 16}}{5} + N^{N+1}.$$

Solución:

$$N = \left[\frac{(-64)^{\frac{5}{3}}}{128} + 8(32)^{-\frac{1}{5}} + (169)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(-2^6)^{\frac{5}{3}}}{2^7} + 8(2^5)^{-\frac{1}{5}} + (13^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{(-2^{10})}{2^7} + 8\left(\frac{1}{2}\right) + 13 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[-(2)^3 + 4 + 13 \right]^{\frac{1}{2}} = [9]^{\frac{1}{2}} = 3 \therefore N = 3$$

$$\text{luego } \frac{N - 1\sqrt{N^2 + 16}}{5} + N^{N+1} = \frac{3 - 1\sqrt{(3)^2 + 16}}{5} + (3)^{3+1} = 1 + 81 = 82$$

Ejemplo 2:

Si $x^{x^5} = 5$, halle el valor de $\frac{x^{10x^5} + x^{5x^5}}{(x^3x^5)^{\frac{5}{3}}}$.

Solución:

$$x^{x^5} = 5 \rightarrow (x^{x^5})^5 = 5^5 \rightarrow (x^5)^{x^5} = 5^5 \rightarrow x^5 = 5$$

$$\frac{x^{10x^5} + x^{5x^5}}{(x^3x^5)^{\frac{5}{3}}} = \frac{x^{10(5)} + x^{5(5)}}{(x^{3(5)})^{\frac{5}{3}}} = \frac{x^{50} + x^{25}}{(x^{15})^{\frac{5}{3}}}$$

$$= \frac{x^{25}(x^{25} + 1)}{x^{25}} = (x^5)^5 + 1 = 5^5 + 1 = 3126$$

twitter.com/calapenshko

Ejemplo 3:

Si m y n son números racionales tales que $m^{n^m} = m\sqrt{2}$, halle los valores de m y n .

Solución:

$$\text{Tenemos } m^{n^m} = m\sqrt{2} \rightarrow m^{n^m} \cdot m^{-1} = \sqrt{2}$$



$$m^{n^{n^m}-1} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1+\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}$$

Algunas propiedades de los Productos Notables:

1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

2) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

3) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

4) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Álgebra

EJERCICIOS

1. El número "r" de celulares que tiene Juan, está dado por el número de expresiones algebraicas racionales enteras de la forma

$E(x, y, z) = x^4 y^{n-3} - 3xyz^{15-n} + y^{\frac{n}{7}} x^3$, si el contrato que hizo con una empresa de telefonía por la compra de dichos celulares fue de 12 cuotas mensuales de $(2r-1)(2r)$ soles por celular, ¿cuál es el costo total que tiene que pagar Juan por los "r" celulares?

- A) 864 soles B) 816 soles C) 720 soles D) 666 soles

Solución:

- 1) Como $E(x, y, z)$ genera expresiones algebraicas racionales enteras

$$n - 3 \in \mathbb{Z}_0^+, 15 - n \in \mathbb{Z}_0^+, \frac{n}{7} \in \mathbb{Z}_0^+,$$

$$n \in \mathbb{Z}, n - 3 \geq 0; 15 - n \geq 0; n \geq 0; n = \frac{0}{7}$$

$$3 \leq n \leq 15; n = \frac{0}{7}$$

$$n = 7; n = 14$$

twitter.com/calapenshko

- 2) Se generan 2 expresiones algebraicas racionales enteras, entonces $r = 2$
- 3) Costo total que tiene que pagar Juan por los "r" celulares:

$$2(12)((2r-1)(2r)) = 2(12)(34) = 816 \text{ soles.}$$



2. La suma de los valores de "n" que determinan expresiones algebraicas racionales enteras de la forma $G(x,y) = x^{n-3}y^{n+1} - \sqrt{5}x^{\frac{20}{n+1}}y^{\frac{12}{n-1}} - nx^{\frac{20}{n+1}}y^{\frac{12}{n-1}}$ representa la edad actual de Julio César. Dentro de cuánto tiempo cumplirá 20 años.

A) 10 años B) 12 años C) 13 años D) 16 años

Solución:

- 1) Debe ocurrir

i) $n-3 \in \mathbb{Z}_0^+ \rightarrow n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$

ii) $6-n \in \mathbb{Z}_0^+ \rightarrow n \in \mathbb{Z}, n \leq 6$

iii) $\frac{20}{n+1} \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow n \in \{0,1,3,4,9,19\}$

iv) $\frac{12}{n-1} \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow n-1 \in \{1,2,3,4,6,12\}$ luego $n \in \{2,3,4,5,7,13\}$

luego $n = 3 \vee n = 4$

- 2) Edad actual de Julio César 7 años, dentro de 13 años cumplirá 20.

Rpta.: C

3. Las edades de Sofía, Carla y Laura son x, y, z respectivamente. Si se cumple que:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{y}{y+z} = \frac{z}{x+z}, \quad E = \frac{\sqrt{x+2y} \sqrt{8^{2x-y}} \sqrt{3x+z} \sqrt{25^{3z-x}}}{\sqrt{3y+5z} \sqrt{9y-5z}}$$

y la suma de sus edades es $2E + 15$, ¿cuántos años tiene Laura?

A) 20 años B) 25 años C) 30 años D) 40 años

Solución:

- 1) Se cumple:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{y}{y+z} = \frac{z}{x+z} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{y+z}{y} = \frac{x+z}{z} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{x}{z}$$

- 2) De lo cual resulta $x = y = z$, reemplazando en E se tiene:

$$E = \frac{\sqrt[3]{8} \sqrt[4]{25^2}}{\sqrt[8]{9^{-4}}} = 30$$

- 3) Es decir la suma de sus edades es $2E + 15 = 75$, entonces Laura tiene 25 años.

Rpta.: B

4. Si el costo de un lápiz es x soles, donde x es tal que $2^{2x} = 256$, determine el costo de $x^3 + x^2 + 1$ lápices.

A) 24 soles B) 25 soles C) 26 soles D) 30 soles

Solución:

- 1) $2^{2x} = 256 \rightarrow 2^{2x} = 2^8 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 2$
Luego, cada lápiz cuesta 2 soles.
- 2) $2^3 + 2^2 + 1 = 13$ lápices.
- 3) El costo total $13(2) = 26$ soles.

Rpta.: C

5. La edad de Carlos es el triple de la edad de José, quien tiene actualmente $(3m - 4n + 5)$ años; donde m y n verifican $9^m = 3^n$ y $625^{n+1} = 125^{m-2}$. Halle la diferencia de las edades de Carlos y José.

A) 16 años B) 20 años C) 30 años D) 36 años

Solución:

- 1) $(3^2)^m = 3^n \rightarrow 2m = n \quad (\alpha)$
- 2) $5^{4n+4} = 5^{3m-6} \rightarrow 4n + 4 = 3m - 6 \rightarrow 3m - 4n = 10 \quad (\beta)$
 $(\alpha) \text{ en } (\beta)$
 $3m - 4(2m) = 10 \rightarrow -5m = 10$
 $m = -2, n = -4$
- 3) Edad de José: $3m - 4n + 5 = -6 - 4(-4) + 5 = 15$ años
Edad de Carlos 45 años
- 4) Diferencia de las edades: $45 - 15 = 30$ años

Rpta.: C

6. En un laboratorio se estudia el crecimiento poblacional de una colonia de bacterias; En ella se determina que se reproduce 9 veces más que la hora anterior; si al cabo de un tiempo " t " hay 100 millones de bacterias, halle el número de bacterias que hubieron al cabo de " $t - 1$ " horas.

A) 10 000 B) 90 0000 C) 90 000 000 D) 10 000 000

Solución:

- 1) $t = 0 \rightarrow 1$ bacteria = 10^0
- 2) $t = 1 \rightarrow 1 + 9(1) = 10$ bacterias = 10^1
- 3) $t = 2 \rightarrow 10 + 9(10) = 100$ bacterias = 10^2
- 4) $100\,000\,000 = 10^t \rightarrow t = 8$ horas
- 5) $t = 7$ horas $\rightarrow 10^{t-1} = 10\,000\,000$

Rpta.: D

7. Si en la expresión $\sqrt[4]{x^3 \sqrt[3]{x^2 \sqrt[5]{x^3 \sqrt[N]{x^6}}} = x^{\frac{3}{N}}$, $x \neq 0$, el valor de N representa el pago en bruto en miles de soles que recibí por mi trabajo, ¿cuánto sería el pago neto que recibiré si me hicieron un descuento del 12%?

- A) S/ 5 282 B) S/ 4 600 C) S/ 2 640 D) S/ 1 320

Solución:

$$1) \quad x^{\frac{[(3(3)+2)5+3]N+6}{4(3)(5)N}} = x^{\frac{3}{N}}$$

$$x^{\frac{[(3(3)+2)5+3]N+6}{4(3)(5)}} = x^3$$

$$\frac{[(3(3)+2)5+3]N+6}{4(3)(5)} = 3$$

$$58N+6=180$$

$$58N=174$$

$$N=3$$

- 2) Sueldo bruto de 3000 soles

$$3000 \times \frac{12}{100} = 360$$

- 3) Recibiré como pago neto luego del descuento S/ 2 640.

Rpta.: C

8. La edad de Carlos es tres veces más que la edad de Gloria. Si la edad de Carlos está representada por $\overline{ab}$, donde $a = x^{-4}$ y $b = y^{-3m}$, halle la suma de las edades de Carlos y Gloria dentro de 3 años, si se sabe que: $y^{my^{2m}} = 16^{-16^{-1}}$ y $x^{-x^{-2}} = 2$.

- A) 60 años B) 66 años C) 70 años D) 76 años

Solución:

$$1) \quad \text{Se tiene } y^{my^{2m}} = 16^{-16^{-1}} \rightarrow (y^m)^{y^{2m}} = (16^{-1})^{16^{-1}}$$

$$\left((y^m)^{y^{2m}} \right)^2 = \left(\left(\frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{16}} \right)^2 \rightarrow (y^{2m})^{y^{2m}} = \left(\frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$y^{2m} = \frac{1}{4} \rightarrow y^m = \frac{1}{2} \rightarrow b = y^{-3m} = 8$$

$$2) \quad \text{Además: } x^{-x^{-2}} = 2 \rightarrow \left(x^{-x^{-2}} \right)^2 = 2^2 \rightarrow \left(x^{-2} \right)^{x^{-2}} = 2^2$$

$$x^{-2} = 2 \rightarrow a = x^{-4} = 4$$

3) Entonces: edad de Carlos = $\overline{ab} = 48$

edad de Gloria = 12

4) Piden: $(48+3)+(12+3) = 66$ años.

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El número de expresiones algebraicas racionales enteras de coeficientes positivos de la forma $M(x,y) = (12-b)x^{\overline{(c-1)(4-c)}} + 5x^{\frac{28}{b+1}}y^{\frac{7}{a-3}} + 7cx^{b-5}y^{\overline{(m-1)(a-3m)}}$ representa la longitud del lado de un triángulo equilátero. Determine el área de dicho triángulo.

- A) $12\sqrt{3} u^2$ B) $4\sqrt{3} u^2$ C) $9\sqrt{3} u^2$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4} u^2$

Solución:

$$1) \quad 12-b > 0 \wedge b-5 \geq 0 \rightarrow 5 \leq b < 12 \wedge \frac{28}{b+1} \in \mathbb{Z}_0^+ \\ \rightarrow b = 6$$

$$2) \quad c-1 > 0 \wedge 4-c \geq 0 \\ \rightarrow 1 < c \leq 4 \wedge \overline{7c} \\ \rightarrow c = 2, 3, 4$$

$$3) \quad m-1 > 0 \rightarrow m > 1 \rightarrow 3m > 3 \\ \rightarrow a-3m \geq 0 \rightarrow a \geq 3m > 3 \wedge \frac{7}{a-3} \in \mathbb{Z}^+ \\ \rightarrow a = 10 \wedge m = 2, 3 \\ \rightarrow n^\circ \text{ de E.A.R. Enteras es } 6.$$

$$4) \quad \text{Luego, el área del triángulo equilátero es } \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} u^2$$

Rpta.: C

2. La siguiente expresión:

$$p(x,y) = \frac{3n}{2}x^{n-2}y^{20-m} + \left(\frac{m-n}{7}\right)x^{7-n}y^{m+1} + 5\left(\frac{m}{3}-3\right)x^{n^2}$$

es algebraica racional entera con coeficientes enteros. Cada coeficiente de $p(x,y)$ es no nulo y representa numericamente la edad en años de los hijos de Raúl, además la edad de Raúl excede a la edad del mayor de sus hijos en 30 años. Halle la edad de Raúl.

- A) 38 años B) 42 años C) 45 años D) 51 años

Solución:

- 1) Debe ocurrir

$$(n-2 \geq 0 \wedge 20-m \geq 0 \wedge 7-n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow (2 \leq n \leq 7 \wedge m \leq 20 \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}) \dots (1)$$

- 2) Por otro lado $\left(\frac{3n}{2} \in \mathbb{Z}^+ \stackrel{\text{de (1)}}{\Rightarrow} n \in \{2, 4, 6\} \right)$ y $\left(\left(\frac{m}{3} - 3 \right) \in \mathbb{Z}^+ \text{ y de (1)} \Rightarrow m \in \{12, 15, 18\} \right)$

- 3) Además $\frac{m-n}{7} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m=18, n=4$, reemplazando en $p(x,y)$ se tiene:

$$p(x,y) = 6x^2y^2 + 2x^3y^{19} + 15x^{16}$$

- 4) Las edades de los hijos de Raúl son 6, 2 y 15 años respectivamente.
 $\therefore$ La edad de Raúl es $15 + 30 = 45$ años.

Rpta.: C

3. Un campesino quiere cercar su terreno de forma rectangular de $(x^{-1}+13)$ m de largo y $(x^{-1}-3)$ m de ancho con postes separados cada $\left(\frac{x^{-1}+1}{7} \right)$ m cada uno, halle el número de postes que utilizará para cercar su terreno, sabiendo que x satisface

$$x^{\sqrt{x}^{\sqrt[3]{x}}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\sqrt{3}}.$$

- A) 32 B) 30 C) 24 D) 20

Solución:

- 1) Hallando el valor de x , se tiene:

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}^{\sqrt[3]{x}}} &= \left(\frac{1}{3} \right)^{\sqrt{3}} = \left(\left(\frac{1}{3} \right)^3 \right)^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \left(\frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \left(\frac{1}{27} \right)^{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^6 \right)^{\frac{1}{6}}} = \left(\frac{1}{27} \right)^{\left(\frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{6}}} \\ &= \left(\frac{1}{27} \right)^{\left(\frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}} = \left(\frac{1}{27} \right)^{\sqrt{\frac{1}{27}}^{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}}} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{27}$$

- 2) Luego se sabe que N° de estacas = N° de espacios (Figura cerrada)

Además el terreno del campesino tiene $(x^{-1} + 13)m = 40m$ de largo

y $(x^{-1} - 3)m = 24m$ de ancho, distancia entre postes = $\frac{27+1}{7} = 4m$

$$3) \quad N^\circ \text{ de espacios} = \frac{2 \times 24 + 2 \times 40}{4} = 32 \rightarrow N^\circ \text{ de postes} = 32$$

Rpta.: A

4. Si $x^x = 4 \times 27^{81^{-4^{-1}}} - 100^{32^{-25^{-32^{-5^{-1}}}}}$, halle el valor de $M = x^{x^{1+x^x+1}}$

A) 8

B) 16

C) 32

D) 64

Solución:

$$\begin{aligned} 1) \quad x^x &= 4 \times 27^{81^{-4^{-1}}} - 100^{32^{-25^{-32^{-5^{-1}}}}} = 4 \times 27^{81^{-\frac{1}{4}}} - 100^{32^{-25^{-32^{-\frac{1}{5}}}}} \\ &= 4 \times 27^{\frac{1}{3}} - 100^{32^{-25^{-\frac{1}{2}}}} = 4 \times 3 - 100^{32^{-\frac{1}{5}}} = 12 - 100^{\frac{1}{2}} = 2 \\ x^x &= 2 \end{aligned}$$

$$2) \quad M = x^{x^{1+x^x+1}} = x^{x^{1+x^x \cdot x}} = x^{x^{1+2x}} = x^{x \cdot x^{2x}} = (x^x)^{(x^x)^2} = 2^{2^2} = 16$$

Rpta.: B

5. Un técnico consigue un contrato por N días en los que gana M^{16} soles por hora;

siendo $N = \sqrt[5]{3\sqrt[3]{15}} \sqrt[5]{3\sqrt[3]{15}} \sqrt[5]{3\sqrt[3]{15}} \dots$ y $M^{2M^{2M^8}} = 4$. Si el técnico trabajó 8 horas al día, ¿cuánto ganó por los N días que trabajó?

A) S/ 3840

B) S/ 1920

C) S/ 1600

D) S/ 1440

Solución:

$$1) \quad \text{Como } N = \sqrt[5]{3\sqrt[3]{15}} \sqrt[5]{3\sqrt[3]{15}} \sqrt[5]{3\sqrt[3]{15}} \dots = \sqrt[15]{15} \sqrt[15]{15} \sqrt[15]{15} \dots$$

$$N = \sqrt[15]{15}^{\sqrt[15]{15}^{\sqrt[15]{15}^{\dots}}} = \sqrt[15]{15}^N \rightarrow N=15 \text{ días}$$

$$2) \quad (M^2)^{(M^2)^{(M^2)^4}} = 4 \rightarrow (M^2)^{(M^2)^{(M^2)^4}} = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^{\left(4^{\frac{1}{4}}\right)^{\left(4^{\frac{1}{4}}\right)^4}} \rightarrow M^2 = 4^{\frac{1}{4}} \rightarrow M^{16} = 16$$

$$3) \quad \text{Juan ganó } S/(16)(15)(8) = S/1920.$$

Rpta.: B

6. Dado un prisma rectangular tal que las medidas de sus aristas básicas son 3^x y 3^z , con una altura de x metros. Si el perímetro y el área de la base son respectivamente 180 metros y 729 metros cuadrados, halle el mínimo volumen de dicho prisma.

- A) 1458 m³ B) 1548 m³ C) 1845 m³ D) 2916 m³

Solución:

$$1) \quad \text{Tenemos } 3^x + 3^z = 90 \dots (1) \text{ y } 3^x(3^z) = 729 \dots (2)$$

$$2) \quad \text{De (2): } 3^{x+z} = 3^6 \rightarrow x+z=6 \rightarrow z=6-x$$

$$\text{En (1): } 3^x + 3^{6-x} = 90 \rightarrow 3^x + 7293^{-x} = 90$$

$$(3^x)^2 - 90(3^x) + 729 = 0 \rightarrow (3^x - 81)(3^x - 9) = 0$$

$$x = 4 \vee x = 2$$

$$\text{Mínimo } x = 2$$

$$\text{Volumen} = 729x = 729(2) = 1458$$

- 3) El volumen mínimo del prisma es de 1458 metros cúbicos.

Rpta.: A

7. En una región rectangular de lados $\left(\frac{2^{n+6}}{(2^n)^{n-1}}\right)m$ y $\left(\frac{(2^{n-1})^{n+1}}{4^{n-1}}\right)m$, se construirá una pileta en el centro de la región, la cual ocupa la cuarta parte del área total del terreno. Determine cuál es el área no destinada para la construcción de la pileta.

- A) 128m² B) 96m² C) 32m² D) 4m²

Solución:

- 1) Área total:

$$\left(\frac{2^{n+6}}{(2^n)^{n-1}}\right)\left(\frac{(2^{n-1})^{n+1}}{4^{n-1}}\right) = \frac{2^{n+6+n^2-1}}{2^{n^2-n+2n-2}} = \frac{2^{n^2+n+5}}{2^{n^2-n-2}} = 2^7$$

2) Área de la pileta:

$$\frac{2^7}{4} = \frac{2^7}{2^2} = 2^5 = 32$$

3) Entonces, el área no destinada a la pileta es 96m^2 .

Rpta.: B

8. Un tren recorre la distancia que separa dos ciudades (M y N) a una velocidad de $180x$ km/h de ida, pero de regreso a $40y$ km/h, donde “x” es la solución de la ecuación $5^{6x+1} + 5^{6x+2} + 5^{6x-1} = 3775$ e “y” es la solución de la ecuación $3^{\sqrt{3y}+1} + 3^{\sqrt{3y}-1} + 3^{\sqrt{3y}-2} = 93$. ¿Cuál es la velocidad promedio del recorrido?

- A) 98 km/h B) 100 km/h C) 105 km/h D) 110 km/h

Solución:

$$5^{6x+1} + 5^{6x+2} + 5^{6x-1} = 3775$$

$$5^{6x} \left(5 + 25 + \frac{1}{5} \right) = 151(25)$$

$$5^{6x} \left(\frac{151}{5} \right) = 151(25)$$

$$5^{6x} = 5^3$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$180x = 90 \text{ km/h}$$

$$1) \quad 3^{\sqrt{3y}+1} + 3^{\sqrt{3y}-1} + 3^{\sqrt{3y}-2} = 93$$

$$3^{\sqrt{3y}} \left(3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) = 93$$

$$3^{\sqrt{3y}} \left(\frac{31}{9} \right) = 31(3)$$

$$3^{\sqrt{3y}} = 3^3$$

$$y = 3$$

$$\text{velocidad del tren de regreso} = 40(3) = 120 \text{ km/h}$$

$$2) \quad \text{velocidad promedio} = \frac{90 + 120}{2} = 105 \text{ km/h}$$

Rpta.: C

twitter.com/calapenshko

Álgebra

EJERCICIOS

1. Juan es un trabajador de una feria artesanal y gastronómica de Lima que por fiestas patrias debe asistir a laborar todos los días del mes de julio del 2019. Si el número de expresiones algebraicas racionales enteras del conjunto $D = \{T(x, y) / T(x, y) = 5x^{n-4}y - 3x^m y^{6-n} + xy^{2-m}\}$ coincide con la cantidad de días que Juan no trabajó durante el mencionado mes, ¿cuántos días trabajó Juan en el mes de julio del 2019?

A) 20 días B) 38 días C) 22 días D) 24 días

Solución:

Debe ocurrir

$$(n-4 \geq 0 \wedge m \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge 6-n \geq 0 \wedge 2-m \geq 0 \wedge n \in \mathbb{Z})$$

$$(4 \leq n \leq 6 \wedge 0 \leq m \leq 2 \wedge m \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge n \in \mathbb{Z}_0^+) \Rightarrow (m \in \{0, 1, 2\} \text{ y } n \in \{4, 5, 6\})$$

luego D tiene 9 expresiones algebraicas racionales enteras
entonces Juan no trabajó 9 días.

En julio del 2019 Juan trabajó $31 - 9 = 22$ días.



2. Los padres de Fabrizio le han prometido una laptop nueva para cuando cumpla 20 años. Si $L = \sqrt{2 + \frac{3^{n+3} - 3^{n+1}}{3(3^{n-1})} + \left(\frac{10 \cdot 2^m}{2^{m+4} + 4 \cdot 2^m}\right)^{-1}}$, $\{m, n\} \subset \mathbb{Z}^+$ y él ya tiene cumplidos $\frac{L^2 + 8}{2}$ años, ¿cuántos años faltan para que Fabrizio reciba su nueva laptop?
- A) 4 años B) 6 años C) 2 años D) 3 años

Solución:

$$L = \sqrt{2 + \frac{3^{n+1}(3^2 - 1)}{3^n} + \left(\frac{10 \cdot 2^m}{2^{m+2}(2^2 + 1)}\right)^{-1}} = \sqrt{2 + \frac{3(8)}{1} + \left(\frac{10 \cdot 2^m}{4 \cdot 2^m \cdot 5}\right)^{-1}}$$

$$L = \sqrt{2 + 24 + 2} = \sqrt{2 + 26} = 2\sqrt{7}$$

Fabrizio tiene $\frac{L^2 + 8}{2} = 18$ años, le faltan 2 años para recibir su laptop nueva.

Rpta.: C

3. Si x es un número racional positivo que verifica la ecuación $x^{\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)} = \frac{1}{2}$, halle el mayor valor de x .
- A) 16 B) 4 C) 1/4 D) 1/16

Solución:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{\sqrt{\frac{1}{x}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \vee \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{\sqrt{\frac{1}{x}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{\sqrt{\frac{1}{x}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \vee \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{\sqrt{\frac{1}{x}}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow (x = 4 \vee x = 16)$$

Rpta.: A

4. Por concepto de alquiler de un departamento, Hayde le debe a Amalia 50 veces el valor de $(m^5 \cdot n^2)$ soles, donde m y n satisfacen $\begin{cases} m^m m^m \dots^\infty = 5 \\ n^{n^2} = 2 \end{cases}$. Si Hayde tiene 600 soles para cancelar la deuda, ¿cuánto le queda de dinero, después de cancelar la deuda?
- A) 80 soles B) 105 soles C) 100 soles D) 50 soles

Solución:

$$\begin{cases} m^{m^{m^{\dots}}} = 5 \Rightarrow m^{m^{m^{\dots}}} = (\sqrt[5]{5})^{(\sqrt[5]{5})^{(\sqrt[5]{5})^{\dots}}} \Rightarrow m = \sqrt[5]{5} \\ n^{n^2} = 2 \Rightarrow n^{n^2} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^2} \Rightarrow n = \sqrt{2} \end{cases}$$

La deuda de Hayde es $50 \cdot (\sqrt[5]{5})^5 \cdot (\sqrt{2})^2 = 500$ soles

Le queda: $600 - 500 = 100$ soles

Rpta.: C

5. Mirtha ha confeccionado pañuelos de forma cuadrada de 32 cm de lado y los va a vender en cajitas de base rectangular de a cm de largo y $(a/2)$ cm de ancho. Para colocar de manera exacta cada pañuelo en su respectiva cajita ha doblado el pañuelo por la mitad cinco veces. ¿En cuánto excede la medida del largo de la base de dicha cajita a la medida de su ancho?

- A) 1 cm B) 2 cm C) 5 cm D) 4 cm

Solución:

Para el largo de la cajita: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 32 = a \dots (1)$

Para el ancho de la cajita: $\left(\frac{1}{2}\right)^y \cdot 32 = \frac{a}{2} \dots (2)$

Debe ocurrir $x + y = 5 \dots (3)$

$(2) \div (1): \left(\frac{1}{2}\right)^{y-x} = \frac{1}{2}$ entonces $y - x = 1 \dots (4)$

De (3) y (4): $(y = 3 \wedge x = 2)$

De (1): $a = 8 \Rightarrow (\text{largo} = 8 \text{ cm y ancho} = 4 \text{ cm}).$

Rpta.: D

6. El psicólogo Nicolás entrevista a todos los estudiantes de quinto grado de secundaria de la institución educativa donde labora sobre "Mi futuro después del colegio". Terminada la investigación la dirección y el tutor de aula reciben el informe en el que se distinguen 5 categorías:
- El $(a \cdot b - 1)0\%$ de los estudiantes piensa realizar estudios superiores.
 - El 15 % de los estudiantes piensa estudiar carreras técnicas.
 - El 20 % de los estudiantes por herencia, se dedicarán al negocio familiar.
 - El $(b^2 - 1)\%$ de los estudiantes irá al extranjero definitivamente.
 - El resto de los estudiantes no tenía claro que harían después de culminar sus estudios secundarios.

Si se satisface $a^{4-a} = \sqrt{\frac{64}{\sqrt{\frac{64}{\sqrt{\frac{64}{\dots \infty \text{ rad}}}}}}} \wedge b = \sqrt{4 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots \infty \text{ rad}}}}} \text{ y}$

cada uno de los estudiante del aula se identificó con solo una de las 5 categorías presentados en el informe, ¿qué porcentaje de los estudiantes encontró el psicólogo Nicolás que no precisó nada concreto respecto a su futuro?

A) 8 %

B) 7 %

C) 10 %

D) 12 %

Solución:

$$(a^{4-a})^2 = \frac{64}{\sqrt{\frac{64}{\sqrt{\frac{64}{\dots \infty \text{ rad}}}}} \Rightarrow (a^{4-a})^2 = \frac{64}{a^{4-a}} \Rightarrow (a^{4-a})^3 = 64 \Rightarrow a^{4-a} = 4 \therefore a = 2$$

$$b = \sqrt{4 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots \infty \text{ rad}}}}} \Rightarrow b = \sqrt{4 + 5} = 3$$

No precisaron nada concreto : $100\% - (50 + 15 + 20 + 8)\% = 7\%$

Rpta.: B

7. Un auto lleva a Lunié en $(2t)$ horas desde Lima a Ica, luego de permanecer en Ica por 2 días continúa su viaje hacia Arequipa en otro auto que lo llevó en $(2t^2 - 1)$ horas y después de 4 días en Arequipa enrumba hacia Tacna que le tomó $(2t + 5)$ horas. ¿Cuántas horas de viaje empleó Lunié para trasladarse de Lima a Tacna?, sabiendo que se satisface $t = \sqrt[4]{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots \infty \text{ rad}}}}$.

A) 16 horas

B) 11 horas

C) 10 horas

D) 20 horas

Solución:

$$t = \sqrt[4]{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots \infty \text{ rad}}}} \Rightarrow t^2 = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots \infty \text{ rad}}}}$$

$$\Rightarrow t^4 = 12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots \infty \text{ rad}}}} \Rightarrow t^4 = 12 + t^2 \therefore t = 2$$

Tiempo de viaje : $(2(2)) + (2(2)^2 - 1) + (2(2) + 5) = 4 + 7 + 9 = 20 \text{ horas}$

Rpta.: D

8. Determine el valor de verdad (V o F) de cada una de las siguientes proposiciones:

I. $(-\sqrt{64} - (-2)^3)^0 = 1$

II. Si $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 248 \Rightarrow x$ es un número impar

III. Si $27^{9^{x+3}} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow x$ es un número negativo par

en el orden mostrado.

A) VFV

B) VVV

C) FVV

D) FFV

Solución:

I. $(-\sqrt{64} - (-2)^3)^0 = (-8 - (-8))^0 = 0^0 \dots (F)$

II. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 248 \Rightarrow 2^{x-4}(2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1) = 248$
 $\Rightarrow 2^{x-4}(31) = 248 \Rightarrow 2^{x-4} = 8 \Rightarrow x = 7 \dots (V)$

III. $27^{9^{x+3}} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow 3^{3 \cdot 3^{2x+6}} = 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 3^{2x+7} = 3^{-1} \Rightarrow 2x+7 = -1 \Rightarrow x = -4 \dots (V)$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La siguiente expresión: $p(x,y) = \frac{4n}{3}x^{n-3}y^{2m-1} + 3\left(\frac{m}{2} - 1\right)x^{10-n}y^{9-m-n} + (mn-8)x^{n+3}$ es algebraica racional entera de tres términos con coeficientes enteros y diferentes. Si cada coeficiente de $p(x,y)$ representa el número de cuadernos, libros y lapiceros que compró don José en una librería, ¿cuántos artículos en total compró don José?

A) 13

B) 11

C) 20

D) 15

Solución:

Debe ocurrir

$$(n-3 \geq 0 \wedge 2m-1 \geq 0 \wedge 10-n \geq 0 \wedge 9-m-n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow (3 \leq n \leq 10 \wedge m+n \leq 9 \wedge m \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \in \mathbb{Z}) \dots (1)$$

$$\left(\frac{n}{3} \in \mathbb{Z}^+ \stackrel{\text{de (1)}}{\Rightarrow} n \in \{3, 6, 9\} \right) \text{ y } \left(\left(\frac{m}{2} - 1 \right) \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m \in \{4, 6, 8, 10, 12, \dots\} \right)$$

$$(m+n \leq 9 \wedge m \cdot n > 8) \Rightarrow \begin{cases} n=3 \Rightarrow \begin{cases} m=4 \dots \text{dos coef de } p(x,y) \text{ son iguales} \\ m=6 \end{cases} \\ n=6 \Rightarrow \text{no hay valor para } m \end{cases}$$

Entonces $n=3$ y $m=6$

Cantidad total de artículos comprados = $(4) + (6) + (10) = 20$

Rpta.: C

2. Halle la suma de coeficientes de la siguiente expresión algebraica racional entera

$M(x,y,z) = \left(\frac{n^2-49}{3n-27}\right)x^{36-3n}y^{\frac{n^2+3}{2}} + 6xy^n - (n-4)x^2y^{3n}z^n + \left(\frac{n-9}{n-10}\right)xy^{n-5}$ si se sabe que tiene 4 términos de coeficientes enteros.

- A) 15 B) -6 C) 12 D) 13

Solución:

Debe ocurrir

$$36-3n \geq 0 \wedge n \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge \frac{n^2-49}{3n-27} \neq 0 \wedge n-4 \neq 0 \wedge \frac{n-9}{n-10} \neq 0 \wedge n-5 \geq 0$$

$$\Rightarrow (n \leq 12 \wedge n \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge n \neq 7 \wedge n \neq 9 \wedge n \neq 4 \wedge n \neq 10 \wedge n \geq 5)$$

$$\Rightarrow (5 \leq n \leq 12 \wedge n \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge n \notin \{7,9,10\})$$

$$\Rightarrow \left(n \in \{5,6,8,11,12\} \wedge \frac{n^2+3}{2} \in \mathbb{Z}_0^+ \right)$$

$$\Rightarrow (n \in \{5,6,8,11,12\} \wedge n \text{ es impar}) \Rightarrow (n=5 \vee n=11)$$

$$\text{Si } n=5: M(x,y,z) = 2x^{21}y^{14} + 6xy^5 - x^2y^{15}z^5 + \left(\frac{4}{5}\right)x$$

$$\text{Si } n=11: M(x,y,z) = 12x^3y^{62} + 6xy^{11} - 7x^2y^{33}z^{11} + 2xy^6$$

$$\text{entonces } \sum \text{coef}[M(x,y,z)] = 12 + 6 - 7 + 2 = 13$$

Rpta.: D

3. Si $\left[\frac{8 \cdot 2^{n+3} - 16 \cdot 2^n}{4 \cdot 2^{n+3}}\right]^{-2} = \frac{a}{b}$ donde a y b son PESI, calcule el complemento aritmético del número $\overline{a(b-1)}$.

- A) 52 B) 42 C) 48 D) 25

Solución:

$$\left[\frac{8 \cdot 2^{n+3} - 16 \cdot 2^n}{4 \cdot 2^{n+3}}\right]^{-2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \left[\frac{2^{n+6} - 2^{n+4}}{2^{n+5}}\right]^{-2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \left[\frac{2^{n+3}(8-2)}{2^{n+3}(4)}\right]^{-2} \Rightarrow \left[\frac{3}{2}\right]^{-2} = \frac{4}{9} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \overline{a(b-1)} = 48 \therefore \text{C.A.}(48) = 52$$

Rpta.: A

4. En un aula de clase hay 25 estudiantes entre niños y niñas. Si la cantidad de niños es los cinco cuartos del valor numérico de $K = \sqrt[a]{1+a} \sqrt[a]{12a^2} \cdot \sqrt[a]{1+a} \sqrt[a]{12a^2}$, $a \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$, halle la cantidad de niñas que estudian en dicha aula.

A) 16 B) 14 C) 10 D) 18

Solución:

$$K = \sqrt[a]{1+a} \sqrt[a]{12a^2} \cdot \sqrt[a]{1+a} \sqrt[a]{12a^2} = \sqrt[a]{1+a} \sqrt[a]{12a^2} \cdot \sqrt[a]{1+a} \sqrt[a]{12a^2} = a^{(1+a)} \sqrt[a]{12a^2} \cdot a^{2(1+a)} \sqrt[a]{12a^2}$$

$$K = 12^{\frac{a^2}{a(1+a)}} \cdot 12^{\frac{a^2}{a^2(1+a)}} = 12^{\frac{a}{(1+a)}} \cdot 12^{\frac{1}{(1+a)}} = 12^{\frac{(a+1)}{(1+a)}} = 12$$

Número total de estudiantes = 25

$$\text{Número de niños} = \frac{5}{4}(12) = 15$$

$$\text{Número de niñas} = 25 - 15 = 10$$

Rpta.: C

5. Si $\sqrt[3]{3x^{-2}} \sqrt[9]{3x^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, halle un valor para x.

A) 3^{14} B) $\sqrt[3]{3}$ C) 3^{-9} D) 81

Solución:

$$\sqrt[3]{3x^{-2}} \sqrt[9]{3x^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt[3]{3x^{-2}} \sqrt[9]{3x^{-2}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$$

$$\sqrt[9]{3x^{-2}} \sqrt[9]{3x^{-2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{9}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{9}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\left(\frac{1}{27}\right)} \therefore \sqrt[9]{3x^{-2}} = \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow \sqrt[9]{3x^{-2}} = 3^{-3} \Rightarrow 3x^{-2} = 3^{-27} \Rightarrow x^2 = 3^{28} \Rightarrow x = \pm 3^{14}$$

Rpta.: A

6. En el mes de Junio del año 2019, hubo una gran preocupación por los 213 casos confirmados del síndrome de Guillain-Barré, lo que alertó a las autoridades sanitarias peruanas. De haberse llegado a los $(a^{-4} + a^{-3} + a^{-2} + a^{-1})$ casos, esta incidencia atípica pasaría a ser considerada una epidemia. Si “a” es la solución de $3\left(\frac{1}{x}\right)^{2x} \cdot \sqrt{x} = 4x + 2$, ¿cuántos pacientes con el síndrome de Guillain-Barré faltaron para ser considerada una epidemia?

A) 152 B) 87 C) 127 D) 97

Solución:

$$3\left(\frac{1}{x}\right)^{2x} \cdot \sqrt{x} = 2(2x+1) \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} = (2x+1) \cdot x^{2x} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x} = (2x+1) \cdot x^{2x} \cdot x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right) \cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)} = (2x+1) \cdot x^{(2x+1)} \Rightarrow 2x+1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \therefore a = \frac{1}{4}$$

Para considerarse epidemia debieron registrarse

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 340 \text{ casos}$$

por lo que faltaron $340 - 213 = 127$ casos de infección del síndrome de Guillain-Barré para declararlo epidemia.

Rpta.: C

7. Un comerciante compra $(x^{\sqrt{x}})$ jarras a $\sqrt{x^3}$ soles cada una y $(5(m^2 - 3)^{(m^2 - 3)^3})$ platos a 5 soles cada uno, pagando 203 soles en total. Si la primera semana vendió $(\sqrt{x} + 2)^{\sqrt{x}}$ jarras y $(3 - m^2)^6$ platos, ¿cuántos productos entre jarras y platos tiene en su stock para vender durante la siguiente semana?. Considere que

$$(x^{-1})^{(x^{-1})^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}.$$

A) 5

B) 6

C) 12

D) 8

Solución:

$$(x^{-1})^{(x^{-1})^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \therefore x = 4$$

$$\text{Gasto: } (16)(8) + 5(m^2 - 3)^{(m^2 - 3)^3} \cdot (5) = 203 \Rightarrow (m^2 - 3)^{(m^2 - 3)^3} = 3$$

$$\Rightarrow (m^2 - 3)^{(m^2 - 3)^3} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3} \Rightarrow m^2 - 3 = \sqrt[3]{3} \Rightarrow m^2 = 3 + \sqrt[3]{3}$$

$$\text{Número de productos comprados: } \# \text{ jarras} + \# \text{ platos} = (4^2) + 5(3) = 31$$

$$\text{Número de productos vendidos: } \# \text{ jarras} + \# \text{ platos} = (4^2) + (-\sqrt[3]{3})^6 = 25$$

$$\text{Aun tiene en stock } 31 - 25 = 6 \text{ productos.}$$

Rpta.: B

8. Un caño llena un tanque de agua en A horas mientras que su tubo de desagüe situado en la base, vacía el tanque lleno en B horas. Determine el tiempo en que se llena dicho tanque vacío si se abren en simultáneo su caño y su tubo de desagüe, sabiendo que A y B son respectivamente las soluciones de $A^{3A-2} = 16$ y $B^{B^2-1} = 81^2$.

A) 6 horas

B) 7 horas

C) 10 horas

D) 8 horas

Solución:

$$A^{3A-2} = 16 \Rightarrow A^{3A-2} = 2^4 = (2)^{3(2)-2} \therefore A = 2$$

$$B^{B^2-1} = 81^2 \Rightarrow B^{B^2-1} = (3)^{4 \cdot 2} = (3)^8 = (3)^{(3)^2-1} \therefore B = 3$$

En 1 hora se llena $\frac{1}{2}$ del tanque de agua

En 1 hora se vacía $\frac{1}{3}$ del tanque de agua

Abiertos el caño y el desagüe a la vez, en 1 hora queda

lleno $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ del depósito.

Por lo tanto, abiertos el caño y el desagüe, el tanque de agua quedará lleno en 6 horas.

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si $M(x,y) = (10-n)x^{3-m}y^{n^2+1} - (3m+4)y^{m^2-p} + 4x^{5-n}$ es una expresión algebraica, cuya suma de coeficientes es 2, halle el menor valor de p para que dicha expresión sea racional fraccionaria tal que $\{m,n\} \subset \mathbb{Z}^+$ y $m > 1$.

A) -4 B) -3 C) 2 D) 4 E) 5

Solución:

$$1) M(x,y) = (10-n)x^{3-m}y^{n^2+1} - (3m+4)y^{m^2-p} + 4x^{5-n}$$

es una expresión algebraica racional fraccionaria con $\{m,n\} \subset \mathbb{Z}^+$ y $m > 1$, luego:

$$m \in \{2;3;4,\dots\}$$

$$n \in \{1;2;3;4,\dots\}$$

$$m^2 - p \in \mathbb{Z}$$

$$2) \text{ La suma de sus coeficientes es } (10-n) - (3m+4) + 4 = 2$$

$$8 = 3m + n \rightarrow m = 2 \text{ y } n = 2$$

Para que sea racional fraccionaria, $m^2 - p < 0$ y $m^2 - p \in \mathbb{Z}$

Es decir $4 - p < 0$ y $p \in \mathbb{Z}$

el menor valor de p para que se cumpla la condición es 5

Rpta.: E

2. Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $\left[(a^{-1})^{-1} + b^{-1} \right]^{-1} = \frac{b}{4}$, halle el valor de $(ab)^{-1}$.

A) 1/4 B) 1/3 C) 1/2 D) 1 E) 3

Solución:

$$1) \left[(a^{-1})^{-1} + b^{-1} \right]^{-1} = \frac{b}{4}$$

$$\left[a + \frac{1}{b} \right]^{-1} = \frac{b}{4}$$

$$\left[a + \frac{1}{b} \right] = \frac{4}{b}$$

$$a = \frac{3}{b}$$

$$ab = 3$$

$$2) (ab)^{-1} = 1/3$$

Rpta.: B

3. Si se sabe que $S(x,y) = 5tx^{\sqrt{16-t}} + x^{10-D}y^{100-D^2} + \left(\frac{2D-16}{3}\right)y^{\frac{t}{4}}$, es una expresión algebraica racional entera de tres términos con coeficientes positivos, sin término independiente y F es a C como 8 es a 5, halle el valor de $M = \frac{F.D}{C.t}$

- A) 1,3 B) 1,2 C) 3 D) 15 E) 10

Solución:

- 1) S es una expresión algebraica racional entera de tres términos.

$16-t \in \mathbb{Z}_0^+ \rightarrow t < 16 \wedge t > 0 \wedge t = 4$ además $\sqrt{16-t} \in \mathbb{Z}^+$ pues no tiene término independiente $\rightarrow t = 12$

$$2) 10-D > 0 \wedge 100-D^2 > 0 \wedge \frac{2D-16}{3} > 0$$

$$8 < D < 10 \rightarrow D = 9$$

$$3) M = \frac{F.D}{C.t} = \frac{8.9}{5.12} = 1,2$$

Rpta.: B

4. Actualmente José Luis tiene $(5n+3m+17)$ años y Juan Carlos $(2n+5m+13)$ años. ¿Cuántos años le lleva el mayor al menor? si m es la solución de la ecuación $5^{m+1} + 5^{m+2} + 5^{m+3} + 5^{m+4} = 19500$ y n es la solución de la ecuación $7^{2n-1} + 7^{2n-2} + 7^{2n-3} + 7^{2n-4} = 19600$.

- A) 6 B) 4 C) 8 D) 9 E) 10

Solución:

$$1) 5^{m+1} + 5^{m+2} + 5^{m+3} + 5^{m+4} = 19500$$

$$5^m (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) = 19500$$

$$5^m (780) = 19500$$

$$5^m = 25$$

$$m = 2$$

$$2) 7^{2n-1} + 7^{2n-2} + 7^{2n-3} + 7^{2n-4} = 19600$$

$$7^{2n} (7^{-1} + 7^{-2} + 7^{-3} + 7^{-4}) = 19600$$

$$7^{2n} \left(\frac{400}{7^4} \right) = 19600$$

$$7^{2n} = 49 (7^4) = 7^6 \rightarrow n = 3$$

$$3) \text{ José Luis tiene } (5n+3m+17) = 5(3)+3(2)+17 = 38 \text{ años}$$

$$\text{Juan Carlos } (2n+5m+13) = 2(3)+5(2)+13 = 29 \text{ años.}$$

Luego el mayor le lleva 9 años al menor

Rpta.: D

5. La edad de Roberto es $\overline{k(k+2)}$ años y la edad de su hijo Luis es $k^2 - 1$ años, donde

$k = \sqrt{x^{-1}}$ y x es tal que $x^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$. Halle la suma de las edades de Roberto y Luis dentro de 5 años.

A) 32

B) 40

C) 37

D) 41

E) 36

Solución:

$$1) x^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$x^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$2) \text{ Luego } k = \sqrt{x^{-1}} = 2$$

La edad de Roberto es $\overline{k(k+2)} = 24$ años y la edad de su hijo Luis es $k^2 - 1 = 3$ años. Dentro de 5 años tendrán 29 y 8 años respectivamente. Su suma es 37.

Rpta.: C

6. El precio de una cartera en soles está dado por “102,00+T” soles, donde $T = \sqrt{x}\sqrt{x} + \sqrt[8]{x}\sqrt[8]{16x} + \sqrt[6]{x}\sqrt[6]{25x}$ con $\sqrt{x}\sqrt{x} = 8$. Determine cuánto pagó Gabriela por la cartera si le hicieron dos descuentos sucesivos de 5% y 10%.

A) S/94,05 B) S/119,70 C) S/128,25 D) S/120,00 E) S/152,00

Solución:

- 1) Como $\sqrt{x}\sqrt{x} = 8 \Rightarrow x\sqrt{x} = 64$

Entonces:

$$T = \sqrt{x}\sqrt{x} + \sqrt[8]{x}\sqrt[8]{16x} + \sqrt[6]{x}\sqrt[6]{25x}$$

$$T = \sqrt{64} + \sqrt[8]{x^4\sqrt{x}} + \sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}$$

$$T = 8 + \sqrt{64} + \sqrt[6]{64^5}$$

$$T = 8 + 8 + 32 = 48$$

- 2) Luego el precio de la cartera es de S/150,00

Al aplicarle dos descuentos sucesivos paga $95\%(90\%)(150,00) = S/128,25$

Rpta.: C

7. Halle el valor de M, si $M = \left[\left(\frac{2}{7^x} - 6 \right)^x + 2 \right]^x$ y “x” es la solución de $3^x = 7$.

A) 7 B) 9 C) 27 D) 49 E) 81

Solución:

- 1) Reemplazamos 7 por 3^x en M:

$$M = \left[\left(\frac{2}{(3^x)^x} - 6 \right)^x + 2 \right]^x$$

$$= \left[(3^2 - 6)^x + 2 \right]^x$$

$$= [3^x + 2]^x$$

$$= 9^x = (3^x)^2$$

$$= 49$$

- 2) $M = 49$.

Rpta.: D

8. Una empresa de México ha logrado construir un súper árbol para purificar el aire circundante. La tecnología usada en el súper árbol, llamada BioUrban, es tan eficaz que equivale a un bosque de $(x^5 + x^3 + 130)$ árboles. Tomando en cuenta que dicho

súper árbol usará $\left[2 \left(\underbrace{x + x + \dots + x}_{3^4 \text{ veces}} \right) + 14 \right]$ litros de agua y "x" es la solución de:

$x^{4-x^{4-x^{4-x^{\dots}}}} = \sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}^{\dots}}}$, $x > 1$, halle el número de árboles que equivale a un súper árbol y la cantidad de agua que deberá usarse en él.

- A) 500 árboles y 400 litros de agua
C) 400 árboles y 500 litros de agua
E) 300 árboles y 400 litros de agua

- B) 470 árboles y 350 litros de agua
D) 350 árboles y 450 litros de agua

Solución:

1) Resolviendo $k = x^{4-x^{4-x^{4-x^{\dots}}}} = \sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}^{\dots}}}$

$$* k = \sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}^{\dots}}} \rightarrow k = \sqrt[3]{x^k} \rightarrow x = \sqrt[k]{k^3} \dots (1)$$

$$* k = x^{4-x^{4-x^{4-x^{\dots}}}} \rightarrow k = x^{4-k} \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2)

$$k = \left(\sqrt[k]{k^3} \right)^{4-k} \rightarrow k = 3$$

En (1) $x = 3$

- 2) $\therefore$ El súper árbol equivale a $3^5 + 3^3 + 130 = 400$ árboles
el súper árbol necesita de $2 \left[3 \cdot (3^4) \right] + 14 = 500$ litros de agua

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle el número de expresiones algebraicas racionales enteras de tres términos de la forma $R(x,y) = x^{2m-n}y^2 + 2(n-2m)x^ny^{2-m} + 5n$
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Solución:

$$1) R(x,y) = x^{2m-n}y^2 + 2(n-2m)x^ny^{2-m} + 5n$$

es una expresión algebraica racional entera, se tiene:

$$2m-n \in \mathbb{Z}_0^+; 2-m \in \mathbb{Z}_0^+; n \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$m \in \mathbb{Z}$$

$$2m \geq n; m \leq 2$$

$$4 \geq 2m \geq n \geq 0 \rightarrow (m=2 \wedge n \in \{0;1;2\}) \vee (m=1 \wedge n \in \{0;1\}) \vee (m=0 \wedge n=0)$$

2) Por otro lado si tiene 3 términos, $n \neq 2m$; $n \neq 0$

$$(m=2 \wedge n \in \{1;2;3\}) \vee (m=1 \wedge n=1)$$

3) Luego existen 4 expresiones algebraicas racionales enteras con tres términos de la forma dada

Rpta.: D

2. Si $\sqrt[12]{\frac{10\sqrt{5^{n^2-2}+5^{n^2-3}+5^{n^2-4}}}{5^{n+3}+5^{n+4}+5^{n+5}}} = \sqrt[3]{25^4\sqrt[4]{625^5\sqrt[5]{25\sqrt{5}}}}$, halle la mayor suma de las cifras de n^2 .

A) 9

B) 8

C) 5

D) 4

E) 3

Solución:

$$1) \sqrt[3]{25^4\sqrt[4]{625^5\sqrt[5]{25\sqrt{5}}}} = \sqrt[3]{5^{24}\sqrt[4]{5^4\sqrt[5]{5^2\sqrt{5}}}} = 5^{\frac{125}{120}} = 5^{\frac{25}{24}}$$

$$2) \sqrt[12]{\frac{10\sqrt{5^{n^2-2}+5^{n^2-3}+5^{n^2-4}}}{5^{n+3}+5^{n+4}+5^{n+5}}} = \sqrt[120]{\frac{5^{n^2-2}+5^{n^2-3}+5^{n^2-4}}{5^{n+3}+5^{n+4}+5^{n+5}}} = \sqrt[120]{\frac{5^{n^2-4}(5^2+5+1)}{5^{n+3}(1+5+5^2)}}$$

$$\sqrt[120]{\frac{5^{n^2-4}}{5^{n+3}}} = \sqrt[120]{5^{n^2-n-7}}$$

$$3) 5^{\frac{n^2-n-7}{120}} = 5^{\frac{25}{24}}$$

$$\frac{n^2-n-7}{120} = \frac{25}{24}$$

$$n^2-n-7=125$$

$$n^2-n-132=0$$

$$n-12=0$$

$$n+11=0$$

$$n=12 \vee n=-11$$

4) $n^2 = 144 \vee n^2 = 121$, la mayor suma de cifras de n^2 es 9

Rpta.: A

3. En una granja en la que solo se crían patas y gallinas, la producción mensual de huevos (en miles) el año 2018 forma una progresión geométrica, cuya razón es igual a la cantidad de miles de huevos que se produjeron el primer mes. En enero del 2018 se produjo x y $(2x)$ miles de huevos de patas y gallinas respectivamente. Si en el x^{x-1} mes de dicho año se produjo $\sqrt[5]{243}^{18}$ miles de huevos. Halle la producción de huevos el primer mes.

A) 3000 huevos
D) 12000 huevos

B) 6000 huevos
E) 15000 huevos

C) 9000 huevos

Solución:

- 1) De los datos del problema:

La producción en enero del 2018 es $3x$ miles de huevos, luego en el mes n produce: $(3x)^n$ miles de huevos

- 2) En el x^{x-1} mes produce $(3x)^{x^{x-1}} = \sqrt[5]{243}^{18}$ miles de huevos

$$(3x)^{x^{x-1}} = 9^9 = (3(3))^{3^{3-1}}$$

Luego un valor para x es 3

- 3) La producción en enero del 2018 es $3(3) = 9$ miles de huevos

Rpta.: C

4. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $\frac{1}{4^{2x_0} + 4} - \frac{1}{8} = \frac{4^{x_0} - 2}{2^{4x_0+1} + 8}$, halle el valor de $x_0^2 + 1$

A) 10/9

B) 7/4

C) 5/4

D) 2

E) 5

Solución:

- 1) Como $x_0 \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $\frac{1}{4^{2x_0} + 4} - \frac{1}{8} = \frac{4^{x_0} - 2}{2^{4x_0+1} + 8}$

$$\frac{1}{2^{4x_0} + 4} - \frac{1}{8} = \frac{2^{2x_0} - 2}{2^{4x_0+1} + 8}$$

$$\frac{8 - 2^{4x_0} - 4}{2^{4x_0+3} + 2^5} = \frac{2^{2x_0} - 2}{2^{4x_0+1} + 8}$$

$$\frac{4 - 2^{4x_0}}{2^{4x_0+2} + 2^4} = \frac{2^{2x_0} - 2}{2^{4x_0} + 2^2}$$

$$4 - 2^{4x_0} = (2^{2x_0} - 2)2^2$$

$$0 = 2^{4x_0} + 4(2^{2x_0}) - 12$$

$$0 = 2^{2x_0} + 6$$

$$0 = 2^{2x_0} - 2$$

$$2^{2x_0} = 2$$

$$2x_0 = 1$$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

twitter.com/calapenshko

$$2) \quad x_0^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$$



5. Si $x^{x^3} = 3$ y $\left(x^{x^{-3}}\right)^{x^a x^{-3}} = 3$, halle el valor de a^{a-6} .

A) 729 B) 81 C) 1/27 D) 1/81 E) 9

Solución:

$$1) \quad \left(x^{x^{-3}}\right)^{x^a x^{-3}} = 3 = x^{x^3} \rightarrow x^{x^{-3}(x^{a-3})} = x^{x^3} \rightarrow x^{-3}(x^{a-3}) = x^3$$

$$x^{a-6} = x^3 \rightarrow a-6=3 \rightarrow a=9$$

$$2) \quad a^{a-6} = 9^3 = 729$$

Rpta.: A

6. La castaña amazónica es el fruto de un árbol longevo (de hasta 50 metros de alto), que crece en la frontera entre Brasil, Bolivia y Perú. En nuestro país se siembra en Puerto Maldonado (Madre de Dios). Un árbol de castaña tarda desde $\left(\frac{x}{3^2} + 1\right)$ años hasta $\left(4^{\frac{x}{2}} - 1\right)$ años en dar frutos. Si los años que alcanza su mayor productividad viene dado por la suma del mayor y menor cantidad de años que tarda en dar sus frutos. Halle la cantidad de años que debe transcurrir para que un árbol de castaña alcance su mayor productividad. Sabiendo que x satisface: $x^{-x^{-x}} = 128\sqrt{\frac{1}{2}}$.

A) 20 años B) 7 años C) 25 años D) 91 años E) 30 años

Solución:

$$1) \quad x^{-x^{-x}} = 128\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x^{-x^{-x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{128} = \left(\frac{1}{4}\right)^{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^4} = 4^{-4^{-4}}$$

$$\Rightarrow x = 4$$

- 2) Un árbol de castaña tarda como mínimo $3^2 + 1 = 10$ años y como máximo $4^2 - 1 = 15$ años en dar sus frutos, por lo tanto el árbol de castaña alcanza su mayor productividad a los $10 + 15 = 25$ años.

Rpta.: C

7. El número de hijos que tienen Gregorio y Martha es el valor de t^4 ; donde

$$\left(\sqrt[3]{t^2 \sqrt{\frac{27^2}{4}}}\right)^{\frac{t^3}{3}} = \left(2^{\frac{8}{\sqrt[3]{64}}}\right)^{\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad \text{¿Cuántos hijos tiene la pareja conformada por Gregorio y Martha?}$$

A) 1 hijo B) 2 hijos C) 3 hijos D) 4 hijos E) 6 hijos

Solución:

$$1) \left(\sqrt[3]{t^2} \sqrt{\frac{27^2}{4}} \right)^{\frac{t^3}{3}} = \left(2^{\frac{8}{3}} \sqrt[3]{64} \right) \left(\frac{9}{16} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\left(\frac{2}{t^3} \right)^{\frac{27}{2}} \right)^{\frac{t^3}{3}} = \left(2^{\frac{3}{4}} \right)^{\left(\frac{3}{4} \right)}$$

$$\left(t^9 \right)^{\frac{t^3}{3}} = 2^{\left(\frac{3}{2^4} \right) \left(\frac{3}{4} \right)} = \left(2^{\frac{3}{4}} \right)^{\left(\frac{3}{2^4} \right)}$$

$$\left(t^3 \right)^{t^3} = \left(2^{\frac{3}{4}} \right)^{\left(\frac{3}{2^4} \right)}$$

$$t^3 = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$t = 2^{\frac{1}{4}}$$

2) Luego $t^4 = 2$, la pareja conformada por Gregorio y Martha tiene 2 hijos

Rpta.: B

8. Si se venden 30 formularios de álgebra y 50 formularios de aritmética a un precio unitario de p_1 soles y p_2 soles respectivamente, donde $x^{-1} = p_1 \sqrt{M}^{p_2+1}$. Si el costo unitario de cada formulario es $M-1$ soles, determine la utilidad, sabiendo que x cumple la siguiente ecuación

$$\sqrt[5]{3}^2 \cdot \sqrt[5]{3}^{16} = \left(\frac{1}{x} \right) \left(\sqrt[4]{2} x \right)^{-4}, x \neq 0$$

- A) 44 soles B) 80 soles C) 140 soles D) 160 soles E) 300 soles

Solución:

$$1) \quad 5\sqrt{3}^2 \cdot 5\sqrt{3}^{16} = \left(\frac{1}{x}\right) \left(4\sqrt{2}x\right)^{-4}, x \neq 0$$

$$5\sqrt{3}^2 \cdot 5\sqrt{3}^{16} = \left(\frac{1}{x}\right) \left(4\sqrt{2}x\right)^{-4}, x \neq 0$$

$$5\sqrt{3}^{8(2)} \cdot 5\sqrt{3}^{16} = \left(\frac{1}{x}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$5\sqrt{3}^{16} \cdot 5\sqrt{3}^{16} = \left(\frac{1}{x}\right)^4 \left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$5\sqrt{3}^{16} = \left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$2) \quad 3^{\frac{4}{5}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = 5\sqrt{3}^4 = p_1 \sqrt{M}^{p_2+1}$$

$$p_1 = 5, p_2 = 3 \text{ y } M = 3$$

$$3) \text{ Utilidad} = \text{ingreso} - \text{costo total}$$

$$\text{Utilidad} = 30(5) + 50(3) - 80(2) = 300 - 160 = 140$$

Rpta.: C

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si $S(x,y) = nx^n - (3-n)x^{7-n}y^{m-n-1} + (n-2)x^{\frac{n}{2}} + (n-4)y^{7-m}$ es una expresión algebraica racional entera de 4 términos, halle el valor de $m+n$.
- A) 6 B) 8 C) 11 D) 13 E) 14

Solución:

1) Como $S(x,y) = nx^n - (3-n)x^{7-n}y^{m-n-1} + (n-2)x^{\frac{n}{2}} + (n-4)y^{7-m}$ es una expresión algebraica racional entera de 4 términos

$$n \in \mathbb{Z}^+; n \neq 3; n \leq 7; m \geq n+1; \frac{n}{2} \in \mathbb{Z}^+; n \neq 2; n \neq 4; m \leq 7$$

$$n = 6; m = 7$$

2) el valor de $m+n = 7+6 = 13$

Rpta.: D

2. Ingrid sale de paseo con destino a Tarapoto a las 7 pm del día sábado. Ella puede llegar en $H = 18 \left(\frac{10! \sqrt{B}}{-3^{3^{10}}(A)} \right)$ horas. Donde $A = \left((m-1)^{k^{-3^5}} \right)^{k^{3^5}} - \left((m)^{R^{-4^7}} \right)^{R^{4^7}}$ y $B = \left(\dots \left((3^3)^6 \right)^9 \dots \right)^{30}$. ¿Cuándo y a qué hora llega a esta hermosa ciudad?
- A) Domingo 7 a.m. B) Domingo 1 p.m. C) Sábado 11 p.m.
D) Lunes 7 a.m. E) Lunes 1 a.m.

Solución:

1) Calculando el valor de A:

$$A = \left((m-1)^{k^{-3^5}} \right)^{k^{3^5}} - \left((m)^{R^{-4^7}} \right)^{R^{4^7}} = (m-1)^{k^{-3^5} \cdot k^{3^5}} - (m)^{R^{-4^7} \cdot R^{4^7}}$$

$$A = (m-1)^{k^{-3^5+3^5}} - (m)^{R^{-4^7+4^7}} = (m-1)^{k^0} - (m)^{R^0}$$

$$A = m - 1 - m = -1$$

$$A = -1$$

2) Calculando el valor de B:

$$B = \left(\dots \left((3^3)^6 \right)^9 \dots \right)^{30} = \left(\dots \left((3^{3 \cdot 1})^{3 \cdot 2} \right)^{3 \cdot 3} \dots \right)^{3 \cdot 10}$$

$$B = 3^{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \dots 3 \cdot 10} = 3^{3^{10} \cdot 10!}$$

3) Calculando el valor de H:

$$H = 18 \left(\frac{10! \sqrt{B}}{-3^{3^{10}} (A)} \right) = 18 \left(\frac{10! \sqrt{3^{3^{10} \cdot 10!}}}{-3^{3^{10}} (-1)} \right)$$

$$H = 18 \left(\frac{3^{\frac{3^{10} \cdot 10!}{10!}}}{3^{3^{10}}} \right) = 18 \left(\frac{3^{3^{10}}}{3^{3^{10}}} \right)$$

$$H = 18$$

4) Ingrid demora 18 horas en llegar a Tarapoto, llega el domingo a la 1 p.m.

Rpta.: B

3. El precio de un cuaderno en una librería es M soles, donde $M = \sqrt[5]{a}$. Si $a = 6^{\frac{6^6 - a}{a}}$, ¿cuál es el precio de 5 cuadernos?

A) S/ 25 B) S/ 30 C) S/ 32 D) S/ 36 E) S/ 40

Solución:

1) Calculando el valor de a:

$$a = 6^{\frac{6^6 - a}{a}}$$

$$a^a = \frac{6^{6^6}}{6^a}$$

$$(6a)^a = 6^{6^6}$$

$$(6a)^{6a} = 6^{6^6 \cdot 6} = (6^6)^{6^6}$$

$$a = 6^5$$

2) El precio de cada cuaderno M es:

$$M = \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{6^5} = 6 \text{ soles}$$

3) Luego 5 cuadernos cuestan 30 soles

Rpta.: B

4. Jesús compró M licuadoras por el día de las madres donde

$M = \sqrt[5]{y} \sqrt[5]{1+\sqrt[5]{y}} \sqrt[5]{4\sqrt[5]{y^2}} \sqrt[5]{y} \sqrt[5]{1+\sqrt[5]{y}} \sqrt[5]{4\sqrt[5]{y^2}}$. Si el precio de cada licuadora es de S/ 450, ¿cuánto pagó en total por su compra?

- A) S/ 1800 B) S/ 1050 C) S/ 2250 D) S/ 100 E) S/ 450

Solución:

1) Calculando el valor de M:

$$M = \sqrt[5]{y} \sqrt[5]{1+\sqrt[5]{y}} \sqrt[5]{4\sqrt[5]{y^2}} \sqrt[5]{y} \sqrt[5]{1+\sqrt[5]{y}} \sqrt[5]{4\sqrt[5]{y^2}} = \sqrt[5]{y} \sqrt[5]{1+\sqrt[5]{y}} \sqrt[5]{4\sqrt[5]{y^2}} \sqrt[5]{y} \sqrt[5]{1+\sqrt[5]{y}} \sqrt[5]{4\sqrt[5]{y^2}}$$

$$M = 4 \frac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y}(1+\sqrt[5]{y})} 4 \frac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y} \cdot \sqrt[5]{y}(1+\sqrt[5]{y})} = 4 \frac{\sqrt[5]{y}}{1+\sqrt[5]{y}} 4 \frac{1}{1+\sqrt[5]{y}}$$

$$M = 4 \frac{\frac{\sqrt[5]{y}}{1+\sqrt[5]{y}} + \frac{1}{1+\sqrt[5]{y}}}{1+\sqrt[5]{y}}$$

$$M = 4 \frac{\sqrt[5]{y}+1}{1+\sqrt[5]{y}}$$

$$M = 4$$

2) Compra 4 licuadoras, como cada una costó S/ 450 pagará un total de S/ 1800

Rpta.: A

5. Luego de reducir $T = \frac{5(2^{x+2}) + 6(2^{x-1}) - 2(2^{x+3})}{4(2^{x+3}) - 30(2^{x-1}) - 2(2^{x+3})}$. Halle el costo de pintar el

contorno de una plaza cuyo perímetro es $(2^{(2T-8)} - 4)$ metros, si el pago por metro lineal es S/ 2,5.

- A) S/ 120 B) S/ 120,5 C) S/ 130 D) S/ 150 E) S/ 150,5

Solución:

1) Calculando el valor de T:

$$T = \frac{5(2^{x+2}) + 6(2^{x-1}) - 2(2^{x+3})}{4(2^{x+3}) - 30(2^{x-1}) - 2(2^{x+3})} = \frac{20(2^x) + 3(2^x) - 16(2^x)}{32(2^x) - 15(2^x) - 16(2^x)}$$

$$T = \frac{7(2^x)}{(2^x)} = 7$$

2) Calculando el perímetro $(2^{(2T-8)} - 4)$:

$$(2^{(2(7)-8)} - 4) = 60$$

3) 60 metros a S/ 2,5 el metro lineal, el costo de pintar el contorno de la plaza es S/150

Rpta.: D6. Si $\frac{5P-3}{15}$ es la probabilidad de que ocurra un evento, ¿cuál es la probabilidad deque no ocurra dicho evento?. Considere $P = \frac{\sqrt[4]{7+5\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20\ldots+\infty}}}}}{(0,5)^{-0,25} + \sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\ldots+\infty}}}}$.

A) 1 B) 2/15 C) 1/5 D) 13/15 E) 0

Solución:

1) Calculando el valor de P:

$$A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20\ldots+\infty}}}$$

$$A^2 - 20 = A$$

$$A = 5$$

$$B = \sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\ldots+\infty}}}$$

$$B^5 = 2B$$

$$B = \sqrt[4]{2}$$

$$P = \frac{\sqrt[4]{7+5(5)}}{(0,5)^{-0,25} + \sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{32}}{2\sqrt[4]{2}} = 1$$

$$P = 1$$

2) $\frac{5P-3}{15} = \frac{2}{15}$, la probabilidad de que no ocurra dicho evento es $1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$ **Rpta.: D**

7. Milagros va a calcular el promedio final que obtuvo en el curso de Matemática I, sus notas parciales se presentan en la siguiente tabla:

	Nota
Examen parcial	$\overline{1a}$
Examen final	$\overline{1b}$
Promedio de práctica	$\overline{1(a-b)} - 1$

Si $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ verifican $\frac{a^2 - a + b^2 - 2b}{3a + 2b - 20} = \frac{1}{5^{-5^0}}$, además el promedio final se obtiene del promedio aritmético de las tres notas presentadas. ¿Cuántos puntos le faltan en el promedio final a Milagros para conseguir la nota máxima 20?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Solución:

1) Calculando el valor de a y b:

$$\frac{a^2 - a + b^2 - 2b}{3a + 2b - 20} = 5$$

$$a^2 - 16a + b^2 - 12b + 100 = 0$$

$$a^2 - 16a + 64 + b^2 - 12b + 36 = 0$$

$$(a - 8)^2 + (b - 6)^2 = 0$$

$$a = 8; b = 6$$

2) El promedio final es $\frac{18 + 16 + 11}{3} = 15$

3) Le faltaron 5 puntos para la nota máxima

Rpta.: E

8. El sismo de Chincha y Pisco en el año 2007 del 15 de agosto a las 18:40 horas, fue uno de los terremotos más violentos ocurridos en el Perú en los últimos años liberando una energía aproximada de $10^{23,6}$ ergios. Si la siguiente ecuación relaciona la energía en ergios (E) liberada por un terremoto y la magnitud (M) en la escala de Richter: $E = 10^{11,8} \sqrt[5]{\sqrt{10}^{15M}}$. Determine la magnitud del sismo de Chincha y Pisco del año 2007 en la escala de Richter. (Redondee a una cifra decimal)

- A) 7,5 B) 7,6 C) 7,7 D) 7,8 E) 7,9

Solución:

$$1) E = 10^{11,8} \sqrt[5]{\sqrt{10}^{15M}} = 10^{23,6}$$

$$E = \sqrt[10]{10^{15M}} = 10^{11,8}$$

$$10^{1,5M} = 10^{11,8}$$

$$1,5M = 11,8$$

$$M = 7,9$$

- 2) La magnitud del sismo de Chíncha y Pisco del año 2007 fue 7,9 en la escala de Richter

Rpta.: E

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La edad de Juan es igual al número de expresiones algebraicas racionales enteras de la forma $T(x,y) = x^{2a-b}y^{3a-5} - 2x^{b-a}y^{5-a}$. ¿Cuántos años faltan para que Juan cumpla 28 años?

A) 4 años B) 16 años C) 9 años D) 10 años E) 5 años

Solución:

- 1) Calculando el número de expresiones algebraicas racionales enteras de la forma

$$T(x,y) = x^{2a-b}y^{3a-5} - 2x^{b-a}y^{5-a}$$

Se cumple:

$$a \in \mathbb{Z}; 2a \geq b; a \geq \frac{5}{3}; a \leq 5; b \geq a; b \in \mathbb{Z}$$

$$a = 5; 5 \leq b \leq 10 \rightarrow \text{número E.A} = 6$$

$$a = 4; 4 \leq b \leq 8 \rightarrow \text{número E.A} = 5$$

$$a = 3; 3 \leq b \leq 6 \rightarrow \text{número E.A} = 4$$

$$a = 2; 2 \leq b \leq 4 \rightarrow \text{número E.A} = 3$$

- 2) Existen en total 18 expresiones algebraicas racionales enteras
3) Para cumplir 28 años le faltan 10 años

Rpta.: D

2. El inverso de la solución positiva de la ecuación $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, más uno es la edad de Denisse. Si estudia la maestría y el doctorado en la especialidad de odontopediatría durante los próximos cinco años. ¿Cuál será la edad de Denisse cuando termine su doctorado?

A) 28 años B) 31 años C) 32 años D) 33 años E) 35 años

Solución:

1) Calculando el valor de x:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{27}$$

2) Calculando la edad de Denisse cuando termine su doctorado:

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-1} + 1 = 28$$

Ella tiene 28 años, tendrá 33 años luego de terminar su doctorado

Rpta.: D

3. En una batalla murieron la quinta parte de los soldados de una compañía, menos $(30m + 2n - 2)$, quedan heridos la sexta parte más $(15m + n + 1)$, y salieron ilesos $\left(\frac{25}{2}m^2n - 13\right)$. Donde m es la solución de la ecuación exponencial

$$\sqrt{y^{m-1}} \sqrt[3]{y^{2m+1}} \sqrt[4]{y^{2-3m}} = 1; y > 0 \quad y \quad n = \left(10t - 6\sqrt{5t+1}\sqrt[4]{4}\sqrt[5]{2t-1}\right)^{8(25t^2-1)}.$$

¿Cuántos soldados formaban la compañía?

- A) 100 B) 120 C) 140 D) 150 E) 180

Solución:

1) Calculando el valor de m:

$$\sqrt{y^{m-1}} \sqrt[3]{y^{2m+1}} \sqrt[4]{y^{2-3m}} = 1; y > 0$$

$$y^{\frac{m-1}{2}} y^{\frac{2m+1}{3}} y^{\frac{2-3m}{4}} = 1$$

$$y^{\frac{m-1}{2} + \frac{2m+1}{3} + \frac{2-3m}{4}} = 1$$

$$y^{\frac{6m-6+8m+4+6-9m}{12}} = 1$$

$$5m + 4 = 0$$

$$m = -\frac{4}{5}$$

2) Calculando el valor de n:

$$n = \left(\frac{10t-6}{\sqrt{5t+1}} \cdot \frac{4}{\sqrt{5t-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{8(25t^2-1)} = \left(\frac{(10t-6)(5t+1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(10t-6)(5t-1)}{\sqrt{2}} \right)^{8(25t^2-1)}$$

$$n = \left(2^{\frac{2}{(10t-6)(5t+1)}} \cdot 2^{\frac{-1}{(10t-6)(5t-1)}} \right)^{8(25t^2-1)} = \left(2^{\frac{2}{(10t-6)(5t+1)} - \frac{1}{(10t-6)(5t-1)}} \right)^{8(25t^2-1)}$$

$$n = \left(2^{\frac{10t-2-(5t+1)}{(10t-6)(5t+1)(5t-1)}} \right)^{8(25t^2-1)} = \left(2^{\frac{5t-3}{(10t-6)(5t+1)(5t-1)}} \right)^{8(25t^2-1)}$$

$$n = 2^4$$

$$n = 16$$

$$3) \quad \frac{x}{5} - 6 + \frac{x}{6} + 5 + 115 = x$$

$$\frac{11x}{30} = x - 114$$

$$x = 180$$

4) La compañía estaba formada por 180 soldados

Rpta.: E

4. Sea $D = \left[\frac{\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2^{n+1}} \cdot 4 \sqrt{4^{n+1}}}}{\sqrt{2^n} \cdot 2}} \right]^{12}$ la diferencia de una sustracción. Determine la suma de cifras del minuendo, si el sustraendo es igual a 18.

A) 5

B) 7

C) 8

D) 10

E) 11

Solución:

1) Calculando el valor de D:

$$D = \left[\frac{\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2^{n+1}} \cdot 4 \sqrt{4^{n+1}}}}{\sqrt{2^n} \cdot 2}} \right]^{12} = \left[\frac{\sqrt[n]{\frac{2^{\frac{n+1}{2}} \cdot 4 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot 2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot 2} \right]^{12}$$

$$D = \left[\frac{\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^{\frac{n}{2}+1}}}}{2^{\frac{n}{2}+1}} \right]^{12} = \left[\sqrt[n]{2^{\frac{n}{2}}} \right]^{12} = 2^6 = 64$$

2) Como Minuendo – sustraendo = diferencia:

$$\text{Minuendo} - 18 = 64$$

$$\text{Minuendo} = 82$$

3) La suma de cifras del minuendo es $8 + 2 = 10$

Rpta.: D

5. Francesca rindió un simulacro organizado por el CEPREUNMSM obteniendo $\overline{a(a-2)0}$ puntos. Si ella postula a Ingeniería Industrial y el puntaje aprobatorio es $\overline{(a+2)(a-5)0}$ puntos, donde “a” es la suma de cifras del valor de n^2 y “n” es el valor que satisface $\sqrt[n-2]{\frac{2^{n+4} + 2^{n+8} + 2^{n+12}}{4^{n-2} + 4^{n-4} + 4^{n-6}}} = 64$. ¿Cuántos puntos le faltaron a Francesca para aprobar el simulacro?

A) 150 puntos
D) 180 puntos

B) 160 puntos
E) 190 puntos

C) 170 puntos

Solución:

- 1) Calculando el valor de n:

$$2^{n+4} + 2^{n+8} + 2^{n+12} = 64^{n-2} (4^{n-2} + 4^{n-4} + 4^{n-6})$$

$$2^{n+4} (1 + 2^4 + 2^8) = 4^{3n-6+n-6} (4^4 + 4^2 + 1)$$

$$2^{n+4} = 2^{8n-24}$$

$$n = 4$$

- 2) Luego $a = 7$

El puntaje obtenido por Francesca $\overline{a(a-2)0} = 750$

puntaje aprobatorio es $\overline{(a+2)(a-5)0} = 920$

- 3) Le faltaron 170 puntos para aprobar el examen

Rpta.: C

6. Si m y n con $m > n$ son soluciones de $4^a - 2^a = 2^{a+2} - 4$, halle el valor de m^{-n-m^n} .

A) 0,25

B) 1

C) 0,75

D) 0,5

E) 0,2

Solución:

- 1) Transformando la expresión:

$$4^a - 2^a = 2^{a+2} - 4$$

$$2^{2a} - 5 \cdot 2^a + 4 = 0$$

$$(2^a - 1)(2^a - 4) = 0$$

$$2^a = 1 \vee 2^a = 4$$

$$a = 0 \vee a = 2$$

$$m = 2, n = 0$$

$$2) m^{-n-m^n} = 2^{-0-2^0} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Rpta.: D

7. Si el exponente final de x en $R = \sqrt{x^3 \sqrt{x^2 \sqrt{x^3 \sqrt{x^4}}}}$ es tal que disminuido en $\frac{33}{40}$ da como resultado una fracción irreducible de la forma $\frac{1}{k}$, determine el valor de k .
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Solución:

1) Calculando el valor de R :

$$R = \sqrt{x^3 \sqrt{x^2 \sqrt{x^3 \sqrt{x^4}}}} = x^{\frac{((1 \times 3 + 2) \times 4 + 3) \times 5 + 4}{2 \times 3 \times 4 \times 5}} = x^{\frac{119}{120}}$$

2) Calculando el valor de k :

$$\frac{119}{120} - \frac{33}{40} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

3) $k = 6$

Rpta.: E

8. El número de habitantes de un pueblo desde el año 2002 se puede calcular mediante $P = 150(\sqrt{5})^{\frac{x}{4}}$ donde x representa el número de años transcurridos desde 2002. Determine en qué año la población de dicho pueblo será de 3750 habitantes.
- A) 2010 B) 2014 C) 2018 D) 2020 E) 2024

Solución:

$$1) P = 150(\sqrt{5})^{\frac{x}{4}} = 3750$$

$$(\sqrt{5})^{\frac{x}{4}} = 25$$

$$5^{\frac{x}{8}} = 5^2$$

$$x = 16$$

2) Como deben transcurrir 16 años desde 2002, el año que el número de habitantes de dicho pueblo será de 3750 es el 2018

Rpta.: C

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

twitter.com/calapenshko

02

semana

CALA
PENSHKO



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

NÚMEROS REALES, RADICALES DOBLES, RACIONALIZACIÓN

LOS NÚMEROS REALES

Antes de mencionar a los números reales, veamos las siguientes definiciones:

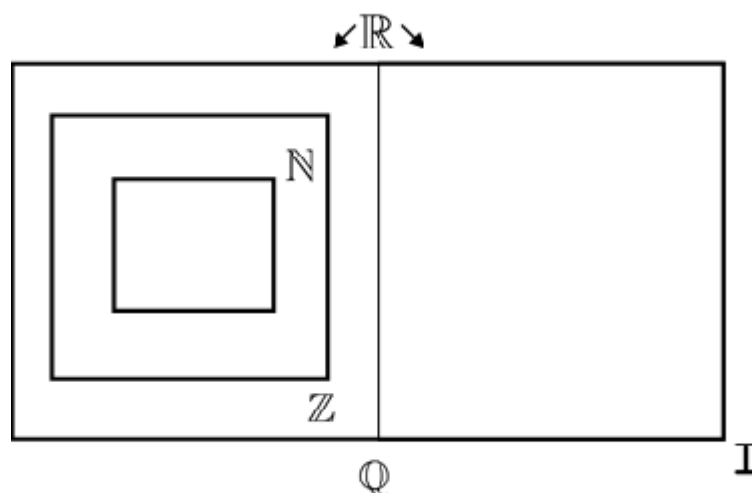
- * El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$
- * El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$
- * El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} / \{m, n\} \subset \mathbb{Z}; n \neq 0 \right\}$
- * El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I} = \{p / p \text{ no puede ser expresado como una fracción}\}$

Es decir, los números irracionales son aquellos que se escriben mediante una expresión decimal con infinitas cifras y no periódicas, como por ejemplo los siguientes números:

- $\sqrt{2} = 1,4142135623\dots$
- $e = 2,71828182284\dots$ (**Número de Euler**)
- $\pi = 3,141592654\dots$

Definición: El conjunto de los números reales (denotado por $\mathbb{R}$) es definido como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

De las definiciones anteriores, se tiene el siguiente esquema:



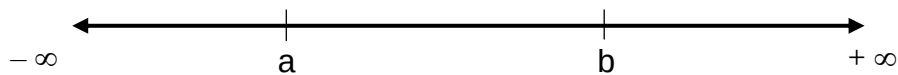
- El conjunto de los números reales está provisto de dos operaciones: adición y multiplicación, y una relación de orden " $<$ " que se lee "menor que", esta relación de orden tiene las siguientes propiedades:

- i) Si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c \quad \forall \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ (Transitividad)
- ii) Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$
- iii) Si $(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow ac < bc$

RECTA REAL

Los números reales se representan geoméricamente en una recta, llamada “recta real”. Esta representación se basa en que a cada punto de la recta le corresponde un único número real, y recíprocamente.

Nota: Geométricamente $a < b$ significa que sobre la recta real “a” se encuentra a la izquierda de “b”.



DESIGUALDAD

Es una expresión que indica que un número es mayor o menor que otro.

Definiciones:

- i) $a \leq b \Leftrightarrow (a = b \vee a < b)$
- ii) $a \geq b \Leftrightarrow (a = b \vee a > b)$

Propiedades:

- $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
- Si $ac = bc \wedge c \neq 0 \Rightarrow a = b$
- $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$
- $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$
- $a < b \Leftrightarrow -a > -b$
- $a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc$
- $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$
- $a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$
- Si $0 \leq a < b \wedge 0 \leq c < d \Rightarrow ac < bd$
- Si a y b son números reales con el mismo signo tal que $a < b$, entonces $a^{-1} > b^{-1}$.

11. $ab > 0 \Leftrightarrow [(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)]$
12. $ab < 0 \Leftrightarrow [(a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)]$
13. “La media geométrica (MG) de dos números reales positivos no es mayor que la media aritmética (MA) de los mismos números positivos”. Simbólicamente se tiene:
Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
14. $\forall a \in \mathbb{R}^+, a + \frac{1}{a} \geq 2$
15. $\forall a \in \mathbb{R}^-, a + \frac{1}{a} \leq -2$
16. Sean $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}^+ / \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$
17. $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$
18. $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$
19. Si $b \geq 0$, entonces $a^2 > b \Leftrightarrow a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}$
20. Si $b > 0$, entonces $a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$
21. i) Si $a > 0; b > 0 \wedge a < x < b \rightarrow a^2 < x^2 < b^2$
 ii) Si $a < 0; b < 0 \wedge a < x < b \rightarrow a^2 > x^2 > b^2$
 iii) Si $a < 0; b > 0 \wedge a < x < b \rightarrow 0 \leq x^2 < \max\{a^2, b^2\}$
 iv) Si $0 < a < b \wedge 0 < c < d \rightarrow 0 < \frac{a}{d} < \frac{b}{c}$

Ejemplo 1

Sean a, b, c y d números reales positivos. Si $a^2 + 4b^2 = 48$ y $c^2 + 9d^2 = 24$, halle el mayor valor de $(6ab + 9cd)$.

Solución

$$a, b, c \text{ y } d \in \mathbb{R}^+ : (a - 2b)^2 \geq 0 \text{ y } (c - 3d)^2 \geq 0$$

Desarrollando ambos binomios y sumando las desigualdades:

$$a^2 - 4ab + 4b^2 + c^2 - 6cd + 9d^2 \geq 0$$

$$a^2 + 4b^2 + c^2 + 9d^2 \geq 4ab + 6cd$$

$$48 + 24 \geq 4ab + 6cd$$

$$36 \geq 2ab + 3cd$$

$$108 \geq 6ab + 9cd$$

$\therefore$ Mayor Valor de $(6ab + 9cd)$ es 108.

INECUACIÓN

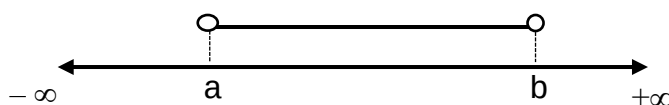
Es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que solo se verifican para determinados valores de la incógnita ó incógnitas.

INTERVALOS

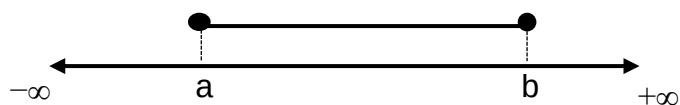
Son subconjuntos de los números reales que geoméricamente son segmentos de recta o semirrectas y cuyos elementos satisfacen cierta desigualdad. Los intervalos sirven para expresar el conjunto solución de las inecuaciones.

Intervalos finitos**i) Intervalo abierto**

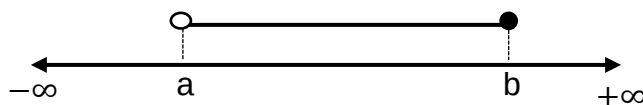
$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

**ii) Intervalo cerrado**

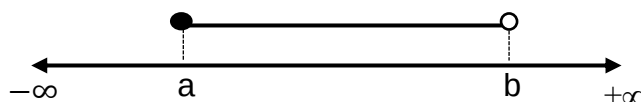
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

**iii) Intervalo semiabierto por la izquierda**

$$\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

**iv) Intervalo semiabierto por la derecha**

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

**Observación:**

Si $a = b$, entonces $\langle a; a \rangle = [a; a] = \langle a; a] = \emptyset$, pero $[a; a] = \{a\}$

Intervalos infinitos

$$\text{v) } \langle a, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$$

$$\text{vi) } [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$$

$$\text{vii) } \langle -\infty, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$$

$$\text{viii) } \langle -\infty, \infty \rangle = \mathbb{R}$$

Definición:

Si J es un intervalo de extremos a y b , con $a < b$, la longitud del intervalo J es $b - a$.

Ejemplo 2

Resuelve la siguiente inecuación: $(x - 5)^2 - 1 > 8$

Solución

Pasando -1 al miembro derecho $(x-5)^2 > 9$

Aplicando la propiedad 19: $x-5 > \sqrt{9} \vee x-5 < -\sqrt{9}$
 $x > 8 \vee x < 2$

$\therefore x \in \langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 8; +\infty \rangle$.

Ejemplo 3

Calcule la longitud, en unidades, del conjunto $J = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x < 16\}$

Solución

$$x^2 + 2x < 16 \rightarrow x^2 + 2x + 1 < 17 \rightarrow (x+1)^2 < 17 \rightarrow -\sqrt{17} - 1 < x < \sqrt{17} - 1$$

$$\rightarrow J = \langle -\sqrt{17} - 1; \sqrt{17} - 1 \rangle$$

$$\therefore \text{Longitud}(J) = (\sqrt{17} - 1) - (-\sqrt{17} - 1) = 2\sqrt{17} \text{ u.}$$

OPERACIONES CON INTERVALOS

Con los intervalos se puede realizar las mismas operaciones que realizamos entre conjuntos, como son unión, intersección, diferencia y/o complemento.

Siendo L y J intervalos, se tiene que

$$L \cap J = \{x \in \mathbb{R} / x \in L \wedge x \in J\} \quad ; \quad L \cup J = \{x \in \mathbb{R} / x \in L \vee x \in J\}$$

$$L - J = \{x \in \mathbb{R} / x \in L \wedge x \notin J\} \quad ; \quad L^c = \{x \in \mathbb{R} / x \notin L\}$$

$$L \Delta J = (L \cup J) - (L \cap J)$$

Ejemplo 4

Dado los intervalos $Y = \langle 3; 9 \rangle$ y $P = [5; 14]$, halle el número de elementos enteros que pertenecen al conjunto $Y \Delta P$.

Solución

$$\text{i)} \quad Y \Delta P = (Y - P) \cup (P - Y)$$

$$\text{ii)} \quad Y - P = \langle 3; 9 \rangle - [5; 14] = \langle 3; 5 \rangle \quad \wedge \quad P - Y = [5; 14] - \langle 3; 9 \rangle = \langle 9; 14 \rangle$$

$$\rightarrow Y \Delta P = \langle 3; 5 \rangle \cup \langle 9; 14 \rangle$$

$$\text{iii)} \quad (Y \Delta P) \cap \mathbb{Z} = \{4, 10, 11, 12, 13\}$$

$\therefore$ El conjunto $(Y \Delta P)$ tiene 5 elementos enteros.

RADICALES DOBLES, RACIONALIZACIÓN**1. TRANSFORMACIÓN DE RADICALES DOBLES A SIMPLES**

Si $a \geq 0$, $b \geq 0$ se cumple:

$$\text{i) } \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\text{ii) } \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad (a \geq b)$$

$$\text{iii) } \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \text{ con } c = \sqrt{a^2 - b}$$

Ejemplo 5

Transforme a radicales simples $\sqrt{11 - \sqrt{112}}$.

Solución

$$\sqrt{11 - \sqrt{112}} = \sqrt{11 - 2\sqrt{28}} = \sqrt{(7+4) - 2\sqrt{(7)(4)}} = \sqrt{7} - 2.$$

Ejemplo 6

Transforme a radicales simples $\sqrt{7 + \sqrt{40}}$.

Solución

Usamos la formula (iii), vemos que $a = 7$; $b = 40 \rightarrow c = \sqrt{7^2 - 40} = 3$

$$\text{Luego, } \sqrt{7 + \sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} + \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

Ejemplo 7

Si $\sqrt{x+3-2\sqrt{12x}} + \sqrt{x+5+2\sqrt{20x}} = \sqrt{8+2\sqrt{15}}$ con $x \geq 3$, halle $x+4$.

Solución

Transformando radicales dobles a simples ($x \geq 3$)

$$* \sqrt{x+3-2\sqrt{12x}} = \sqrt{x} - \sqrt{3}$$

$$* \sqrt{x+5+2\sqrt{20x}} = \sqrt{5} + \sqrt{x}$$

$$* \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

Reemplazando

$$\sqrt{x+3-2\sqrt{3x}} + \sqrt{x+5+2\sqrt{5x}} = \sqrt{8+2\sqrt{15}}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{3} + \sqrt{x} + \sqrt{5} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{3} \rightarrow x = 3$$

$\therefore$ El valor de $(x+4)$ es 7.

2. RACIONALIZACIÓN

Racionalizar una expresión es reemplazar por una equivalente que no contenga radical en el denominador. Esto se consigue multiplicando al numerador y denominador por un factor racionalizante (FR).

Ejemplo 8

Racionalice $\frac{4}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$.

Solución

$$\frac{4}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{4}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)} = \frac{4(\sqrt{5}-1)}{4} = \sqrt{5}-1, \text{ en este caso el FR} = \sqrt{5}-1.$$

Observación:

Para encontrar el factor racionalizante es conveniente tener en cuenta las identidades:

- i) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- iii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Ejemplo 9

Simplifique

$$L = \frac{4}{\sqrt{15} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}} - 3\sqrt{3} + \sqrt{15}.$$

Solución

$$i) \underline{\sqrt{15}} + \underline{3\sqrt{3}} + \underline{3\sqrt{2}} + \underline{\sqrt{10}} = \sqrt{5}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + 3(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + 3)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } L &= \frac{4}{\sqrt{15} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}} - 3\sqrt{3} + \sqrt{15} \\
 \rightarrow L &= \frac{4(\sqrt{5}-3)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-3)(\sqrt{3}-\sqrt{2})} - 3\sqrt{3} + \sqrt{15} \\
 \rightarrow L &= \frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1} - 3\sqrt{3} + \sqrt{15} \\
 \rightarrow L &= \cancel{3\sqrt{3}} - 3\sqrt{2} - \cancel{\sqrt{15}} + \sqrt{10} - \cancel{3\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{15}} \\
 \therefore L &= \sqrt{10} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{5} - 3).
 \end{aligned}$$

Álgebra

EJERCICIOS

1. Dados los tres conjuntos $M = \langle -24, -5 \rangle \cup [3, 14) \cup \{18\}$, $N = \langle -17, -2 \rangle \cup [5, 20]$ y $P = \langle -12, 8 \rangle \cup [12, 19] \cup \{-15\}$, el profesor Enrique propone a sus estudiantes de su clase hallar la suma de los elementos enteros de $(M \cap N) - P$. Si los estudiantes Hugo, Paco y Luis participan respondiendo: -18 , -13 y -17 respectivamente, ¿cuál de los tres estudiantes entregó la respuesta correcta al profesor Enrique?

A) Hugo
C) Luis

B) Paco
D) Ninguno de los tres

Solución:

$$M = \langle -24, -5 \rangle \cup [3, 14) \cup \{18\}, N = \langle -17, -2 \rangle \cup [5, 20]$$

$$P = \{-15\} \cup \langle -12, 8 \rangle \cup [12, 19]$$

$$M \cap N = \langle -17, -5 \rangle \cup [5, 14) \cup \{18\}$$

$$(M \cap N) - P = \langle -17, -15 \rangle \cup \langle -15, -12 \rangle \cup [8, 12)$$

$$-16 - 14 - 13 - 12 + 8 + 9 + 10 + 11 = -55 + 38 = -17$$

Rpta.: C

2. Dados los conjuntos $M = \{(x^2 - 4x - 1) \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 4\}$ y $N = \left\{ \frac{3x-2}{x-2} \in \mathbb{R} / x > 3 \right\}$, determine la cantidad de elementos enteros de $M \cap N$.

A) 6

B) 14

C) 0

D) 3

Solución:

$$\text{Para } M: -2 \leq x \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x-2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (x-2)^2 \leq 16$$

$$\Rightarrow -5 \leq (x-2)^2 - 5 \leq 11 \Rightarrow -5 \leq x^2 - 4x - 1 \leq 11 \therefore M = [-5, 11]$$

$$\text{Para } N: \frac{3x-2}{x-2} = \frac{3x-6+4}{x-2} = 3 + \frac{4}{x-2}$$

$$x > 3 \Rightarrow x-2 > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x-2} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{4}{x-2} < 4 \Rightarrow 3 < 3 + \frac{4}{x-2} < 7 \therefore N = (3, 7)$$

$$(M \cap N) \cap \mathbb{Z} = \{4, 5, 6\}$$

Rpta.: D

3. El menor elemento entero del conjunto $A = \left\{ x + \frac{1}{x-2} \in \mathbb{R} / (x-2) \cdot (x-3)^2 > 0 \right\}$ es la cantidad de libros de álgebra que tiene Lunié. Si Fabrizio le dice a Lunié que la cantidad de libros de lógico matemático que tiene es mayor en 3 a la cantidad de sus libros de álgebra, ¿cuántos libros en total tienen entre Lunié y Fabrizio?

- A) 14 libros B) 11 libros C) 13 libros D) 12 libros

Solución:

$$A = \left\{ x + \frac{1}{x-2} \in \mathbb{R} / (x-2) \cdot (x-3)^2 > 0 \right\}$$

$$(x-2) \cdot \underbrace{(x-3)^2}_{(+)} > 0 \Rightarrow (x-2 > 0 \text{ y } x-3 \neq 0) \Rightarrow (x-2 > 0 \text{ y } x-2 \neq 1)$$

$$\Rightarrow (x-2) + \frac{1}{(x-2)} > 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x-2} > 4$$

Por lo tanto, Nicolás tiene 5 libros de álgebra.

Fabrizio tiene $5 + 3 = 8$ libros de lógico matemático.

Total de libros: $5 + 8 = 13$.

Rpta.: C

4. Los conjuntos $S = \{ x^2 - 4x + 1 \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 0 \}$ y $T = \{ \sqrt[3]{x^2 - 6x + 11} \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 8 \}$, satisfacen que el número de elementos enteros de $S - T$ representa la diferencia de las edades de Luis y Carlos. ¿Cuál será la edad del mayor de los amigos si la suma de sus edades actuales es 30 años?

- A) 18 años B) 17 años C) 19 años D) 22 años

Solución:

$$\text{Para } S: x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$$

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow -3 \leq x - 2 \leq -2 \Rightarrow 4 \leq (x - 2)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow 1 \leq (x - 2)^2 - 3 \leq 6 \therefore S = [1, 6]$$

$$\text{Para } T: \sqrt[3]{x^2 - 6x + 11} = \sqrt[3]{(x - 3)^2 + 2}$$

$$-2 \leq x \leq 8 \Rightarrow -5 \leq x - 3 \leq 5 \Rightarrow 0 \leq (x - 3)^2 \leq 25$$

$$\Rightarrow 2 \leq (x - 3)^2 + 2 \leq 27 \Rightarrow \sqrt[3]{2} \leq \sqrt[3]{(x - 3)^2 + 2} \leq 3 \therefore T = [\sqrt[3]{2}, 3]$$

$$(S - T) \cap \mathbb{Z} = ([1, \sqrt[3]{2}) \cup (3, 6]) \cap \mathbb{Z} = \{1, 4, 5, 6\}$$

$$\begin{cases} \text{suma} = 30 \\ \text{diferencia} = 4 \end{cases} \text{ entonces mayor edad} = \frac{30 + 4}{2} = 17$$

Rpta.: B

5. El costo de preparación pre universitaria en un ciclo de verano es de m cientos de soles, donde m es la solución entera de la inecuación $(x^2 + 6)(x^2 - 10x + 24) < 0$, ¿cuál será el pago total que hizo el padre de familia para inscribir a su hijo si hubo un descuento del 5% al momento de la matricula?

- A) 400 soles B) 348soles C) 475 soles D) 360 soles

Solución:

$$\underbrace{(x^2 + 6)}_{(+)}(x^2 - 10x + 24) < 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 6)(x - 4) < 0 \Rightarrow ([x - 6 > 0 \wedge x - 4 < 0] \vee [x - 6 < 0 \wedge x - 4 > 0])$$

$$([x > 6 \wedge x < 4] \vee [x < 6 \wedge x > 4]) \Rightarrow (4 < x < 6) \Rightarrow m = 5$$

$$\text{El padre de familia pagó } \frac{95}{100} \times 500 = 475 \text{ soles}$$

Rpta: C

6. Nicolás está mirando el noticiero matutino en la televisión y escucha que la temperatura a las 7 a.m. en Lima es de T grados centígrados, siendo

$$T = 3\left(\sqrt{76 + 4\sqrt{192}}\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1}\right)^3. \text{ Si para las 11 a.m. de ese mismo día, SENAMHI}$$

pronostica que la temperatura aumentará 3 grados centígrados más, ¿qué temperatura según el pronóstico de SENAMHI sentiría Nicolás a las 11 a.m. del mismo día en Lima?.

- A) 13° C B) 19° C C) 17° C D) 20° C

Solución:

$$T = 3 \left(2 \cdot \sqrt{19 + \sqrt{192}} \right) - \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \right)^3$$

$$T = 6 \left(\sqrt{19 + \sqrt{192}} \right) - (\sqrt{3}+1)^3$$

$$T = 6 \left(\sqrt{19 + 2\sqrt{48}} \right) - (3\sqrt{3} + 3(3) + 3\sqrt{3} + 1)$$

$$T = 6(4 + \sqrt{3}) - (10 + 6\sqrt{3}) = 14$$

La temperatura que sentiría Nicolás según el pronóstico de SENAMHI a las 11 de la mañana sería $14 + 3 = 17^\circ \text{C}$

Rpta.: C

7. El estudiante José se compra un libro de Cálculo Diferencial e Integral que tiene un costo de $(n^2 + 10)$ soles. Si José pago con 3 billetes de 20 soles y se satisface que

$$n = \frac{5}{\sqrt{15-10\sqrt{2}}} + \frac{3}{\sqrt{13+4\sqrt{10}}} + \frac{2}{\sqrt{18+8\sqrt{5}}}, \text{ ¿cuánto recibirá de vuelto?}$$

- A) 16 soles B) 11 soles C) 10 soles D) 8 soles

Solución:

$$n = \frac{5}{\sqrt{15-2\sqrt{50}}} + \frac{3}{\sqrt{13+2\sqrt{40}}} + \frac{2}{\sqrt{18+2\sqrt{80}}}$$

$$n = \frac{5}{\sqrt{10}-\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}$$

$$n = \frac{5}{\sqrt{10}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{10}-\sqrt{8}}{\sqrt{10}-\sqrt{8}}$$

$$n = (\sqrt{10} + \sqrt{5}) + (\sqrt{8} - \sqrt{5}) + (\sqrt{10} - \sqrt{8}) = 2\sqrt{10}$$

Precio del libro: $n^2 + 10 = (40) + 10 = 50$ soles

Vuelto = $60 - 50 = 10$ soles

Rpta.: C

8. Enrique va a pintar una pared plana de forma rectangular de $L^2(L^2 - 3)$ metros cuadrados que contiene una ventana y una puerta de 1 m^2 y $2,5 \text{ m}^2$ respectivamente. Si se tiene que $L = \sqrt{11 + \sqrt{72} - \sqrt{48} - \sqrt{24}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$, ¿cuántos metros cuadrados tendrá que pintar Enrique exactamente?

- A) $15,5 \text{ m}^2$ B) $14,5 \text{ m}^2$ C) $12,5 \text{ m}^2$ D) $8,5 \text{ m}^2$

Solución:

$$L = \sqrt{11 + \sqrt{72} - \sqrt{48} - \sqrt{24} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}$$

$$L = \sqrt{11 + 2\sqrt{18} - 2\sqrt{12} - 2\sqrt{6} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}$$

$$L = (\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{6}$$

El área de la pared a pintar es:

$$L^2(L^2 - 3) - (1 + 2,5) = (6)(3) - 3,5 = 14,5 \text{ m}^2.$$

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El fondista peruano Cristhian Pacheco campeón Panamericano 2019, se alista para competir en los Juegos Olímpicos de Tokio 2020, corriendo los fines de semana la longitud de $(M \cup N) \cap (M \cap N)^c$ en kilómetros, donde $M = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x - 3 < 4\}$ y $N = \{x \in \mathbb{R} / -3 < 5 - 2x < 7\}$, ¿cuántos kilómetros corre el fondista Pacheco cada fin de semana?

A) 5 km

B) 7 km

C) 4 km

D) 3 km

Solución:

$$M = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x - 3 < 4\} = \langle 1, 7 \rangle$$

$$N = \{x \in \mathbb{R} / -3 < 5 - 2x < 7\} = \langle -1, 4 \rangle$$

$$M \cap N = \langle 1, 4 \rangle \Rightarrow (M \cap N)^c = \langle -\infty, 1 \rangle \cup [4, +\infty)$$

$$M \cup N = \langle -1, 7 \rangle$$

$$(M \cup N) \cap (M \cap N)^c = \langle -1, 1 \rangle \cup [4, 7)$$

$$\text{long}((M \cup N) \cap (M \cap N)^c) = (1 - (-1)) + (7 - 4) = 2 + 3 = 5 \text{ Km}$$

Rpta.: A

2. Dado el conjunto $M = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \text{ y } x \leq 6\}$, el número de gallinas que quiere comprar Pedro equivale numéricamente a la longitud del conjunto real $T = \{3x + 2 / x \in M\}$ y el precio de cada gallina (en soles) es la longitud del intervalo $S = \{5x - 3 / x \in M\}$. Halle el costo total que deberá pagar Pedro por todas las gallinas que compra.

A) 240 soles

B) 220 soles

C) 200 soles

D) 280 soles

Solución:

$$M = [2, 6]$$

$$T = [8, 20] \Rightarrow \text{cant de gallinas} = \text{long}([8, 20]) = 20 - 8 = 12$$

$$S = [7, 27] \Rightarrow \text{precio de cada gallina} = \text{long}([7, 27]) = 27 - 7 = 20 \text{ soles}$$

$$\text{Pedro gastará } (12)(20) = 240 \text{ soles}$$

Rpta.: A

3. En la siguiente ecuación: $\frac{\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $x > 1$ el valor de x representa la edad actual de la nieta de Rubén, determine la edad del nieto de Rubén, quién es mayor en 3 años que su nieta.

A) 5 años B) 10 años C) 7 años D) 8 años

Solución:

$$\frac{\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}, x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

Edad de la nieta de Rubén: 4 años

Edad del nieto de Rubén: 7 años

Rpta.: C

4. Determine la suma de los cuadrados de todos los números enteros positivos que verifican que: la tercera parte de un número entero positivo, aumentado en siete unidades, no es menor que el exceso de la mitad del quíntuplo de dicho número entero sobre 2.

A) 30 B) 5 C) 45 D) 29

Solución:

Sea x : número entero positivo

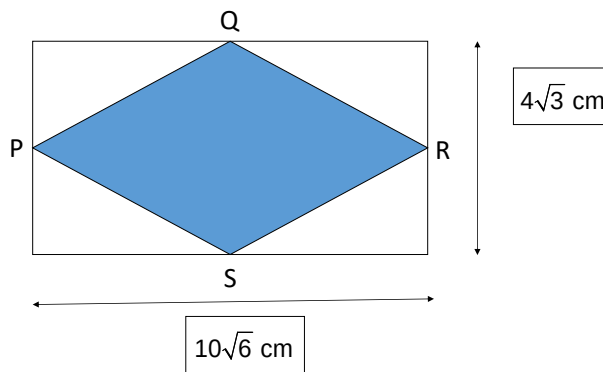
$$\frac{x}{3} + 7 \geq \frac{5x}{2} - 2 \Rightarrow 2x + 42 \geq 15x - 12 \Rightarrow 13x \leq 54$$

$$\Rightarrow x \leq 4,15 \therefore x \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{Piden } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

Rpta.: A

5. Si P, Q, R y S son los puntos medios de los lados del rectángulo mostrado,

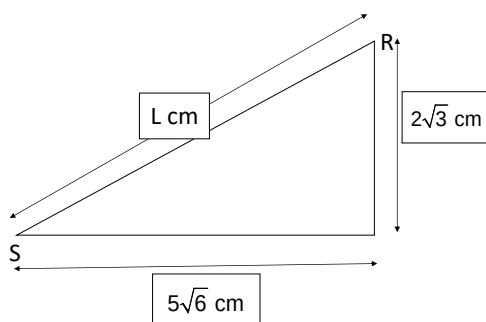


determine el perímetro del rombo.

A) $18\sqrt{2}$ cm B) $32\sqrt{2}$ cm C) $30\sqrt{2}$ cm D) $36\sqrt{2}$ cm

Solución:

Siendo P, Q, R y S puntos medios del rectángulo, el rombo es equilátero entonces



Por teorema de Pitágoras, $L = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{6})^2} = \sqrt{12 + 150} = \sqrt{162}$
 $\Rightarrow L = 9\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \text{perímetro} = 4(9\sqrt{2}) = 36\sqrt{2} \text{ cm}.$

Rpta.: D

6. Simplifique $J = \frac{\sqrt[4]{17 + 6\sqrt{8}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{11 + 4\sqrt{2}} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}} + \sqrt{166 + 66\sqrt{5}} - \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}}.$

- A) $6(\sqrt{5} - 2)$ B) $4(\sqrt{5} + 2)$ C) $4(\sqrt{5} - 2)$ D) $6(\sqrt{5} + 2)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{num}(J) &= \sqrt[4]{17 + 6\sqrt{8}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{17 + 2\sqrt{72}}} + \sqrt{27 - 2\sqrt{50}} \\ &= \sqrt{\sqrt{9} + \sqrt{8}} + (\sqrt{25} - \sqrt{2}) = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + 5 - \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 + 5 - \sqrt{2} = 6 \\ \text{den}(J) &= \sqrt{\sqrt{11 + 4\sqrt{2}} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}} + \sqrt{166 + 66\sqrt{5}} - \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\sqrt{11 + 2\sqrt{8}} + 2\sqrt{20} + 2\sqrt{10}} + \sqrt{166 + 2\sqrt{121 \cdot 45}} - \sqrt{18 + 2\sqrt{32}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{4} + \sqrt{2}) + (\sqrt{121} + \sqrt{45})} - (\sqrt{16} + \sqrt{2}) \\ &= \sqrt{\sqrt{5} + 2 + \sqrt{2} + 11 + 3\sqrt{5} - 4 - \sqrt{2}} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{9 + 2\sqrt{20}} = \sqrt{5} + 2 \\ J &= \frac{6}{\sqrt{5} + 2} \times \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 2} = 6(\sqrt{5} - 2) \end{aligned}$$

Rpta.: A

7. Un club deportivo tiene una zona recreacional de forma rectangular de 30 m de largo por 25 m de ancho en el cual hay una piscina cuadrada de K metros de lado. Determine el área de la zona recreacional alrededor de la piscina, sabiendo que K es la suma de los tres menores números primos que puede asumir la expresión

$$M = \frac{(px + 3p)^2 + p^2}{p^2x + 3p^2} \text{ siendo } x > -3, p \in \mathbb{R}^+.$$

- A) 525 m² B) 669 m² C) 650 m² D) 606 m²

Solución:

$$\text{Sea } M = \frac{(px + 3p)^2 + p^2}{p^2x + 3p^2} \text{ con } x > -3, p \in \mathbb{R}^+$$

$$M = \frac{p^2(x + 3)^2 + p^2}{p^2(x + 3)} = (x + 3) + \frac{1}{(x + 3)} \text{ con } x + 3 > 0$$

$$\Rightarrow M \geq 2 \text{ entonces } K = 2 + 3 + 5 = 10$$

Luego el área de la zona recreacional alrededor de la piscina es: $30 \times 25 - 10^2 = 650 \text{ m}^2$

Rpta.: C

8. Si se satisface que $\begin{cases} \sqrt{a+b+2\sqrt{a+6b}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} \\ \sqrt{a+4\sqrt{b+2}} = \sqrt{a-2} + \sqrt{2b} \end{cases}$, determine la diferencia de las

edades de los esposos Julian e Hilda que actualmente tienen $\overline{ab}$ años y $\overline{mn}$ ($m > n$) años de edad respectivamente.

- A) 6 años B) 9 años C) 11 años D) 10 años

Solución:

$$\sqrt{a+4\sqrt{b+2}} = \sqrt{a-2} + \sqrt{2b} \Rightarrow \sqrt{a+2\sqrt{4b+8}} = \sqrt{a-2} + \sqrt{2b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-2) + 2b = a \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \\ (a-2) \cdot 2b = 4b + 8 \Rightarrow (a-2)(2) = 12 \Rightarrow a = 8 \end{cases}$$

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{a+6b}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{9+2\sqrt{14}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{m} + \sqrt{n} \Rightarrow (m = 7 \text{ y } n = 2)$$

Edad de Julián: 81 años

Edad de Hilda: 72 años

Piden $81 - 72 = 9$ años

Álgebra

EJERCICIOS DE CLASE

1. Víctor y Marco tienen respectivamente $(2a^2 - 10a + 2b^2 - 12b + 30)$ y $(a^2 + b^2 - 31)$ soles y, entre ambos desean comprar un regalo para Manuel que cuesta 65 soles. ¿Cuánto les falta en total para comprar dicho regalo, si ambos tienen la misma cantidad de dinero?
- A) 13 soles B) 5 soles C) 7 soles D) 15 soles

Solución:

$$2a^2 - 10a + 2b^2 - 12b + 30 = a^2 + b^2 - 31$$

$$\rightarrow a^2 - 10a + b^2 - 12b + 61 = 0$$

$$\rightarrow (a^2 - 10a + 25) + (b^2 - 12b + 36) = 0$$

$$\rightarrow (a - 5)^2 + (b - 6)^2 = 0$$

$$\rightarrow a = 5 \wedge b = 6$$

Luego Víctor y Marco tienen cada uno: $a^2 + b^2 - 31 = 30$ soles

Por tanto, les falta 5 soles para comprar dicho regalo.

Rpta.: B

2. Olga tiene un patio de forma rectangular en el que la diferencia de las longitudes de sus lados es de 4 metros. Olga ha dividido su patio en tres regiones, las cuales han sido obtenidas al dividir su patio por el lado de mayor longitud, de tal manera que la primera región es de forma cuadrada y las otras dos regiones contiguas son de forma rectangular y de áreas iguales. Si el área total de las dos regiones no contiguas es de 15 metros cuadrados, halle el área total del patio de Olga.
- A) 12 m^2 B) 21 m^2 C) 32 m^2 D) 45 m^2

Solucion:

Sean las medidas de los lados del patio : a y $a + 4$

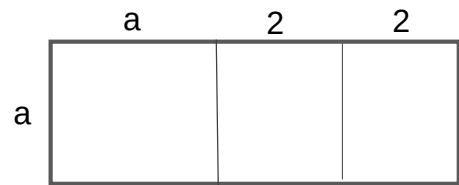
Área de las regiones no contiguas :

$$a^2 + 2a = 15$$

$$\rightarrow (a+5)(a-3) = 0$$

$$\rightarrow a = 3$$

$$\therefore \text{Área Total} = 3(7) = 21\text{m}^2.$$



Rpta.: B

3. En $\mathbb{R}$ se define el operador Δ como, $a \Delta b = \frac{a}{b}$. Halle el mayor valor de m que verifica la desigualdad, $(11 \Delta 10) \leq (m+2) \Delta (m+1) < (8 \Delta 7)$.

A) 8

B) 6

C) 9

D) 7

Solución:

$$(11 \Delta 10) \leq (m+2) \Delta (m+1) < (8 \Delta 7)$$

$$\rightarrow \frac{11}{10} \leq \frac{m+2}{m+1} < \frac{8}{7}$$

$$\rightarrow \frac{11}{10} \leq 1 + \frac{1}{m+1} < \frac{8}{7} \rightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{m+1} < \frac{1}{7}$$

$$\rightarrow 10 \geq m+1 > 7$$

$$\rightarrow 9 \geq m > 6$$

$\therefore$ Mayor valor de m es 9.

Rpta.: C

4. La Superintendencia de Transporte Terrestre decidió controlar el estado de los vehículos que circulaban por la Panamericana Norte, por lo que implementó un operativo, donde se examinaban los frenos desde el kilómetro 30 al kilómetro 70, la documentación de los vehículos es solicitada entre los kilómetros 50 y 110 y las luces son controladas desde el kilómetro 90 al kilómetro 220. Si tres automóviles M, N y P han pasado, respectivamente, por las siguientes revisiones: documentación y luces simultáneamente; solo documentación; frenos y documentación a la vez, indique la secuencia correcta de los intervalos (en km) de mayor longitud en la que han sido controlados cada uno de los automóviles, en el orden mencionado.

- A) $[90, 110)$; $\langle 70, 90 \rangle$; $\langle 50, 70]$
 B) $[90, 110)$; $\langle 70, 90 \rangle$; $\langle 50, 70 \rangle$
 C) $\langle 90, 110 \rangle$; $[70, 90]$; $\langle 50, 70]$
 D) $[90, 110]$; $[70, 90)$; $\langle 50, 70 \rangle$

Solución:

- i) Sean F, D y L los intervalos (en km) por lo que se efectúan las revisiones de Frenos, Documentación y Luces, respectivamente.

$$\text{Luego: } F = [30, 70] \quad ; \quad D = \langle 50, 110 \rangle \quad ; \quad L = [90, 220]$$

- ii) Revisiones:

$$\text{Documentación y Luces} = D \cap L = [90, 110)$$

$$\text{Solo Documentación} : (D - F) - L = \langle 70, 90 \rangle$$

$$\text{Frenos y Documentación} : F \cap D = \langle 50, 70]$$

Rpta.: A

5. Un número real "x" es tal que el cuadrado de dicho número, disminuido en 12 no es mayor que 69; además el cuadrado del mismo número, disminuido de 12 es menor que 3. Con respecto al conjunto de los valores que puede ser asignado a "x", halle la suma del mayor elemento entero negativo con el mayor elemento del mismo conjunto.

- A) 4 B) 6 C) 5 D) 7

Solución:

$$\text{i) } x^2 - 12 \leq 69 \rightarrow 0 \leq x^2 \leq 81$$

$$\text{ii) } 12 - x^2 \in \langle -\infty, 3 \rangle \rightarrow 12 - x^2 < 3$$

Luego de i) y ii):

$$9 < x^2 \leq 81$$

$$\rightarrow 3 < x \leq 9 \quad \vee \quad -9 \leq x < -3$$

Entonces: el mayor valor de x es 9 y el mayor valor entero negativo es -4.

$\therefore$ La suma es 5.

Rpta. : C.

6. Jaime ganó el concurso de “Estudiantes Innovadores en América Latina 2019” por su invento de una calculadora en la que al ingresar dos números reales a y b , da como resultado R , el cual es, el valor inverso multiplicativo de $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$. En la siguiente tabla, se muestra los valores a y b ingresados, así como el resultado R obtenido por dicha calculadora.

a	b	R
3	2	m
4	3	n
x	x-3	p

Halle el valor de “x” tal que se verifique que $m + n + 3p = 2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2}$.

- A) 6 B) 5 C) 8 D) 9

Solución:

Se tiene que:

$$m = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$n = (\sqrt{4} + \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{4} - \sqrt{3}} \right) = \sqrt{4} - \sqrt{3}$$

$$p = (\sqrt{x} + \sqrt{x-3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-3}} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-3}} \right) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-3}}{3}$$

Luego de,

$$2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2} = m + n + 3p = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + 3 \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-3}}{3}$$

$$2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{x} - \sqrt{x-3}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{x} - \sqrt{x-3}$$

$$\rightarrow x = 5.$$

Rpta.: B

7. Los hermanos William y Ronald tienen cada uno, un terreno de forma rectangular. El terreno de William es de 7 km de largo y $\sqrt{4+3\sqrt{2}}$ km de ancho. Si el terreno de Ronald tiene $7\sqrt{2}$ km de largo y es tal que su área es el doble del área del terreno de su hermano William, halle la medida del ancho del terreno de Ronald.

- A) $(\sqrt{8} + \sqrt{2})$ km B) $(\sqrt{2} + 2)$ km C) $(\sqrt{2} + 8)$ km D) $(\sqrt{8} + 2)$ km

Solución:

i) Área del terreno de William:

$$A_1 = 7\sqrt{4+3\sqrt{2}} = 7\sqrt{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$A_1 = 7\sqrt{\sqrt{2}(3+2\sqrt{2})}$$

$$= 7\sqrt[4]{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 7\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}+1)$$

ii) Área del terreno de Ronald:

$$A_2 = 7\sqrt[4]{2}(y) \quad , \text{ donde } y \text{ es la medida del ancho de dicho terreno.}$$

$$\text{Luego: } 7\sqrt[4]{2}(y) = (2)7\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}+1)$$

$$\rightarrow y = 2(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{8}+2)\text{km.}$$

Rpta. : D

8. Una escalera de $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ metros de longitud descansa contra un muro perpendicular al suelo, cuyo extremo superior se encuentra a $\sqrt[4]{14+4\sqrt{6}}$ metros del suelo. Si el extremo inferior de la escalera, ubicado en el suelo, se encuentra a $\sqrt[4]{18-8\sqrt{2}}$ metros con respecto al extremo inferior del muro, halla el valor de $(a+b)$.

A) 6

B) 7

C) 4

D) 8

Solución:

Sean:

$$m = \sqrt[4]{14+4\sqrt{6}}$$

$$n = \sqrt[4]{18-8\sqrt{2}}$$

$$\text{Luego } p = \sqrt{m^2 + n^2}$$

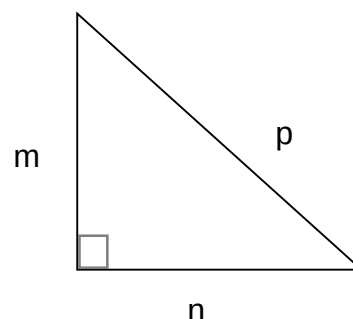
$$\rightarrow p = \sqrt{\sqrt{14+4\sqrt{6}} + \sqrt{18-8\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{14+2\sqrt{24}} + \sqrt{18-2\sqrt{32}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{12} + \sqrt{2} + \sqrt{16} - \sqrt{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$$

$$\rightarrow p = \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{3} + \sqrt{1}$$

∴ El valor de $a+b=4$.

**Rpta.: C**

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Saraí compró para su menor hijo “m” cuentos y “n” rompecabezas al precio unitario de 10 soles y 4 soles, respectivamente. Ahora, con el transcurrir de los años, ha vendido el total de dichos cuentos y rompecabezas, con lo que respecto al precio total del costo ha tenido una pérdida de 29 soles. Si, numéricamente, el precio de venta unitario, en soles, de cada cuento y de cada rompecabezas coincidió, respectivamente, con el total de cuentos y rompecabezas vendidos, ¿cuánto gastó, en total, Saraí cuando compró dichos cuentos y rompecabezas para su menor hijo?

A) 56 soles B) 66 soles C) 62 soles D) 58 soles

Solución:

i. Precio de Costo Total: $10m + 4n$

ii. Precio de Venta Total: $m(m) + n(n)$

Entonces: Pérdida = Precio de Venta – Precio de Costo = -29

Luego: $m^2 + n^2 - (10m + 4n) = -29$

$$\rightarrow (m^2 - 10m + 25) + (n^2 - 4n + 4) = 0$$

$$\rightarrow (m - 5)^2 + (n - 2)^2 = 0$$

$$\rightarrow m = 5 \text{ y } n = 2$$

$$\therefore \text{Precio de Costo Total} = 10(5) + 4(2) = 58 \text{ soles.}$$

Rpta.: D

2. **Contaminación Plástica:** Más de cinco trillones de partículas de plástico flotan en nuestros océanos, producto de las miles de toneladas de residuos que los humanos descargamos en el mar, lo cual ha conllevado, actualmente, que del total de agua que cubre la tierra, el $(3k^{-2} - 32)\%$ está cubierto de partículas de plástico. Halle qué porcentaje de partículas de plástico, con respecto al agua que cubre la tierra, existe hasta la actualidad, donde k es el mayor número real que alcanza $\frac{x}{2x^2 + 3}$; $x \in \mathbb{R}^+$.

A) 45% B) 25% C) 40% D) 28%

Solución:

Siendo que $x \in \mathbb{R}^+$ y de la propiedad (13) de números reales: $\frac{2x^2 + 3}{2} \geq \sqrt{2x^2(3)}$

$$\rightarrow \frac{2}{2x^2 + 3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x^2(3)}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2x^2 + 3} \leq \frac{1}{2x\sqrt{6}}$$

$$\rightarrow \frac{x}{2x^2 + 3} \leq \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Luego $k = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ entonces $(3k^{-2} - 32)\% = 40\%$

$\therefore$ Del total de agua que cubre la tierra el 40% está cubierto por plástico.

Rpta.: C

3. En los siguientes intervalos $S = [4, 7)$ y $R = \langle 5, 9]$ se ha registrado la cantidad (en cientos) de polos vendidos, mensualmente por una textilera, durante los dos primeros trimestres del 2019, respectivamente. Para el siguiente trimestre dicha textilera se ha proyectado vender, mensualmente, una cantidad (en cientos) de polos de solamente las cantidades del segundo trimestre; pero solo vendieron las cantidades comunes (en cientos) de S y R. ¿Cuánto es la diferencia mensual entre la máxima cantidad entera de lo que se proyectó vender y de lo que se vendió, en ese orden; sabiendo que mensualmente vendió m cientos de polos, donde m es un valor entero?

- A) 300 B) 400 C) 500 D) 200

Solución:

- i) Proyección de venta en el tercer trimestre del año 2019: $R - S = [7, 9]$, entonces proyección máxima de venta es 900 polos.
- ii) Venta real en el tercer trimestre $= S \cap R = \langle 5, 7]$, luego la cantidad de polos que vendieron es 600.

$\therefore$ Diferencia de ambas cantidades (proyectadas y vendidas) es 300.

Rpta.: A

4. Franco desea ir en su auto desde la ciudad M hacia la ciudad N (ambas ubicadas en una misma línea recta). La distancia entre ambas ciudades es de 150 km. Si Franco empieza su recorrido de tal manera que llega a un punto en donde cuatro veces la distancia recorrida no excede a la distancia que le falta recorrer, halle el máximo valor de la distancia recorrida.

- A) 20 km B) 30 km C) 25 km D) 35 km

Solución:

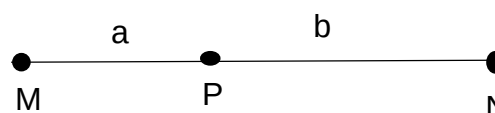
Se cumple:

- i) $a + b = 150$
ii) $4a \leq b$

De ii) $a + 4a \leq a + b \rightarrow 0 < 5a \leq 150$
 $\rightarrow 0 < a \leq 30$

$\therefore$ El valor de a máximo es 30 km

Rpta.: B



5. Dado el conjunto $P = \left\{ \frac{x}{9x^2+1} \in \mathbb{R} / x > 0 \right\}$. De una fábrica, se tiene la información de que se ha medido la longitud de 70 piezas con las mismas características, las cuales se consideran aceptables si la longitud (en cm) de cada pieza está en el intervalo $\langle 0, 3 \rangle$. Si 40 piezas fueron aceptables y ninguna de las longitudes de dichas piezas estuvo en el intervalo $\left\langle \frac{1}{6}, 2 \right\rangle$; además de las 70 piezas medidas, las longitudes (en cm) de 45 de ellas estuvo en el intervalo $J = [2, 12a + 2]$, donde a es el mayor elemento de P . Con respecto a las piezas aceptables, ¿en cuánto excede la cantidad de piezas cuya longitud es menor a 1 cm a la cantidad cuya longitud es mayor que 1 cm?, sabiendo que la longitud de cada una de las 70 piezas no excedió a $(12a + 2)$ cm.

A) 10 B) 15 C) 12 D) 5

Solución:

i) En P :

$$(3x - 1)^2 \geq 0 \rightarrow 9x^2 + 1 \geq 6x \rightarrow 0 < \frac{x}{9x^2 + 1} \leq \frac{1}{6}$$

$$\rightarrow P = \left\langle 0, \frac{1}{6} \right] \text{ y } J = [2, 4]$$

- ii) De Las 40 piezas aceptables que $\in \langle 0, 3 \rangle = \left\langle 0, \frac{1}{6} \right] \cup \left\langle \frac{1}{6}, 2 \right\rangle \cup [2, 3]$, ninguna de ellas pertenece al intervalo $\left\langle \frac{1}{6}, 2 \right\rangle$, luego pertenecen a $\left\langle 0, \frac{1}{6} \right] \cup [2, 3]$

Sean: m la cantidad de piezas que pertenecen a $\left\langle 0, \frac{1}{6} \right]$

n : la cantidad de piezas que pertenecen a $[2, 3]$

$$\text{Luego } m + n = 40 \dots (1)$$

- iii) En $J = [2, 4] = [2, 3] \cup \langle 3, 4 \rangle$, sea p = cantidad de piezas que pertenecen a $\langle 3, 4 \rangle$

$$\text{Entonces } 45 = n + p \dots (2)$$

Como $m + n + p = 70$, de (1): $p = 30$

Luego de (2): $n = 15$ y de (1): $m = 25$

$$\therefore m - n = 10.$$

Rpta.: A

6. Jonás va a comprar entradas para asistir con sus dos menores hijas a un partido de Vóleibol en "Lima 2019". Si el costo, en soles, de cada entrada para un menor de edad es la suma de los elementos enteros del conjunto $F = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 3 \geq 4 - x + 2x^2\} \cup [-1, 5]$, y el costo de una entrada para adulto es el doble del costo de la entrada para un menor de edad, ¿cuánto pagará Jonás por la compra de su entrada y la de sus hijas?
- A) 52 soles B) 48 soles C) 60 soles D) 56 soles

Solución:

Como $x^2 + x + 3 \geq 4 - x + 2x^2$

$$0 \geq 1 - 2x + x^2$$

$$\rightarrow (x - 1)^2 \leq 0$$

$$\rightarrow x = 1$$

Luego $F = \{1\} \cup [-1, 5] = [-1, 5]$ y sus elementos enteros son $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Entonces precio de cada entrada de niño es: 14 soles

Precio de cada entrada de adulto es 28 soles

Por tanto, el costo total de las entradas es de 56 soles.

Rpta.: D

7. **La sucesión de Fibonacci:** se trata de una sucesión infinita de números naturales que comienza con los números 1 y 1, y a partir de ellos, cada término se obtiene sumando los dos términos anteriores, así se obtiene la sucesión,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Si $M = \sqrt[4]{49 + 10\sqrt{24}} - \sqrt[4]{49 - 10\sqrt{24}} + 3 + (2 - \sqrt{2})$ es un término que pertenece a la sucesión de Fibonacci, determine el término que sigue a éste en dicha sucesión.

- A) 3 B) 8 C) 13 D) 5

Solución:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt[4]{49 + 10\sqrt{24}} - \sqrt[4]{49 - 10\sqrt{24}} + 3 + 2 - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{\sqrt{49 + 2\sqrt{(25)24}}} - \sqrt{\sqrt{49 - 2\sqrt{25(24)}}} + 3 + 2 - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{\sqrt{25} + \sqrt{24}} - \sqrt{\sqrt{25} - \sqrt{24}} + 3 + (2 - \sqrt{2}) \\ &= \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + 3 + 2 - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 3 + 2 - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2\sqrt{2} + 3} + 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 + 2 - \sqrt{2} = 3 \end{aligned}$$

Por tanto, el término que sigue a M es 5.

Rpta.: D

8. **Wifi:** La contraseña de wifi de un colegio posee 6 dígitos. Cuando un alumno la solicita, se le entrega la siguiente instrucción: Cada uno de los tres primeros dígitos corresponde al número $\frac{6}{\sqrt{35}}(m+n)$, y cada uno de los tres últimos dígitos es el

número p , los cuales satisfacen que $m+n = \frac{\sqrt{7(p+2)}}{p}$, siendo

$m = \frac{\sqrt{12+\sqrt{140}} - \sqrt{8-\sqrt{60}}}{\sqrt{8+\sqrt{60}} - \sqrt{5-\sqrt{24}}}$ y $n = \frac{\sqrt{35+\sqrt{336}} - \sqrt{360} - \sqrt{840}}{3}$, ¿cuál es la contraseña de wifi?

A) 333555

B) 222333

C) 555333

D) 222777

Solución:

$$\begin{aligned} \text{i) } m &= \frac{\sqrt{12+\sqrt{140}} - \sqrt{8-\sqrt{60}}}{\sqrt{8+\sqrt{60}} - \sqrt{5-\sqrt{24}}} = \frac{\sqrt{12+2\sqrt{35}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}} \\ &= \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5} - (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } n &= \frac{\sqrt{35+\sqrt{336}} - \sqrt{360} - \sqrt{840}}{3} = \frac{\sqrt{35+2\sqrt{84}} - 2\sqrt{90} - 2\sqrt{210}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{35+2\sqrt{14(6)}} - 2\sqrt{15(6)} - 2\sqrt{14(15)}}{3} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{14} - \sqrt{15})^2}}{3} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14} - \sqrt{15}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } m+n &= \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14} - \sqrt{15}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{35} - \sqrt{14} + \sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{14} - \sqrt{15}}{3} = \frac{\sqrt{35}}{3} = \frac{\sqrt{7(p+2)}}{p} \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } p=3 \quad \text{y} \quad \frac{6}{\sqrt{35}}(m+n) = \frac{6}{\sqrt{35}} \left(\frac{\sqrt{35}}{3} \right) = 2$$

Por tanto, la contraseña del wifi es 222333.

Rpta.: B

Álgebra

EJERCICIOS

1. Determine el valor de verdad (V o F) de las siguientes proposiciones de acuerdo con la secuencia en que aparece cada una.

I. Si $(a-2)^2 > 0$, entonces $a \in \mathbb{R} - \{2\}$.

II. Si $a \geq 0$, entonces $\frac{3}{2} < \frac{a+2}{a+1} \leq 2$.

III. Si $-4 \leq a < 2$, entonces $a^2 \in [0;16]$.

A) VVV

B) VFF

C) FFV

D) VFV

E) FFF

Solución:

I. $(a-2)^2 > 0 \rightarrow a-2 \neq 0 \rightarrow a \neq 2 \rightarrow a \in \mathbb{R} - \{2\}$ (V)

II. $\frac{a+2}{a+1} = 1 + \frac{1}{a+1}$

$a \geq 0 \rightarrow a+1 \geq 1 \rightarrow 0 < \frac{1}{a+1} \leq 1 \rightarrow 1 < 1 + \frac{1}{a+1} \leq 2$ (F)

III $-4 \leq a < 2 \rightarrow 0 \leq a^2 \leq 16 \rightarrow a^2 \in [0;16]$ (V)

Rpta.: D

2. Un terreno de forma rectangular ha sido dividido en dos parcelas como se muestra en la figura, para destinarlo al sembrío de zanahorias y lechugas. La medida de la diagonal del terreno, en kilómetros, está representada por $\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 8b - 6a + 25}$. Calcule el área de la parcela destinada para lechugas.

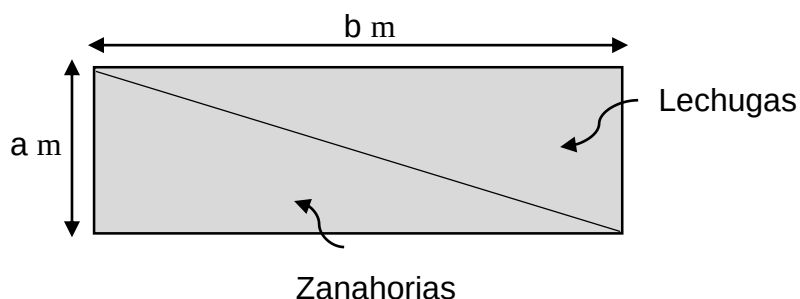
A) 6 km^2

B) 10 km^2

C) 12 km^2

D) 8 km^2

E) 9 km^2



Solucion:

De la figura, $\sqrt{a^2 + b^2} = (\text{diagonal})$

$$\rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 8b - 6a + 25}$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 = 2a^2 + 2b^2 - 8b - 6a + 25$$

$$\rightarrow 0 = a^2 - 6a + 9 + b^2 - 8b + 16$$

$$\rightarrow 0 = (a-3)^2 + (b-4)^2 \rightarrow a=3, b=4$$

$$\therefore \text{Área}_{(\text{Lechugas})} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ km}^2.$$

Rpta. : A

3. Dados los conjuntos

$T = \{ (x^2 - 6) \in \mathbb{R} \mid x \in \langle -4; -2 \rangle \}$ y $W = \left\{ \frac{6x}{x^2 + 1} \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}^+ \right\}$. Halle la suma de los cuatro menores elementos enteros positivos del complemento de $(T - W)$.

A) 14

B) 15

C) 16

D) 17

E) 13

Solución:

$$\begin{aligned} * \text{ En } T : x \in \langle -4; -2 \rangle &\rightarrow -4 < x < -2 \rightarrow 4 < x^2 < 16 \rightarrow -2 < x^2 - 6 < 10 \\ &\rightarrow T = \langle -2; 10 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ En } W : \text{ Como } x > 0 &\rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} \geq 2 \rightarrow 0 < \frac{6x}{x^2 + 1} \leq 3 \\ &\rightarrow W = \langle 0; 3 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * T - W &= \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 3; 10 \rangle \\ \rightarrow (T - W)^c &= \langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 0; 3 \rangle \cup [10; +\infty) \end{aligned}$$

Luego,

$$(T - W)^c \cap \mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; 10; 11; \dots\}$$

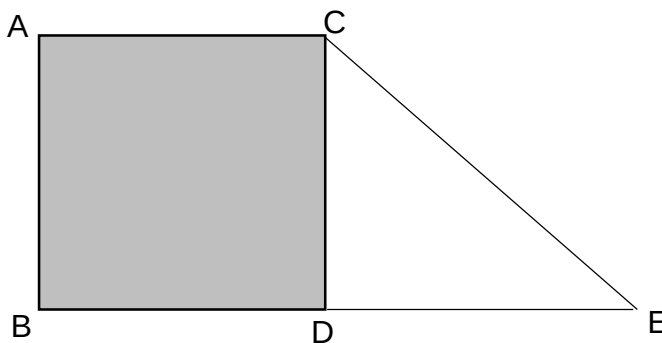
Los cuatro menores elementos enteros positivos son: 1; 2; 3 y 10.

$\therefore$ La suma es 16.

Rpta. : C

4. El terreno de Marco tiene forma trapecial rectangular y está dividido en dos parcelas, tal como se muestra en la figura. Si el área de la parcela de forma triangular CDE es mayor o igual a 10 m^2 y la parcela de forma cuadrada ABCD, tiene un lado de 8 metros mayor que el lado DE. ¿Cuántos metros mide, como mínimo, el perímetro de la parcela de forma cuadrada?

- A) 40 m
B) 20 m
C) 30 m
D) 35 m
E) 25 m



Solución:

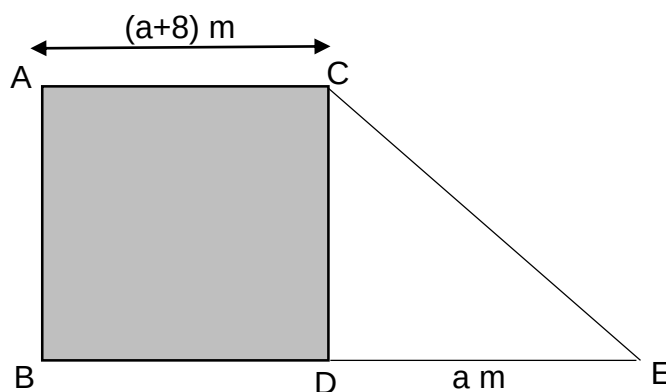
i) $a > 0$

$$\text{Área}_{\triangle CDE} = \frac{(a)(a+8)}{2} \geq 10$$

$$\rightarrow a^2 + 8a - 20 \geq 0$$

$$\rightarrow (a-2) \underbrace{(a+10)}_{(+)} \geq 0, \quad a+10 > 10$$

$$\rightarrow a \geq 2$$



ii) $P = \text{Perímetro}_{\square ABCD} = 4(a+8) = 4a+32$

Como $a \geq 2 \rightarrow 4a \geq 8 \rightarrow 4a+32 \geq 40$

$\therefore P_{\min} = 40 \text{ metros.}$

Rpta. : A

5. Paco, Marco y Tom tienen 37 canicas en total. Si el cuadrado de la cantidad de canicas que tiene Paco es numéricamente igual al producto de la cantidad de canicas que tienen Marco y Tom y además Paco tiene por lo menos 10 canicas, calcule la suma de todos los valores que admite la cantidad de canicas que tiene Paco.

- A) 30 B) 33 C) 31 D) 34 E) 35

Solución

Sean

a: Cantidad de canicas de Paco

b: Cantidad de canicas de Marco

c: Cantidad de canicas de Tom

Se sabe que $a+b+c=37 \wedge a^2=bc$

$$a \geq 10 \dots(1)$$

Aplicando $MA \geq MG$ para los números a, b y c , se tiene

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \rightarrow \frac{37}{3} \geq \sqrt[3]{a^3} \rightarrow 12,3 \geq a \dots(2)$$

Luego, de (1) y (2): $10 \leq a \leq 12,3$

$$\rightarrow a=10 \vee a=11 \vee a=12$$

$\rightarrow$ Paco tiene 10 o 11 o 12 canicas.

$\therefore$ La suma es 33.

Rpta. : B

6. Sean a, b, c y d números reales. Si $4a^2+b^2=33 \wedge 9c^2+d^2=17$, halle el menor valor de $J=-10ab-15cd$.

A) - 120

B) - 125

C) - 124

D) - 115

E) - 130

Solución:

Sabemos que si $m \in \mathbb{R} \rightarrow m^2 \geq 0$

Como a, b, c y $d \in \mathbb{R} \rightarrow \underbrace{(2a-b)^2}_{(i)} \geq 0$ y $\underbrace{(3c-d)^2}_{(ii)} \geq 0$

$$\text{De (i) : } 4a^2 - 4ab + b^2 \geq 0 \rightarrow 4a^2 + b^2 \geq 4ab \dots(1)$$

$$\text{De (ii) : } 9c^2 - 6cd + d^2 \geq 0 \rightarrow 9c^2 + d^2 \geq 6cd \dots(2)$$

$$\text{Haciendo (1)+(2): } 4a^2 + b^2 + 9c^2 + d^2 \geq 4ab + 6cd$$

$$\rightarrow 33 + 17 \geq 4ab + 6cd$$

$$\rightarrow 25 \geq 2ab + 3cd$$

$$\text{Por } (-5): \rightarrow -125 \leq -10ab - 15cd$$

$$\therefore J_{\text{Menor}} = -125.$$

Rpta. : B

7. Simplifique

$$K = \frac{\sqrt{9+3\sqrt{8}}}{\sqrt{25+5\sqrt{24}} - \sqrt{20-\sqrt{300}}}.$$

- A) 1 B) $3\sqrt{5}$ C) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

Solución:

$$K = \frac{\sqrt{9+3\sqrt{8}}}{\sqrt{25+5\sqrt{24}} - \sqrt{20-\sqrt{300}}}$$

$$K = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

$$K = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)}$$

$$K = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Rpta. : C

8. El administrador de un parque desea construir un jardín de forma rectangular de modo tal, que su largo mide dos metros más que su ancho. Si el largo mide $\left(\sqrt{4+2\sqrt{2+2\sqrt{9+2\sqrt{20}}}}\right)$ m, calcule el área del jardín.

- A) 6 m^2 B) 4 m^2 C) 7 m^2 D) 3 m^2 E) 5 m^2

Solución:

$$a = \sqrt{4+2\sqrt{2+2\sqrt{9+2\sqrt{20}}}}$$

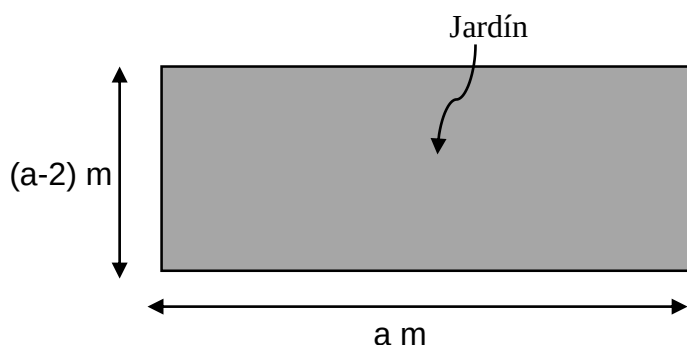
$$a = \sqrt{4+2\sqrt{2+2(\sqrt{5}+2)}}$$

$$a = \sqrt{4+2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$$

$$a = \sqrt{4+2(\sqrt{5}+1)}$$

$$a = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5}+1$$

$$\therefore \text{Área}_{\text{Jardín}} = a(a-2) = (\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) = 4 \text{ m}^2.$$



Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine el valor de verdad (V o F) de las siguientes proposiciones de acuerdo con la secuencia en que aparece cada una.

I Si $a^2 > b^2$, entonces $a > b, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

II. Si $a < 0$, entonces $1 < \frac{a-3}{a-1} < 3$.

III. Si $a^2 + 2a < 4$, entonces $a \in \langle -\sqrt{5}-1; \sqrt{5}-1 \rangle$.

A) VVF

B) VFF

C) FVV

D) VFF

E) FVF

Solución:

I. $(-5)^2 > (-2)^2 \rightarrow -5 < -2$ (F)

II. $\frac{a-3}{a-1} = 1 - \frac{2}{a-1}$

$$a < 0 \rightarrow a-1 < -1 \rightarrow 0 > \frac{1}{a-1} > -1 \rightarrow 0 < -\frac{2}{a-1} < 2$$

$$\rightarrow 1 < 1 - \frac{2}{a-1} < 3$$
 (V)

III. $a^2 + 2a < 4 \rightarrow (a+1)^2 < 5$

$$\rightarrow -\sqrt{5} < a+1 < \sqrt{5}$$
 (V)
$$\rightarrow -\sqrt{5}-1 < a < \sqrt{5}-1$$

Rpta.: C

2. Samir dispone de un container de forma de paralelepípedo rectangular para el envío de alimentos al extranjero, ver figura. Si la diagonal de dicho sólido, en metros, está representada por $d = \sqrt{120 + 2a^2 - 8b + 2c^2 - 4a + 2b^2 - 20c}$, halle la suma del perímetro de la base de dicho container con su altura.

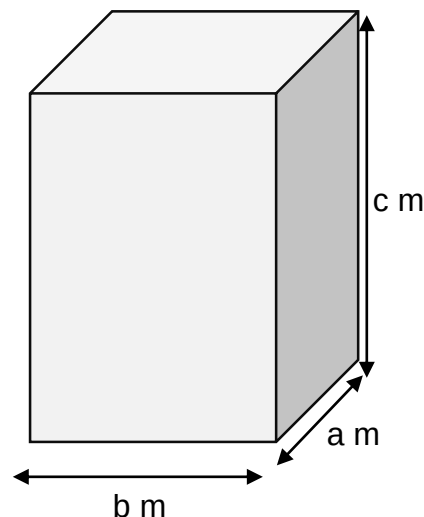
A) 22 m

B) 20 m

C) 24 m

D) 23 m

E) 25 m



Solución:

$$a > 0; b > 0; c > 0$$

Como el container tiene la forma de paralelepípedo rectangular, entonces

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{120 + 2a^2 - 8b + 2c^2 - 4a + 2b^2 - 20c}$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 120 + 2a^2 - 8b + 2c^2 - 4a + 2b^2 - 20c$$

$$\rightarrow 0 = (a^2 - 4a + 4) + (b^2 - 8b + 16) + (c^2 - 20c + 100)$$

$$\rightarrow 0 = (a-2)^2 + (b-4)^2 + (c-10)^2$$

$$\rightarrow a = 2, b = 4, c = 10$$

$$\text{Perímetro de la base} = 2a + 2b = 2(2) + 2(4) = 12\text{m}$$

$$\text{Altura del container} = 10\text{ m}$$

$\therefore$ La suma es 22 metros.

Rpta.: A

3. Dados los conjuntos

$$K = \left\{ \sqrt{x^2 - 4x + 5} \in \mathbb{R} / -3 < x \leq -1 \right\} \text{ y } L = \left\{ \sqrt{x^2 + 16} \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 1 \right\}, \text{ determine } (K \Delta L) \cap \mathbb{Z}.$$

$$\text{A) } \{1;3\} \quad \text{B) } \{4;5\} \quad \text{C) } \{5\} \quad \text{D) } \{5;6\} \quad \text{E) } \{2;3;4\}$$

Solución:

* En K :

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{(x-2)^2 + 1}$$

$$\text{Como } -3 < x \leq -1 \rightarrow -5 < x-2 \leq -3 \rightarrow 9 \leq (x-2)^2 < 25$$

$$\rightarrow 10 \leq (x-2)^2 + 1 < 26$$

$$\rightarrow \sqrt{10} \leq \sqrt{(x-2)^2 + 1} < \sqrt{26}$$

$$\rightarrow K = [\sqrt{10}; \sqrt{26})$$

* En L:

$$\text{Como } -3 < x \leq 1 \rightarrow 0 \leq x^2 < 9 \rightarrow 16 \leq x^2 + 16 < 25$$

$$\rightarrow 4 \leq \sqrt{x^2 + 16} < 5$$

$$\rightarrow L = [4;5)$$

$$* K \Delta L = (K \cup L) - (K \cap L) = [\sqrt{10}; 4) \cup [5; \sqrt{26})$$

$$\therefore (K \Delta L) \cap \mathbb{Z} = \{5\}$$

Rpta.: C

4. El administrador de una empresa productora de mermelada desea lanzar al mercado una nueva presentación consistente en un envase de forma de un paralelepípedo rectangular. Si el volumen de dicho envase es de 1000 ml, halle el menor valor que admite la suma de los cuadrados de sus dimensiones.

A) 300 B) 250 C) 200 D) 210 E) 270

Solución:

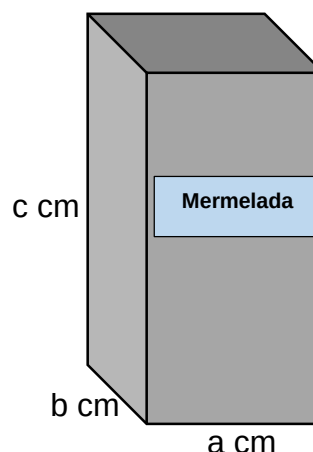
Sean a , b y c las dimensiones de dicho envase.

$$V_{\text{ENVASE}} = 1000 \text{ ml} = abc$$

Luego, apliquemos $MA \geq MG$ para los números a^2, b^2 y c^2 :

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} &\geq \sqrt[3]{(abc)^2} \\ \rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} &\geq \sqrt[3]{(1000)^2} = (10^3)^{\frac{2}{3}} \\ \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\geq 300 \end{aligned}$$

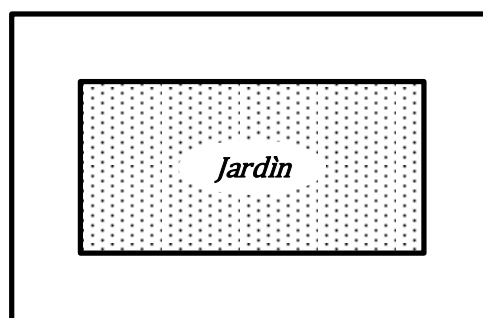
$\therefore$ El menor valor que puede admitir $a^2 + b^2 + c^2$ es 300.



Rpta. : A

5. En un parque público de forma rectangular, cuyas dimensiones son 80 m de largo y 60 m de ancho, el municipio distrital desea construir un jardín con lados paralelos a los lados del parque, de tal manera que la distancia entre cada lado del jardín y el lado paralelo más cercano del parque es la misma para los cuatro lados (Ver figura). Determine el perímetro del jardín si se sabe que su área es la mitad del área del parque.

A) 200 m
B) 240 m
C) 250 m
D) 300 m
E) 220 m



Solución:

$$\text{Dato : } A_{\text{JARDÍN}} = \frac{A_{\text{PARQUE}}}{2}, x < 30$$

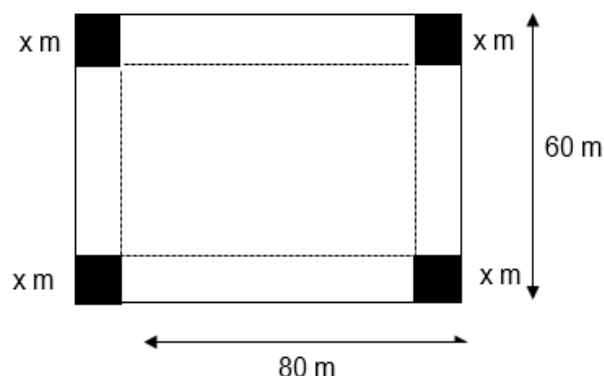
$$\rightarrow (80 - 2x)(60 - 2x) = \frac{80 \cdot 60}{2}$$

$$\rightarrow (40 - x)(30 - x) = 600$$

$$\rightarrow x = 10 \vee x = 60, \quad (x < 30)$$

$$\rightarrow x = 10$$

$$\therefore \text{Perímetro}_{\text{Jardín}} = 280 - 8x = 280 - 8(10) = 200 \text{ m}$$

**Rpta.: A**

6. Sean a , b y c números reales positivos, de modo que $a > b$ y $d = \frac{c+a}{c+b}$. Si J es el intervalo abierto de menor longitud al cual pertenecen los valores de " d ", calcule la longitud, en unidades, de dicho intervalo.

A) $\frac{3a-b}{a}$

B) $\frac{a+b}{a}$

C) $\frac{2a-b}{b}$

D) $\frac{2a-b}{2b}$

E) $\frac{a-b}{b}$

Solución:

$$\text{Como } a > b \rightarrow c+a > c+b \rightarrow \frac{c+a}{c+b} > 1 \dots(\alpha)$$

También de

$$a > b \rightarrow ca > cb \rightarrow ca + ab > cb + ab$$

$$\rightarrow a(c+b) > b(c+a)$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c+b}{c+a} \dots(\beta)$$

$$\text{Luego, de } (\alpha) \text{ y } (\beta) \text{ se tiene } d \in J = \left\langle 1; \frac{a}{b} \right\rangle$$

$$\therefore \text{Longitud}(J) = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}.$$

Rpta. : E

7. Simplifique

$$T = \left(\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[8]{3072}} - \sqrt[8]{3} \right)^8.$$

A) 16

B) 2

C) 8

D) 4

E) 6

Solución:

$$T = \left(\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[8]{3072}} - \sqrt[8]{3} \right)^8$$

$$T = \left(\sqrt{\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[8]{2^8 \cdot 12}} - \sqrt[8]{3} \right)^8$$

$$T = \left(\sqrt{\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{3} + 2\sqrt{\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{3}}} - \sqrt[8]{3} \right)^8$$

$$T = \left(\sqrt{\sqrt[4]{4}} + \sqrt{\sqrt[4]{3}} - \sqrt[8]{3} \right)^8 = 4$$

Rpta.: D

8. Sea $x > 4$. Si $\sqrt{x+4-\sqrt{16x}} + \sqrt{x+4+\sqrt{16x}} = \sqrt{2\sqrt{2(7+\sqrt{45})}} - 1$, halle el número de elementos enteros del intervalo $J = \langle 2\sqrt{x}; 4x \rangle$.

A) 4

B) 0

C) 1

D) 2

E) 3

Solución:Como $x > 4$

$$\sqrt{x+4-\sqrt{16x}} = \sqrt{x+4-2\sqrt{4x}} = \sqrt{x} - \sqrt{4}$$

$$\sqrt{x+4+\sqrt{16x}} = \sqrt{x+4+2\sqrt{4x}} = \sqrt{x} + \sqrt{4}$$

$$\text{También } \sqrt{2\sqrt{2(7+\sqrt{45})}} = \sqrt{2\sqrt{14+2\sqrt{45}}} = \sqrt{2(3+\sqrt{5})} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1$$

Reemplazando, se tiene

$$\sqrt{x} - \sqrt{4} + \sqrt{x} + \sqrt{4} = \sqrt{5} + 1 - 1$$

$$\rightarrow 2\sqrt{x} = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow 4x = 5$$

$$\text{Luego, } J = \langle 2\sqrt{x}; 4x \rangle = \langle \sqrt{5}; 5 \rangle$$

Elementos enteros : 3 ; 4 y 5.

$$\therefore n(J) = 3.$$

Rpta.: E

Álgebra

EJERCICIOS

1. Determine el valor de verdad (V o F) de las siguientes proposiciones de acuerdo con la secuencia en que aparece cada una.

I. Si $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{a} < 0$, entonces $\sqrt{2} < -a$.

II. Si $-2 \leq a < 2$, entonces $0 \leq a^2 < 4$.

III. Si $(a-2)^2 - 9 \leq 0$, entonces $a \in [-1; 5]$.

A) VVF

B) VFF

C) FFV

D) VFV

E) FFF

Solución:

I. $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{a} < 0 \rightarrow -\sqrt{2} > a \rightarrow \sqrt{2} < -a$ (V)

II. $-2 \leq a < 2 \rightarrow 0 \leq a^2 < 4$ (F)

III $(a-2)^2 - 9 \leq 0 \rightarrow (a-2)^2 \leq 9 \rightarrow -3 \leq a-2 \leq 3 \rightarrow -1 \leq a \leq 5$ (V)

Rpta.: D

2. Si las edades de Benito y César son “a” y “b” años, respectivamente, y verifican la igualdad $a^2 - 20b + 25 = 30a - b^2 - 300$, halle la suma de sus edades dentro de 20 años.

A) 65 años

B) 66 años

C) 70 años

D) 75 años

E) 80 años

Solución:

$$a^2 - 20b + 25 = 30a - b^2 - 300 \rightarrow (a-15)^2 + (b-10)^2 = 0$$

$$\rightarrow a = 15 \text{ y } b = 10$$

Edades actuales : Benito 15 años y César 10 años

Dentro de 20 años : Benito 35 años y César 30 años

∴ La suma de sus edades dentro de 20 años es 65 años.

Rpta.: A

3. Dados los conjuntos

$T = \{ (x^2 - 7) \in \mathbb{R} \mid x \in \langle -5; -1 \rangle \}$ y $W = \{ (2x - 19) \in \mathbb{R} \mid \frac{7}{9} > \frac{x-1}{x+3} > \frac{2}{3} \}$. Si "p" es la suma del mayor con el menor elemento de $[Z \cap (T \cap W^C)]$, halle $p + 3$.

- A) 14 B) 16 C) 15 D) 12 E) 13

Solución

$$* \text{ En } T : x \in \langle -5; -1 \rangle \rightarrow -5 < x < -1 \rightarrow 1 < x^2 < 25 \rightarrow -6 < x^2 - 7 < 18$$

$$\rightarrow T = \langle -6; 18 \rangle$$

$$* \text{ En } W : \frac{7}{9} > \frac{x-1}{x+3} > \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3} < 1 - \frac{4}{x+3} < \frac{7}{9} \rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{4}{x+3} < -\frac{2}{9} \rightarrow \frac{2}{9} < \frac{4}{x+3} < \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow 3 < \frac{x+3}{4} < \frac{9}{2} \rightarrow 9 < x < 15 \rightarrow -1 < 2x - 19 < 11 \rightarrow W = \langle -1; 11 \rangle$$

$$\text{Luego, } W^C = \langle -\infty; -1 \rangle \cup [11; +\infty)$$

$$\rightarrow (T \cap W^C) = \langle -6; -1 \rangle \cup [11; 18)$$

$$Z \cap (T \cap W^C) = \{-5; -4; -3; -2; -1; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17\}$$

$$\rightarrow p = (-5) + (17) = 12$$

$\therefore$ El valor de $p + 3$ es 15.

Rpta. : C

4. En una caja que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular, la longitud de su diagonal es $9\sqrt{3}$ cm. ¿Cuál es el mayor valor que puede admitir el volumen de dicha caja?

- A) 729 cm^3 B) 343 cm^3 C) 648 cm^3 D) 841 cm^3 E) 1089 cm^3

Solución:

Sean a, b y c las dimensiones de dicha caja.

Como la diagonal mide $9\sqrt{3}$ cm se cumple

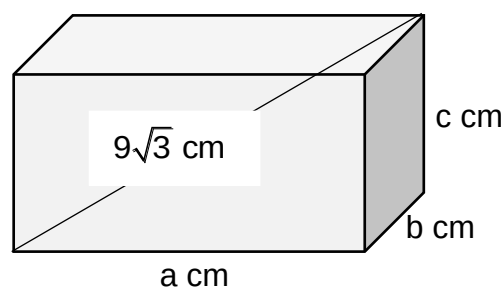
$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 9\sqrt{3} \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 243$$

Luego, apliquemos $MA \geq MG$ para los números a^2, b^2 y c^2 :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}$$

$$\rightarrow 9^3 \geq abc = V_{\text{caja}}$$

$\therefore$ El mayor valor que puede admitir el volumen es 729 cm^3 .

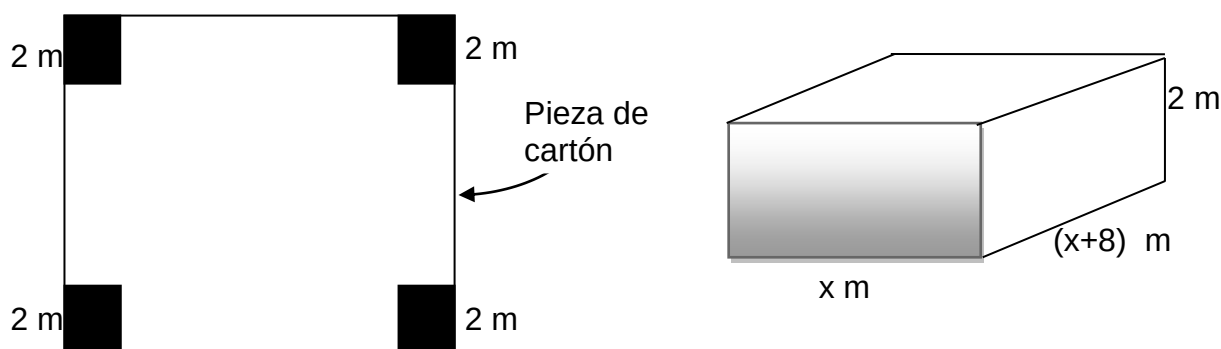


Rpta. : A

5. Para construir una caja cerrada se corta en cada esquina de una pieza rectangular de cartón un cuadrado de 2 m de lado, y las porciones restantes de los lados se doblan hacia arriba, formando las caras laterales de la caja. Se requiere que el largo de la caja sea 8 m más que el ancho y el volumen esté entre 40 y 96 m³. Determine el intervalo que debe satisfacer el largo de la caja formada.

A) $\langle 7;8 \rangle$ B) $\langle 10;12 \rangle$ C) $[7;12]$ D) $[10;12]$ E) $[2;8]$

Solución



* Largo $(x+8)$ m, ancho: x m y la altura: 2 m

→ Volumen = $2x(x+8)$

→ $40 < 2x(x+8) < 96 \rightarrow 20 < x^2 + 8x < 48$

→ $36 < (x+4)^2 < 64$

→ $\underbrace{(-8 < x+4 < -6) \vee (6 < x+4 < 8)}$

→ $6 < x+4 < 8$ (Pues $x > 0$)

→ $10 < x+8 < 12$
Largo

∴ El largo pertenece al intervalo $\langle 10;12 \rangle$.

Rpta. : B

6. Determine el mayor valor que puede tomar la expresión

$$\frac{9a^2 + 3a + 1}{9a^2 + 1}, a \in \mathbb{R}^+.$$

A) 1,2 B) 1,5 C) 1,6 D) 1,9 E) 1,4

Solución:

$$S = \frac{9a^2 + 3a + 1}{9a^2 + 1} = 1 + \frac{3a}{9a^2 + 1} = 1 + \frac{1}{3a + \frac{1}{3a}}$$

Pero $3a + \frac{1}{3a} \geq 2 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$

$$\rightarrow 0 < \frac{1}{3a + \frac{1}{3a}} \leq \frac{1}{2} \rightarrow 1 < 1 + \frac{1}{3a + \frac{1}{3a}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow 1 < S \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore S_{\max} = 1.5.$$

Rpta.: B

7. Simplifique

$$K = \frac{\sqrt{8 + \sqrt{60}} + \sqrt{8 - \sqrt{60}}}{\sqrt{6 + \sqrt{20}} - \sqrt{6 - \sqrt{20}}}.$$

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{5} - 1$ E) $\sqrt{3} - 1$

Solución:

$$\sqrt{8 + \sqrt{60}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{8 - \sqrt{60}} = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{6 + \sqrt{20}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1$$

$$\sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$$

Luego,

$$K = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + 1 - (\sqrt{5} - 1)} = \sqrt{5}$$

$$\therefore K = \sqrt{5}$$

Rpta. : C

8. Si $\frac{3}{\sqrt{14 + 2\sqrt{10}} - \sqrt{56} - \sqrt{140} + \sqrt{7}} = \sqrt{Y - \sqrt{P}}$, halle el valor de $P - Y$.

- A) 30 B) 33 C) 31 D) 32 E) 34

Solución:

$$* \sqrt{14 + 2\sqrt{10} - \sqrt{56} - \sqrt{140}} = \sqrt{\overset{2+5+7}{14} + 2\sqrt{\overset{5.2}{10}} - 2\sqrt{\overset{7.2}{14}} - 2\sqrt{\overset{5.7}{35}}} = \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}$$

$$* \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7} + \sqrt{7}} = \frac{\cancel{3} (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{\underbrace{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})}_3} = \sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{7 - \sqrt{40}}$$

$$\rightarrow Y = 7 \wedge P = 40$$

$$\therefore P - Y = 33$$

Rpta.: B**EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. Determine el valor de verdad (V o F) de las siguientes proposiciones de acuerdo con la secuencia en que aparece cada una.

I Si $a(a-1) < (a-1)$, entonces $a < 1$.

II. Si $T = \frac{2a-1}{a-1}$ y $1 < a < 3$, entonces el menor valor entero que admite T es 3.

III. Si $a^2 + 6a > 1$, entonces $a \in \langle -\infty; -\sqrt{10} - 3 \rangle \cup \langle \sqrt{10} - 3; +\infty \rangle$.

A) VVF

B) VFF

C) FVV

D) VFV

E) FFF

Solución:

I. $a(a-1) < (a-1) \rightarrow (a-1)^2 < 0$ (No existe solución) (F)

$$\text{II. } T = \frac{2a-1}{a-1} = 2 + \frac{1}{a-1}$$

$$1 < a < 3 \rightarrow 0 < a-1 < 2 \rightarrow \frac{1}{a-1} > \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 2 + \frac{1}{a-1} > \frac{5}{2} \quad (\text{V})$$

$$\rightarrow T_{\text{menor entero}} = 3$$

$$\text{III. } a^2 + 6a + 9 > 10 \rightarrow (a+3)^2 > 10$$

$$\rightarrow a+3 > \sqrt{10} \vee a+3 < -\sqrt{10} \quad (\text{V})$$

$$\rightarrow a < -\sqrt{10} - 3 \vee a > \sqrt{10} - 3$$

Rpta.: C

2. Si a , b y c son números reales tales que verifican la siguiente igualdad

$$a^2 + b^2 + c^2 + 8 = 2(a + 2b + 3c) - 6,$$

calcule el número de elementos enteros del conjunto $M = \langle a - b, b + c \rangle \cap \langle a, 2b + c \rangle$.

- A) 3 B) 0 C) 1 D) 2 E) 5

Solución:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 8 = 2(a + 2b + 3c) - 6$$

$$\underbrace{a^2 - 2a + 1} + \underbrace{b^2 - 4b + 4} + \underbrace{c^2 - 6c + 9} = 0$$

$$(a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c - 3)^2 = 0 \rightarrow a = 1, b = 2, c = 3$$

$$M = \langle -1, 5 \rangle \cap \langle 1, 7 \rangle = \langle 1, 5 \rangle$$

$$\rightarrow Z \cap M = \{2, 3, 4\}$$

$$\therefore n(M) = 3.$$

Rpta. : A

3. Dados los conjuntos

$K = \left\{ \frac{16x}{x^2 + 1} \in \mathbb{R} \mid x > 0 \right\}$ y $L = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 \leq x^2 \leq 16\}$, determine la suma de los tres menores elementos enteros de $K \Delta L$.

- A) -2 B) -3 C) -4 D) -5 E) -6

Solución:

* En K :

$$\text{Como } x > 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} \geq 2 \rightarrow 0 < \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 0 < \frac{16x}{x^2 + 1} \leq 8 \rightarrow K = \langle 0; 8 \rangle$$

* En L :

$$9 \leq x^2 \leq 16 \rightarrow (-4 \leq x \leq -3) \vee (3 \leq x \leq 4)$$

$$L = [-4; -3] \cup [3; 4]$$

$$* K \Delta L = (K \cup L) - (K \cap L) = [-4; -3] \cup \langle 0; 3 \rangle \cup \langle 4; 8 \rangle$$

Tres menores elementos enteros: -4 ; -3 y 1 .

$\therefore$ La suma de dichos elementos es -6 .

Rpta.: E

4. Cierta día un estudio determinó que si la entrada al Cine “Ninosk” cuesta “x” soles, el número de asistentes será de $(960 - 60x)$. ¿ Para qué valor de “x” la cantidad de dinero que recaude dicho cine (en tal día) por la venta de las entradas será máxima?

A) 6 B) 10 C) 9 D) 12 E) 8

Solución:

R : Recaudación obtenida

$R = (N^{\circ} \text{ asistentes}) \cdot (\text{Costo de entrada})$

$$R = (960 - 60x)x = 960x - 60x^2$$

$$R = -60(x^2 - 16x), \text{ completando el cuadrado}$$

$$R = 60[64 - (x - 8)^2]$$

Para que R sea máximo, $(x - 8)$ debe ser mínimo

$$\rightarrow x - 8 = 0 \rightarrow x = 8$$

$\therefore$ La cantidad de dinero recaudado será máxima cuando x es 8.

Rpta.: E

5. Una caja con base cuadrada y sin tapa ha de construirse de una pieza cuadrada de hojalata al cortar un cuadrado de 3 metros de cada esquina y doblar los lados. Si la caja tiene un volumen de 48 m^3 , determine la medida del lado de la pieza de hojalata antes de cortar.

A) 10 m B) 8 m C) 9 m D) 11 m E) 7 m

Solución:

Longitud pedida : x

Longitud de cada lado de la base : $(x - 6) \text{ m}$

$$\text{Área de la base : } (x - 6)^2 \text{ m}^2$$

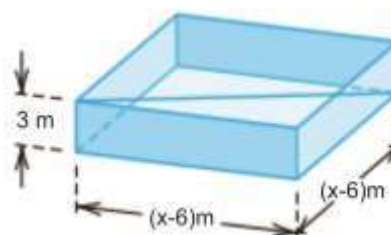
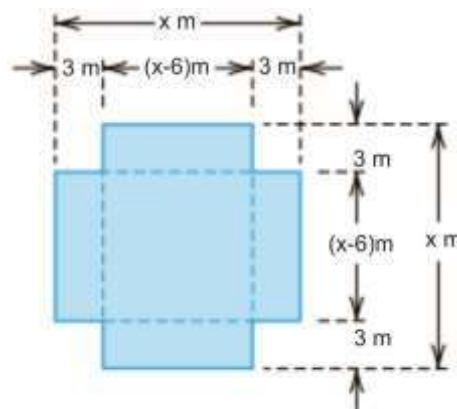
Altura : 3 m

$$\rightarrow V_{\text{Caja}} = 3(x - 6)^2 = 48 \wedge x - 6 > 0$$

$$\rightarrow (x - 6)^2 = 16 \rightarrow x - 6 = \pm 4$$

$$\rightarrow x = 10 \vee x = 2 \quad (\text{Pero } x > 6)$$

$\therefore$ La pieza de hojalata debe ser de 10 metros.



Rpta.: A

6. Sean a , b y c números reales positivos no nulos. Determine el menor valor de

$$K = \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right).$$

- A) 9 B) 10 C) 7 D) 6 E) 8

Solución:

Como $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}_0^+$, entonces $\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} \in \mathbb{R}_0^+$.

Aplicando $MA \geq MG$ para los números a y $\frac{1}{b}$; b y $\frac{1}{c}$; c y $\frac{1}{a}$ se tiene

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{b}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}} > 0$$

$$b + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{c}} = 2\sqrt{\frac{b}{c}} > 0$$

$$c + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{\frac{c}{a}} > 0$$

Multiplicando los resultados de (I), (II) y (III), se tiene

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 8 \rightarrow K_{\text{MENOR}} = 8$$

$\therefore$ El menor valor de K es 8.

Rpta.: E

7. Simplifique

$$Y = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{6 - \sqrt{35}}}{\sqrt{6 + \sqrt{27}} - \sqrt{8 - \sqrt{63}}}.$$

- A) $\sqrt{7}$ B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) 1 E) 0

Solución:

$$*\sqrt{4 + \sqrt{15}} = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$*\sqrt{6 - \sqrt{35}} = \frac{\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$*\sqrt{6 + \sqrt{27}} = \frac{\sqrt{12 + 2\sqrt{27}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$*\sqrt{8 - \sqrt{63}} = \frac{\sqrt{16 - 2\sqrt{63}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

Reemplazando estos resultados en la expresión Y , se tiene

$$\therefore Y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{9} + \sqrt{3} - \sqrt{9} + \sqrt{7}} = 1$$

Rpta.: D

8. Si $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} - \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{8}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}} - 2\sqrt{3} = \sqrt{a - \sqrt{b}}$, halle el valor de $\frac{a+b-2}{a-2}$.

A) 12

B) 7

C) 10

D) 9

E) 11

Solución:

$$*\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

** Calculando "a" y "b"

$$\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{8}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}} - 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{8 - \sqrt{60}} = \sqrt{a - \sqrt{b}} \rightarrow a = 8 \wedge b = 60$$

$$\therefore \frac{a+b-2}{a-2} = \frac{66}{6} = 11.$$

Rpta.: E

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

03

semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

Ecuaciones Lineales y de Segundo Grado con una variable e Inecuaciones Lineales y de Segundo Grado con una variable

1. Ecuaciones Lineales con una incógnita

Una ecuación lineal con una incógnita es de la forma:

$$\boxed{ax + b = 0} \quad \dots (I)$$

donde a y b son constantes y "x" se denomina variable, incógnita ó indeterminada.

1.1 Conjunto Solución: El conjunto formado por todos los valores de "x" que verifican (I) es llamado el conjunto solución (C.S.) de (I).

Observación: Teniendo en cuenta la ecuación (I) se presentan los siguientes casos:

Casos	Regla práctica	Conjunto Solución (C.S.)	
(I) Compatible determinado	i) $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$	$C.S. = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$	(I) presenta solución única.
(I) Compatible indeterminado	ii) $a = 0, b = 0$	$C.S. = \mathbb{R}$	(I) presenta infinitas soluciones.
(I) Incompatible	iii) $a = 0, b \neq 0$	$C.S. = \emptyset$	(I) no existe solución.

Ejemplo 1:

Dos cajas contienen en total 250 manzanas y una de las cajas tiene 50 manzanas más que la otra. ¿Cuál es el valor de la caja que tiene menos manzanas, si una docena de manzanas cuesta 4.20 soles?

Solución:

1era caja: Cantidad de manzanas = x

2da caja: Cantidad de manzanas = x + 50

1) $2x + 50 = 250$

$x = 100$

2) manzanas costo

12 $\rightarrow$ 4.20

100 $\rightarrow$ a

$a = 35$ soles

Ejemplo2:

Si la ecuación en x , $n^2(x+1) = 4x - 2n$ tiene infinitas soluciones, halle el valor o valores de n .

Solución:

De la ecuación resulta $(n^2 - 4)x + n(n+2) = 0$

Para tener infinitas soluciones se cumple

$$n^2 - 4 = 0 \wedge n(n+2) = 0 \Rightarrow [n = 2 \vee n = -2] \wedge [n = 0 \vee n = -2]$$

$$\therefore n = -2.$$

2. Ecuaciones de Segundo Grado

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0, \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$$

donde $\Delta = b^2 - 4ac$ es llamado discriminante de la ecuación de segundo grado.

Esta ecuación tiene dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2.1 Naturaleza de las soluciones

Casos	Tipos de soluciones
$\Delta > 0$	Reales y distintas
$\Delta = 0$	Reales e iguales
$\Delta < 0$	No reales y conjugadas

Además se cumple que: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Observación: Se puede construir una ecuación cuadrática mónica donde m y n sean soluciones, dicha ecuación es:

$$x^2 - (m+n)x + mn = 0$$

Ejemplo 3:

Forme una ecuación donde $5y - 8$ sean las soluciones.

Solución:

La ecuación es:

$$x^2 - [5 + (-8)]x + (5) \cdot (-8) = 0$$

$$\therefore x^2 + 3x - 40 = 0.$$

3. Desigualdades e Inecuaciones

3.1 Desigualdades: Son aquellas expresiones de la forma:

$a < b$ ó $a \leq b$ ó $a > b$ ó $a \geq b$, donde a y b son números reales

3.1.1 Propiedades

- i) Si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$.
- ii) Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$; $\forall c \in \mathbb{R}$.
- iii) Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
- iv) Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$.

3.2 Inecuaciones Lineales con una variable

Son aquellas desigualdades que presentan una incógnita o variable y que pueden reducirse a la forma:

$$ax + b \geq 0 ; ax + b \leq 0 ; ax + b > 0 ; ax + b < 0 ; a \neq 0 \wedge b \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 4:

Halle el número de elementos enteros del conjunto $N = \left\{ x \in \mathbb{R}^- / \frac{1}{x}(3x + 51) < 0 \right\}$.

Solución:

$$\frac{1}{x}(3x + 51) < 0 \rightarrow 3x + 51 > 0 \rightarrow 3x > -51 \rightarrow x > -17$$

$$\rightarrow N = \langle -17, 0 \rangle$$

$\therefore$ El número de elementos enteros de N es 16.

Ejemplo 5:

Noelia decide ir con sus amigas a un campeonato de vóley a realizarse en el coliseo Eduardo Dibós, ella tiene 120 soles. Si compra las entradas a 25 soles le falta dinero, pero si compra entradas a 20 soles le sobra, ¿con cuántas amigas Noelia va al campeonato?

Solución:

Sea x el número de amigas de Noelia que va al campeonato

$$25(x+1) > 120 \quad \dots(I)$$

$$20(x+1) < 120 \dots(II)$$

$$\text{De (I): } x+1 > \frac{24}{5} \Rightarrow x > \frac{19}{5}$$

$$\text{De (II): } x < 5$$

$$\Rightarrow \frac{19}{5} < x < 5 \Rightarrow x = 4$$

$\therefore$ Noelia fue con 4 amigas al campeonato.

4. Inecuaciones de Segundo Grado

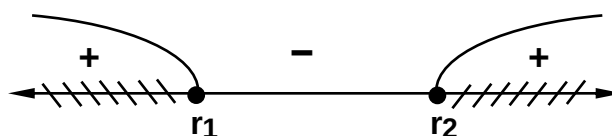
$$ax^2 + bx + c \geq 0 ; (\leq 0, > 0, < 0) \quad a \neq 0, a > 0, a, b, c \in \mathbb{R}; (*)$$

Para resolver (*) se presentan los siguientes casos:

CASO I. Cuando $\Delta = b^2 - 4ac > 0$,

resolveremos la inecuación aplicando puntos críticos

I.1) Si $ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow a(x-r_1)(x-r_2) \geq 0$ donde r_1 y r_2 son llamados puntos críticos; supongamos que $r_1 < r_2$; luego en la recta real se colocará los puntos y entre los puntos los signos (+), (-) y (+) alternadamente comenzando por la derecha y siempre con el signo (+)



Luego el conjunto solución de la inecuación I.1) será los intervalos con signos positivos

$$\text{C.S.} = \langle -\infty, r_1 \rangle \cup [r_2, +\infty).$$

$$\text{I.2) Si } ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow \text{C.S.} = \langle -\infty, r_1 \rangle \cup \langle r_2, +\infty \rangle$$

$$\text{I.3) Si } ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow \text{C.S.} = [r_1, r_2]$$

$$\text{I.4) Si } ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow \text{C.S.} = \langle r_1, r_2 \rangle$$

Ejemplo 6:

Resuelva las inecuaciones:

a) $x^2 - 6x - 27 \geq 0$

b) $x^2 - 2x - 80 \leq 0$

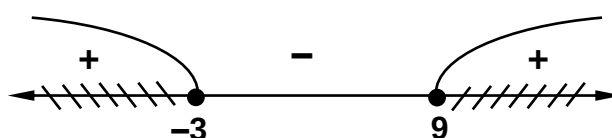
Solución:

a) $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(-27) = 144 > 0$

Factorizando por aspa simple: $(x - 9)(x + 3) \geq 0$

Luego los puntos críticos son : -3 y 9 .

Gráficamente:



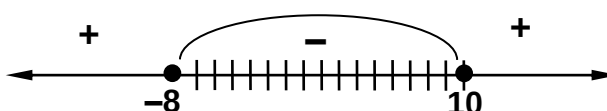
$$\therefore \text{C.S.} = \langle -\infty, -3 \rangle \cup [9, +\infty)$$

b) $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-80) = 324 > 0$

Factorizando por aspa simple: $(x - 10)(x + 8) \leq 0$

Luego, los puntos críticos son : -8 y 10 .

Gráficamente:



$$\therefore \text{C.S.} = [-8, 10].$$

CASO II. Cuando $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

II.1) Si $ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow \text{C.S.} = \mathbb{R}$

II.2) Si $ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow \text{C.S.} = \mathbb{R}$

II.3) Si $ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow \text{C.S.} = \emptyset$

II.4) Si $ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow \text{C.S.} = \emptyset$

Ejemplo 7:

Resuelva la inecuación $3x^2 - 2x + 1 > 0$.

Solución:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(1) = -8 < 0 \Rightarrow 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{3}{9} + 1 > 0$$

$$\Rightarrow 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{C.S.} = \mathbb{R}.$$

CASO III. Cuando $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$$\text{III.1) Si } ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow a(x-r)^2 \geq 0 \rightarrow \text{C.S.} = \mathbb{R}$$

$$\text{III.2) Si } ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow a(x-r)^2 > 0 \rightarrow \text{C.S.} = \mathbb{R} - \{r\}$$

$$\text{III.3) Si } ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow a(x-r)^2 \leq 0 \rightarrow \text{C.S.} = \{r\}$$

$$\text{III.4) Si } ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow a(x-r)^2 < 0 \rightarrow \text{C.S.} = \emptyset$$

Ejemplo 8:

Resuelva la inecuación $4x^2 + 12x + 9 \leq 0$.

Solución:

$$\Delta = (12)^2 - 4(4)(9) = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 \leq 0 \Rightarrow (2x+3)^2 \leq 0 \text{ sabemos que } (2x+3)^2 \geq 0$$

Así, tenemos que :

$$0 \leq (2x+3)^2 \leq 0 \Rightarrow 2x+3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \text{C.S.} = \left\{-\frac{3}{2}\right\}.$$

4.1 Teorema (Trinomio Positivo)

Sea $ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$, se cumple que:

$$ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a > 0 \wedge \Delta < 0.$$

Ejemplo 9:

Resolver la inecuación $x^2 + 5x + 8 > 0$

Solución:

La inecuación $x^2 + 5x + 8 > 0$ tiene como conjunto solución a $\mathbb{R}$ puesto que por el teorema del trinomio positivo $\Delta = (5)^2 - 4(1)(8) < 0$ y su coeficiente principal 1 es positivo.

Álgebra

EJERCICIOS

1. Sofía vende panes con pollo al precio de $(x+2)$ soles cada uno, el día de hoy vendió $(x+10)$ panes con pollo y no obtuvo ni ganancia ni pérdida, si cada pan con pollo le costo (x^2) soles y además el precio de venta de cada pan con pollo es más de un sol, determine cuántos panes con pollo vendió Sofía hoy.

A) 12

B) 10

C) 9

D) 14

Solución:

Cantidad de panes con pollo: $x+10$ Precio de venta unitario: $x+2$ Costo unitario: x^2

1) Ingreso = Costo

$$(x+2)(x+10) = x^2(x+10)$$

$$\underbrace{x = -10}_{x \neq -10}$$

precio de venta es positivo

$$\vee \quad x^2 = x+2$$

$$x = 2 \quad \vee$$

$$\underbrace{x = -1}$$

precio de venta de cada pan
es mas de 1 sol $\rightarrow x \neq -1$ $x = 2 \rightarrow$

precio de venta unitario	precio de costo unitario	cantidad de panes
4	4	12

Rpta: A

2. Lucía gasta 200 soles en la compra de cuadernos de la misma marca y tipo. Si hubiera comprado cinco cuadernos menos con el mismo monto, cada cuaderno hubiera costado 2 soles más. ¿Cuánto le costó cada cuaderno a Lucía?

A) 4 soles

B) 8 soles

C) 10 soles

D) 5 soles

Solución:

Cantidad de cuadernos que compra: x

Precio de costo de cada cuaderno : $\frac{200}{x}$

Cantidad de cuadernos que hubiera comprado: $x - 5$

Precio de costo de cada cuaderno hubiera sido : $\frac{200}{x} + 2$

$$\left(\frac{200}{x} + 2 \right) (x - 5) = 200$$

$$(x - 5)(2x + 200) = 200x$$

$$x^2 - 5x - 500 = 0$$

$$x = 25 \vee x = -20$$

$\therefore$ Precio de costo de cada cuaderno es: $\frac{200}{25}$ soles = 8 soles.

Rpta.: B

3. Las dimensiones de la base de un paralelepípedo rectangular son $(3a)$ y (b) metros donde -4 y a son soluciones de $3x^2 + bx - 20 = 0$, determine la medida máxima de la altura del paralelepípedo rectangular, si su volumen no es mayor a 210 metros cúbicos.

A) 4 metros B) 7 metros C) 5 metros D) 6 metros

Solución:

1) $3x^2 + bx - 20 = 0$

Como -4 es solución $\rightarrow 3(-4)^2 + b(-4) - 20 = 0$

$$4b = 28$$

$$b = 7.$$

Reemplazando :

$$3x^2 + 7x - 20 = 0$$

$$3x \quad -5$$

$$x \quad +4$$

$$x = \frac{5}{3} \vee x = -4$$

2) $a = \frac{5}{3}$

3) Volumen ≤ 210

$$3a(b)h \leq 210$$

$$3\left(\frac{5}{3}\right)(7)h \leq 210$$

$$h \leq 6$$

$$\therefore h_{\text{máximo}} = 6.$$

Rpta.: D

4. Si la ecuación en x , $x^2 + bx + 2 = 0$ tiene soluciones consecutivas, halle el mayor valor de b .

A) 1

B) 3

C) 2

D) 4

Solución:

$$x^2 + bx + 2 = 0$$

Sean a y $a+1$ las soluciones

1) $a + a + 1 = -b$

$$\rightarrow b = -(2a + 1) \quad \dots (*)$$

$$2) a(a+1) = 2$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow (a = -2 \vee a = 1)$$

$$a + 2$$

$$a - 1$$

Reemplazando en (*):

$$\text{Si } a = -2 \rightarrow b = 3$$

$$\text{Si } a = 1 \rightarrow b = -3$$

$\therefore$ El mayor valor de b es 3.

Rpta.: B

5. Dada la ecuación cuadrática en x , $ax^2 + 4x + a = 0$, de soluciones reales diferentes y negativas, tal que a es entero, determine el conjunto solución de la ecuación cuadrática.

$$A) \{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$$

$$B) \{-2 + \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}\}$$

$$C) \{-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}$$

$$D) \{-4 - \sqrt{12}, -4 + \sqrt{12}\}$$

Solución:

$$\Delta > 0$$

$$16 - 4a^2 > 0$$

$$4 - a^2 > 0$$

$$a \in \langle -2, 2 \rangle$$

$$a = -1 \vee a = 0 \vee a = 1$$

a es diferente de cero
debido a que la ecuación es cuadrática

$$\text{Si } a = -1$$

$$-x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \underbrace{2 + \sqrt{3}}_{\text{solución positiva}} \vee x = \underbrace{2 - \sqrt{3}}_{\text{solución positiva}}$$

por dato las soluciones son negativas

Si $a = 1$

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x = -2 + \sqrt{3} \vee x = -2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{-2 + \sqrt{3} ; -2 - \sqrt{3}\}.$$

Rpta.: C

6. Juan tiene monedas de dos soles y cinco soles. Si la cantidad de monedas de dos soles excede a la cantidad de monedas de 5 soles en 3. Además él tiene más de 41 soles y tiene menos de 17 monedas, calcule cuánto dinero tiene Juan.

A) 48 soles B) 41 soles C) 55 soles D) 34 soles

Solución:

Cantidad de monedas de 2 soles: $x+3$

Cantidad de monedas de 5 soles: x

$$2(x+3) + 5x > 41 \dots\dots\dots(1)$$

$$x+3 + x < 17 \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{De(1): } x > 5$$

$$\text{De(2): } x < 7$$

$$5 < x < 7$$

$$x = 6$$

Cantidad de monedas de 2 soles: 9

Cantidad de monedas de 5 soles: 6

$\therefore$ Juan tiene $[9(2) + 5(6)]$ soles = 48 soles.

Rpta.: A

7. Un número entero es tal que su cuadrado, aumentado en dos es menor que el séxtuplo, de dicho número disminuido en uno, determine el séxtuplo de dicho número, disminuido en uno.

A) 17 B) 23 C) 18 D) 12

Solución:Número: x

$$x^2 + 2 < 6(x - 1)$$

$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

$$x - 4$$

$$x - 2$$

$$(x - 4)(x - 2) < 0$$

$$x = 3$$

$$\therefore 6(3) - 1 = 17$$

Rpta.: A

8. Dada la ecuación cuadrática en x , $ax^2 + 2(a+3)(x+1) = 0$ con soluciones reales e iguales. Determine el valor de verdad de las proposiciones en el orden respectivo.

I. a no es real.II. $a = 3 \vee a = -3$.III. Si a es negativo entonces $C.S = \{0\}$ IV. Si a es positivo entonces $C.S = \{2\}$

A) VFVF

B) FVFV

C) FVVV

D) FVVF

Solución:

$$ax^2 + 2(a+3)x + 2(a+3) = 0$$

$$1) \Delta = 0$$

$$[2(a+3)]^2 - 4a[2(a+3)] = 0$$

$$4(a+3)(a+3-2a) = 0$$

$$(a+3)(-a+3) = 0$$

$$(a+3)(a-3) = 0$$

$$a = -3 \vee a = 3$$

$$2) \text{ Si } a = 3 \rightarrow 3x^2 + 12x + 12 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$C.S = \{-2\}$$

$$3) \text{ Si } a = -3 \rightarrow -3x^2 + 0x + 0 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$C.S = \{0\}$$

- I. a no es real. (F)
II. $a=3 \vee a=-3$. (V)
III. Si a es negativo entonces $C.S = \{0\}$ (V)
IV. Si a es positivo entonces $C.S = \{2\}$ (F)

Rpta.:D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si a y $(b+1)$ son soluciones de $x^2 - x - 12 = 0$, determine el mínimo valor de $a(b+2) + b - a$.

- A) -9 B) -16 C) -11 D) -13

Solución:

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x \quad -4$$

$$x \quad +3$$

$$x = 4 \vee x = -3$$

Caso 1:

$$a = 4 \wedge b + 1 = -3$$

$$a = 4 \wedge b = -4$$

$$\therefore a(b+2) + b - a = -16$$

Caso 2:

$$a = -3 \wedge b + 1 = 4$$

$$a = -3 \wedge b = 3$$

$$\therefore a(b+2) + b - a = -9$$

$\therefore$ El mínimo valor de $a(b+2) + b - a$ es -16.

Rpta.: B

2. Si José compró una casaca al precio de $(a+b)^2$ soles y una camisa al precio de $(6-ab)$ soles donde a y b son soluciones de la ecuación $(x-5)(x-7) - 99 = 0$, ¿cuánto gastó José, por la compra de ambas prendas de vestir?

- A) 207 soles B) 470 soles. C) 214 soles D) 310 soles

Solución:

$$x^2 - 12x - 64 = 0$$

$$\text{Soluciones} = \{ a ; b \}$$

$$1) a + b = 12$$

$$2) ab = -64$$

$$\text{Precio de la casaca} = (12)^2 \text{ soles} = 144 \text{ soles}$$

$$\text{Precio de la camisa} = (6 + 64) \text{ soles} = 70 \text{ soles}$$

∴ José gastó 214 soles.

Rpta.: C

3. Melisa obtuvo un ingreso de “m” soles por la venta de “n” docenas de prendas (entre blusas y camisas). Si el precio de venta de cada blusa es “a” soles y el precio de venta de cada camisa es “b” soles; ($a \neq b$), ¿cuántas camisas vendió Melisa?

A) $\frac{12na - m}{a - b}$

B) $\frac{12nb - m}{a - b}$

C) $\frac{12ma - n}{a - b}$

D) $\frac{12ma - n}{a - b}$

Solución:

	cantidad	precio de venta (unitario)	Ingreso
camisas	x	b	bx
blusas	12n - x	a	a(12n - x)

$$\text{Ingreso} = m$$

$$bx + a(12n - x) = m$$

$$x = \frac{12an - m}{a - b}$$

Rpta.: A

4. La edad de Valeria hace 5 años es tal que, el cuadrado de dicha edad, disminuido en 13, es igual al duodécuplo, del exceso de dicha edad sobre el opuesto aditivo de 20, determine la edad de Valeria dentro de 5 años.

A) 33 años

B) 23 años

C) 28 años

D) 18 años

Solución:

Sea: x la edad de Sofía hace 5 años

$$x^2 - 13 = 12(x - (-20))$$

$$x^2 - 12x - 253 = 0$$

$$(x + 11)(x - 23) = 0$$

$$x = -11 \vee x = 23$$

∴ Edad actual de Valeria es 28 años, entonces dentro de 5 años tendrá 33 años.

Rpta.: A

5. El promedio aritmético de los valores enteros que toma k , para que la ecuación cuadrática $x^2 - (k - 4)x + k - 4 = 0$ tenga soluciones no reales, es el número de alumnos que aprobaron el curso de Matemática Básica. Si el total de alumnos que llevaron dicho curso es el quíntuplo del menor valor entero que toma k , ¿cuántos no aprobaron dicho curso?

A) 13 B) 15 C) 20 D) 19

Solución:

La ecuación cuadrática dada, tiene soluciones no reales,

$$\Delta < 0$$

$$[-(k - 4)]^2 - 4(1)(k - 4) < 0$$

$$k^2 - 8k + 16 - 4k + 16 < 0$$

$$k^2 - 12k + 32 < 0$$

$$(k - 4)(k - 8) < 0$$

$$4 < k < 8 \wedge k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 5 \wedge k = 6 \wedge k = 7$$

Luego, deducimos:

i) Número de alumnos que llevaron el curso: $5(5) = 25$

ii) Número de alumnos que aprobaron el curso: $\frac{5 + 6 + 7}{3} = 6$

$\therefore$ Desaprobaron el curso 19 alumnos.

Rpta.: D

6. Carmela compra manzanas y peras. Por cada 5 manzanas que compra le regalan una manzana. Y por cada docena de peras que compra le regalan dos peras. El precio de costo de cada manzana es de 2 soles y el precio de costo de cada pera es un sol más que el precio de costo de cada manzana. Si en total Carmela recibió 54 frutas y gastó 128 soles, determine la cantidad de manzanas que ella recibió.

A) 14 B) 10 C) 12 D) 18

Solución:

	cantidad de grupos	cantidad de frutas que le regalan
manzanas	a	a
peras	b	2b

$$5a(2) + 12b(3) = 128 \dots\dots\dots (1)$$

$$6a + 14b = 54 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{De (2): } b = \frac{54 - 6a}{14}$$

Reemplazando en (1):

$$10a + 36\left(\frac{54 - 6a}{14}\right) = 128$$

$$76 = 38a$$

$$a = 2$$

∴ El número de manzanas que recibe Carmela es: $5(2) + 2 = 12$.

Rpta.: C

7. En la inecuación en x , $\frac{a}{x-1} + \frac{x}{a} > 0$ determine la suma de las tres mayores soluciones enteras, donde $a < -\frac{1}{2}$.

A) -3

B) -6

C) -9

D) 6

Solución:

$$\frac{a}{x-1} + \frac{x}{a} > 0.$$

$$\frac{a^2 + x^2 - x}{a(x-1)} > 0$$

$$\frac{\overbrace{x^2 - x + a^2}^{\text{trinomio positivo}}}{(x-1)} < 0$$

$$\frac{1}{x-1} < 0$$

$$x < 1$$

∴ La suma de las tres mayores soluciones enteras es: $-2 - 1 + 0 = -3$.

Rpta.: A

8. Si $a^2x^2 + 4abx + 1 = 0$(*) tiene soluciones reales y diferentes, y $bx^2 + 2x + a = 0$(**) tiene soluciones reales e iguales con a y $b \in \mathbb{Z}^+$, determine el valor de verdad de las proposiciones en el orden respectivo.

I. La suma de las soluciones de la ecuación (*) es 4.

II. El conjunto solución de la ecuación (**) es $\{-1\}$.

III. $ab = 1$.

IV. El producto de las soluciones de la ecuación (*) es -1.

A) FFVF

B) FFVV

C) FFFV

D) FVVF

Solución:

$$1) bx^2 + 2x + a = 0 \dots\dots\dots(**)$$

$$\Delta = 0$$

$$(2)^2 - 4(b)a = 0$$

$$ab = 1$$

$$2) a^2x^2 + 4abx + 1 = 0 \dots\dots\dots(*)$$

$$\Delta \geq 0$$

$$(4ab)^2 - 4a^2(1) \geq 0$$

$$16 - 4a^2 \geq 0$$

$$4 - a^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2^2 \leq 0$$

$$(a + 2)(a - 2) \leq 0$$

$$a \in [-2 ; 2]$$

$$a = 1 \wedge b = 1$$

Reemplazando :

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \dots\dots\dots(**)$$

$$C.S. = \{-1\}$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \dots\dots\dots(*)$$

$$\text{Suma de soluciones} = -4$$

$$\text{Producto de soluciones} = 1.$$

Rpta.: D

Álgebra

EJERCICIOS

1. Una compañía de servicio de taxis tiene una política de cobrar \$5 por contratar su servicio y por cada kilómetro de recorrido, en su servicio, tiene un costo adicional de \$2. Si Juan contrató dicho servicio y al llegar a su destino pagó en total \$75, ¿cuántos kilómetros recorrió el taxista?

A) 40 km B) 30 km C) 25 km D) 35 km

Solución

Sea x el número de kilómetros recorrido por Juan:

$$5 + 2x = 75$$

$$x = 35$$

Rpta: D

2. Por un pedido especial de un grupo de clientes, un bartender prepara un trago compuesto en su totalidad por pisco quebranta y vodka. ¿Cuántos mililitros de pisco quebranta al 42% de alcohol deberá mezclar el bartender con vodka al 56% de alcohol para obtener un vaso de dicho trago con 100 mililitros de volumen al 49% de alcohol?

A) 20 ml B) 50 ml C) 30 ml D) 35 ml

Solución:

Sea

x : N° mililitros de pisco quebranta al 42%

$100 - x$: N° mililitros de vodka al 56%

$$\frac{42(x) + 56(100 - x)}{100} = \frac{49}{100} \cdot 100$$

$$6x + 8(100 - x) = 700$$

$$\rightarrow 6x + 800 - 8x = 700$$

$$\rightarrow x = 50$$

∴ En un vaso de 100 ml de dicho trago tiene 50 ml. de pisco quebranta.

Rpta.:B

3. El área total de dos parcelas de forma cuadrada es de $26\,500 \text{ m}^2$. Si la longitud del lado de una parcela excede a la longitud del lado de la otra en 10 m, ¿cuál es el perímetro de la parcela de mayor longitud de su lado?

A) 520 m B) 400 m C) 440 m D) 480 m

Solución:

Sean x y $(x + 10)$ las longitudes (en metros) de los lados de las parcelas de forma cuadrada

$$x^2 + (x + 10)^2 = 26\,500$$

$$\rightarrow x^2 + x^2 + 20x + 100 = 26\,500$$

$$\rightarrow x^2 + 10x - 13\,200 = 0 \rightarrow x = 110$$

$$x \quad 120$$

$$x \quad -110$$

$\therefore$ Perímetro de la parcela de mayor longitud de su lado es: $4(x + 10) = 480$ m

Rpta.: D

4. En la clase de álgebra se dejaron como tarea 2 ejercicios. Si Juanita responde el primer ejercicio que consiste en encontrar el conjunto $J = \left\{ k \in \mathbb{R} / x^2 - 3kx + \left(\frac{5}{4} - 11k \right) = 0 \text{ no tiene soluciones reales} \right\}$ y n el número de elementos enteros de J , después con la información obtenida debe resolver el segundo ejercicio que consiste en analizar la ecuación $(n-1)x^2 + 3nx - (n+2) = 0$. ¿Qué respuesta dio Juanita con respecto al segundo ejercicio?

A) La ecuación tiene una solución real igual a 1.

B) La ecuación tiene soluciones no reales tal que la suma es $-\frac{15}{4}$ y el producto es $-\frac{7}{4}$.

C) La ecuación tiene soluciones reales y diferentes tal que la suma es -15 y el producto es -7.

D) La ecuación tiene soluciones reales y diferentes tal que la diferencia al cuadrado de sus soluciones es $\frac{337}{16}$.

Solución:

$$I) J = \left\{ k \in \mathbb{R} / x^2 - 3kx + \left(\frac{5}{4} - 11k \right) = 0 \text{ no tiene soluciones reales} \right\}$$

$$\Delta = (-3k)^2 - 4\left(\frac{5}{4} - 11k\right) < 0$$

$$\rightarrow 9k^2 + 44k - 5 < 0 \rightarrow (9k - 1)(k + 5) < 0$$

$$\rightarrow -5 < k < \frac{1}{9} \rightarrow J = \left\langle -5, \frac{1}{9} \right\rangle, n = 5$$

$$\text{II) } (n-1)x^2 + 3nx - (n+2) = 0 \dots (*)$$

$$\rightarrow 4x^2 + 15x - 7 = 0$$

$$\text{Discriminante} = (15)^2 - 4(4)(-7) = 337 > 0$$

$\rightarrow$ La ecuación tiene soluciones reales y diferentes

III) Si x_1 y x_2 son soluciones de (*)

$$\rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{15}{4}, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{7}{4}$$

Además

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 x_2$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \left(-\frac{15}{4}\right)^2 - 4\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{337}{16}$$

Rpta : D

5. Si $\frac{-5(\sqrt{5}+a)(\sqrt{5}-a)}{a^2b-ab}$ y $\frac{5(\sqrt{5}+b)(\sqrt{5}-b)}{ab^2-ab}$ son las medidas, en metros, de los

lados de un terreno rectangular, donde a y b son soluciones de la ecuación $7x^2 - 6x - 5 = 0$, tal que $a > b$, halle el perímetro de dicho terreno.

A) 48 m

B) $48\sqrt{11}$ m

C) 72 m

D) $24\sqrt{11}$ m

Solución:

Por la relación entre los coeficientes y las soluciones

$$a + b = \frac{6}{7}$$

$$ab = -\frac{5}{7}$$

Además, si a es solución entonces

$$7a^2 - 6a - 5 = 0 \rightarrow 6a^2 - 6a = 5 - a^2$$

$$\rightarrow \frac{6}{b} = \frac{(\sqrt{5}+a)(\sqrt{5}-a)}{a^2b-ab} \rightarrow \frac{-30}{b} = \frac{-5(\sqrt{5}+a)(\sqrt{5}-a)}{a^2b-ab}$$

Además

$$\frac{6}{a} = \frac{(\sqrt{5}+b)(\sqrt{5}-b)}{b^2a-ab} \rightarrow \frac{30}{a} = \frac{5(\sqrt{5}+b)(\sqrt{5}-b)}{b^2a-ab}$$

Luego

$$\text{Perímetro} = 2 \left\{ \frac{-30}{b} + \frac{30}{a} \right\} = 2 \left\{ -30 \left[\frac{a-b}{ab} \right] \right\}$$

Como

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \rightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^2 - (a-b)^2 = 4\left(-\frac{5}{7}\right) \rightarrow (a-b) = \frac{4\sqrt{11}}{7}$$

$$\text{Perímetro} = 2 \left\{ -30 \left[\frac{\frac{4\sqrt{11}}{7}}{-\frac{5}{7}} \right] \right\} = 48\sqrt{11} \text{ m.}$$

Rpta : B

6. Un empresario de Gamarra fabrica polos que tienen un precio de venta de S/ 55 y un costo unitario de S/ 35. Mensualmente, por el alquiler del local de venta paga S/ 1000, por el pago al personal el gasto asciende a S/ 6000 y otros gastos son de S/ 5000. Determine el mínimo número de polos que el empresario debe fabricar y vender, mensualmente, para que obtenga ganancia.

A) 600 B) 599 C) 601 D) 200

Solución:

Sea q la cantidad de polos

el costo total C será

$$C = 35q + 12000$$

el precio de venta total V

$$V = 55q$$

Luego la ganancia total G

$$G = V - C = 20q - 12000$$

$$\Rightarrow 20q - 12000 > 0 \Rightarrow q > 600$$

$\therefore$ 601 polos como mínimo.

Rpta.:C

7. Una vaca atada a una cuerda de $\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}\right)$ metros de longitud, sujeta a una estaca en un punto fijo, comió todo el pasto que está a su alcance. ¿Cuántos metros como mínimo se debe de extender la cuerda para que la vaca tenga por lo menos 91 metros cuadrados de nuevo pasto a comer?

- A) $7\sqrt{\pi}$ metros
 B) $\frac{7\sqrt{\pi}}{\pi}$ metros
 C) $\left(\frac{10\sqrt{\pi}}{\pi} + 3\right)$ metros
 D) $\left(\frac{7\sqrt{\pi}}{\pi} + 3\right)$ metros

Solución:

Sea x en metros la longitud de la cuerda a extender

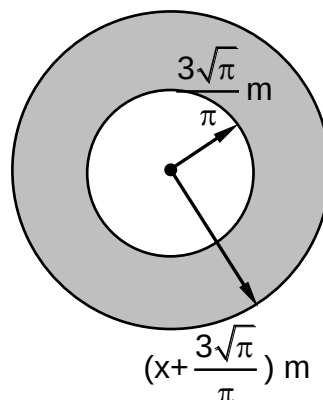
$$\text{Área} \geq 91$$

$$\pi \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi} + x \right)^2 - \pi \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi} \right)^2 \geq 91$$

$$\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi} + x \right)^2 \geq \frac{100}{\pi}$$

$$\rightarrow \frac{3\sqrt{\pi}}{\pi} + x \geq \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi} \vee \frac{3}{\sqrt{\pi}} + x \leq -\frac{10\sqrt{\pi}}{\pi} \rightarrow x \geq \frac{7\sqrt{\pi}}{\pi}$$

$$\therefore x_{\min} = \frac{7\sqrt{\pi}}{\pi}$$

**Rpta.:B**

8. Miguelito invitó a todos sus hermanos y a cinco amigos a un evento deportivo, donde el costo de cada entrada (en soles) coincide con el número de hermanos que tiene Miguelito y por ello gastaría más de 40 soles, pero ninguno de sus amigos pudo asistir, así que Miguelito fue solamente con sus hermanos y gastó menos de 42 soles, ¿cuál es el número de hermanos que tiene Miguelito?
- A) 4 B) 7 C) 6 D) 5

Solución:

Sea x el número de hermanos que tiene Miguelito

$$\text{I) } x(x+1+5) > 40 \rightarrow x^2 + 6x - 40 > 0$$

$$\rightarrow (x+10)(x-4) > 0 \rightarrow (x < -10 \vee x > 4)$$

$$\text{II) } x(x+1) < 42 \rightarrow x^2 + x - 42 < 0$$

$$\rightarrow (x+7)(x-6) < 0 \rightarrow -7 < x < 6$$

$$\text{De I) y II) } 4 < x < 6 \rightarrow x = 5$$

Rpta.:D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Por hacer un show para el cumpleaños de Miguelito, se sabe que el payaso Ricotín cobró S/ 125 más que su colega Ricotón. Si el triple del dinero que cobró Ricotón sumado con el doble de lo que cobró Ricotín es S/ 900 en total, ¿cuánto cobró el payaso Ricotín por dicho show?

A) S/ 255 B) S/ 225 C) S/ 200 D) S/ 275

Solución:

Sean

 x : Dinero que cobró Ricotón $x + 125$: Dinero que cobró Ricotín

$$3x + 2(x + 125) = 900 \rightarrow 5x + 250 = 900$$

$$\rightarrow x = \frac{650}{5} = 130$$

∴ El payaso Ricotín cobró S/ 255 por hacer dicho show.

Rpta.:A

2. El profesor de Matemática 1, evalúa a sus 70 alumnos entre hombres y mujeres; de las mujeres aprobaron el 80% y únicamente el 10% de los hombres. Si el número de aprobados es el 70% del total. Halle la suma de los hombres aprobados y mujeres desaprobadas.

A) 12 B) 14 C) 13 D) 8

Solución:Número de mujeres = x , Número de hombres = $70 - x$

$$\text{Dato: } 10\%(70 - x) + 80\%x = 70\%.70$$

$$x = 60$$

Mujeres que desaprobaban : $20\%(60) = 12$ Hombres que aprobaron : $10\%(10) = 1$

$$\therefore 12 + 1 = 13$$

Rpta.: C

3. Las medidas, en metros, de los lados de un triángulo, están dadas por m , $-n$ y 2 . Si se cumple que el conjunto solución de la inecuación lineal en x , $(m-6)x^2 + 4x - 8 \geq n$ es $\left[\frac{m}{m+2}, +\infty\right)$, determine el perímetro de dicho triángulo.
- A) 13 metros B) 12 metros C) 9 metros D) 6 metros

Solución:

Si la inecuación $(m-6)x^2 + 4x - 8 \geq n$ es lineal $\rightarrow m = 6$

$$\rightarrow 4x - 8 \geq n \rightarrow x \geq \frac{n+8}{4} \rightarrow \text{CS} = \left[\frac{n+8}{4}, +\infty\right)$$

$$\rightarrow \frac{m}{m+2} = \frac{n+8}{4} \rightarrow n = -5$$

$\therefore$ Perímetro del triángulo es : $m + (-n) + 2 = 13$

Rpta.: A

4. Una editorial elabora solo libros de una misma colección. Debido al alza de precio de insumos, el precio de costo de un libro de colección fue aumentado en 60 soles. Si la editorial produce una cantidad de libros de colección que es numéricamente igual a la mitad del precio de costo unitario inicial, aumentado en 10, entonces el costo total será de 72 000 soles. ¿Cuál es el precio del costo unitario inicial del libro de colección?

- A) 340 soles B) 240 soles C) 440 soles D) 400 soles

Solución:

Sean

x : Precio de costo inicial de cada libro

$x + 60$: Nuevo precio de costo de cada libro de colección

$$\rightarrow \left(\frac{x}{2} + 10\right)(x + 60) = 72\,000$$

$$\rightarrow (x + 20)(x + 60) = 144\,000$$

$$\rightarrow x^2 + 80x - 142800 = 0$$

$$x \quad -340$$

$$x \quad 420$$

$$\rightarrow x = 340$$

$\therefore$ El costo inicial de cada libro es de 340 soles.

Rpta.: A

5. Jaime decide dar un paseo en una lancha de motor por el río Mayo. Después de recorrer m kilómetros a favor de la corriente decide regresar a su punto de partida. Su paseo duró cinco horas y la corriente del río se movía a una velocidad constante de 1 kilómetro por hora. Si en todo el trayecto la velocidad de la lancha (de valor numérico entero) fue el mismo, determine dicha velocidad en aguas tranquilas.

A) 5 km/h

B) 3 km/h

C) 7 km/h

D) 4 km/h

Solución:

Sea r (en km/h): velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

- En trayectoria de ida

(a favor de la corriente) : velocidad = $r+1$, entonces, tiempo = $\frac{m}{r+1}$

- En trayectoria de regreso

(en contra de la corriente) : velocidad = $r-1$, entonces, tiempo = $\frac{m}{r-1}$

$$\frac{m}{r+1} + \frac{m}{r-1} = 5$$

$$\rightarrow 2mr = 5(r^2 - 1)$$

$$\rightarrow 5r^2 - 2mr - 5 = 0 \text{ ; aplicamos aspa simple :}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 5r & & -5 & o & 5 & o & 1 & o & -1 \\ r & & 1 & & -1 & & -5 & & 5 \end{array}$$

Dado que el valor de r es entero y m es positivo, de los cuatros casos que se presentan solo se cumple en el 3er caso, donde $r = 5$.

Rpta.: A

6. El equipo A se enfrenta al equipo B en la final de un torneo de futbol. Una casa de apuestas pagará el triple de lo apostado si el equipo A campeona, y el cuádruple si el equipo B campeona. Alonso apostó $(3a + 3b)$ cientos de soles y Lucio $(2ab)$ cientos de soles, al equipo A y B respectivamente. Finalizado el partido el equipo A marcó $(R+2)$ goles y el equipo B anotó $(-2 - 6L)$ goles. Si a y b son soluciones de la ecuación $x^2 - x + 2 = 0$, además $R = \frac{a-6}{a-2} + \frac{2}{1-b}$ y $L = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, determine cuál fue el score final, que equipo fue campeón, que apostador ganó y la cantidad de dinero que recibió.

A) Score 3 a 2, campeón fue el equipo A, ganó Alonso y recibió 1200 soles.

B) Score 5 a 7, campeón fue el equipo B, ganó Lucio y recibió 1600 soles.

C) Score 4 a 5, campeón fue el equipo B, ganó Lucio y recibió 900 soles.

D) Score 3 a 4, campeón fue el equipo A, ganó Alonso y recibió 1200 soles.

Solución:

I) Si a y b son soluciones de la ecuación $x^2 - x + 2 = 0$, entonces:

$$a + b = 1, \quad ab = 2$$

II) Además

$$a^2 - a + 2 = 0 \rightarrow a^2 - 4 = a - 6 \rightarrow a + 2 = \frac{a - 6}{a - 2}$$

$$b^2 - b + 2 = 0 \rightarrow b(1 - b) = 2 \rightarrow b = \frac{2}{1 - b}$$

III) Luego

$$R = \frac{a - 6}{a - 2} + \frac{2}{1 - b} = a + 2 + b = 3$$

$$L = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a + b)^2 - 2ab}{ab} = \frac{1 - 2(2)}{2} = -\frac{3}{2}$$

IV) Finalizado el partido

el equipo A marcó $(R + 2) = 5$ goles y

el equipo B anotó $(-2 - 6L) = 7$ goles

Lucio apostó $(2ab)$ cientos de soles: 400 soles

Ganó: $4(400) = 1600$ soles

Rpta.: B

7. Carlitos va a construir una caja de la forma de un paralelepípedo rectangular donde las medidas de las aristas son valores enteros y diferentes. Si se sabe que la suma de las medidas de las dos aristas mayores es 11 pies y el área determinada por esas aristas es no menor a 24 pies². ¿Cuál es la máxima medida de la menor arista, sabiendo que ésta es mayor a la diferencia positiva de las otras dos?

A) 1 pie

B) 2 pies

C) 4 pies

D) 3 pies

Solución:

Sean las x y $(11 - x)$ las medidas de las aristas mayores del paralelepípedo:

$$x(11 - x) \geq 24$$

$$\rightarrow x^2 - 11x + 24 \leq 0$$

$$\rightarrow (x - 3)(x - 8) \leq 0$$

$$\rightarrow 3 \leq x \leq 8$$

Si $x = 3$,

Las mayores aristas miden: 3 y 8 $\Rightarrow$ menor arista > 5 (no cumple los datos)

Si $x = 4$,

Las mayores aristas miden: 4 y 7 $\Rightarrow$ menor arista > 3 (no cumple los datos)

Si $x = 5$,

Las mayores aristas miden: 5 y 6 $\Rightarrow$ menor arista > 1

menor arista: 2, 3 y 4 $\Rightarrow$ la máxima medida: 4 pies

Si $x = 6$,

Las mayores arista miden : 6 y 5 $\Rightarrow$ menor arista > 1

menor arista : 2, 3 y 4 $\Rightarrow$ la máxima medida : 4 pies

Si $x = 7$,

Las mayores arista miden : 7 y 4 $\Rightarrow$ menor arista > 3 (no cumple los datos)

Si $x = 8$,

Las mayores arista miden : 8 y 3 $\Rightarrow$ menor arista > 5 (no cumple los datos)

Rpta.: C

8. Sean a y b respectivamente las longitudes del complemento de los conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0 \right\} \text{ y}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / (-x^2 - 2)(x + 2) < 2(-x^2 - 2) \vee (x^2 + 3)(x + 2) < -2x^2 - 6 \right\}$$

Si un estibador gana por cada día de trabajo $5(a + b)$ soles . ¿Cuánto ganó él estibador por dos días de trabajo?

A) 50 soles

B) 30 soles

C) 60 soles

D) 80 soles

Solución:

$$I) A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0 \right\}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0 \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow (x + 1)(x - 1) > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$\rightarrow A = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle \rightarrow A^c = [-1, 1] \Rightarrow a = 1 - (-1) = 2$$

$$II) B = \left\{ x \in \mathbb{R} / (-x^2 - 2)(x + 2) < 2(-x^2 - 2) \vee (x^2 + 3)(x + 2) < -2x^2 - 6 \right\}$$

$$(-x^2 - 2)(x + 2) < 2(-x^2 - 2) \vee (x^2 + 3)(x + 2) < -2x^2 - 6$$

$$\rightarrow x + 2 > 2 \vee x + 2 < -2$$

$$\rightarrow x > 0 \vee x < -4 \rightarrow B = \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow B^c = [-4, 0]$$

$$\Rightarrow b = 0 - (-4) = 4$$

Por lo tanto

El estibador ganó por 2 días de trabajo: $2[5(a + b)] = 60$ soles

Rpta.: C

Álgebra

EJERCICIOS

1. Sebastián tiene ahorrado $(3m - 1)$, $(m + 3)$ y $(m + 5)$ billetes de 10, 20 y 50 soles respectivamente. Él compra una tablet valorizada en 400 soles. El dinero sobrante lo cambia a billetes de 100 soles y la cantidad de billetes que obtiene es igual a la mitad de la cantidad de billetes de 10 soles que tenía al inicio, disminuido en 4. Determine la cantidad de dinero que tenía Sebastián antes de comprar la tablet.

A) 1200 soles

B) 800 soles

C) 600 soles

D) 1000 soles

E) 900 soles

Solución:

Dinero ahorrado:

$$10(3m - 1) + 20(m + 3) + 50(m + 5) = 100m + 300$$

Luego de la compra:

$$\frac{100m + 300 - 400}{100} = \frac{3m - 1}{2} - 4$$

$$\frac{100m - 100}{100} = \frac{3m - 9}{2}$$

$$200m - 200 = 300m - 900$$

$$700 = 100m$$

$$\Rightarrow m = 7$$

Entonces:

La cantidad de dinero que tenía Sebastián antes de comprar la Tablet es $20(10) + 10(20) + 12(50) = 1000$ soles

Rpta.: D

2. Si la ecuación lineal en x , $(a^2 + b^2 + 4b + 13)x + a = 6ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ no tiene solución, halle el valor de w tal que $\frac{a - w}{b} = \frac{2w + a + 1}{a - b}$.

A) -3

B) 4

C) 23

D) -4

E) -23

Solución:

$$(a^2 + b^2 + 4b + 13)x + a = 6ax + b$$

$$(a^2 + b^2 - 6a + 4b + 13)x + a - b = 0 \text{ no tiene infinitas soluciones}$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 - 6a + 4b + 13 = 0 \text{ y } a - b \neq 0)$$

$$\Rightarrow ([a^2 - 6a + 9] + [b^2 + 4b + 4]) = 0 \text{ y } a \neq b$$

$$\Rightarrow (a = 3 \text{ y } b = -2)$$

$$\text{Para } a = 3 \text{ y } b = -2 \text{ tenemos } \frac{3-w}{-2} = \frac{2w+4}{5}$$

$$\Rightarrow 5(3-w) = -2(2w+4) \Rightarrow w = 23$$

Rpta : C

3. Al multiplicar $[(n-2)x - 14]$ por la inversa de $\frac{1}{(x-2)^{-1}}$ resulta ser igual a

$(x + 5)$. Si la ecuación que resulta es una ecuación cuadrática con soluciones no reales, determine la ecuación cuadrática y mónica cuyas soluciones son el mayor y menor valor entero de n .

A) $x^2 - 3x + 10 = 0$

B) $x^2 - x - 6 = 0$

C) $x^2 + x - 2 = 0$

D) $x^2 - 10x + 16 = 0$

E) $x^2 + 2x - 8 = 0$

Solución:

$$[(n-2)x - 14] \left[\frac{1}{(x-2)^{-1}} \right]^{-1} = x + 5$$

$$[(n-2)x - 14] = (x+5)(x-2)$$

$$\Rightarrow x^2 - (n-5)x + 4 = 0$$

Como la ecuación tiene valores no reales para x

$$\Delta = [-(n-5)]^2 - 4(1)4 < 0 \Rightarrow (n-5)^2 < 16 \Rightarrow -4 < n-5 < 4$$

$$1 < n < 9 \Rightarrow n_{\text{menor}} = 2, n_{\text{mayor}} = 8$$

Entonces la ecuación cuadrática, mónica que se puede construir con el mayor y menor valor entero de n es : $x^2 - 10x + 16 = 0$

Rpta.: D

4. Paco ha comprado dos terrenos de áreas iguales, uno de forma rectangular y el otro de forma cuadrada, cuyas medidas de sus lados están en metros. En el primer terreno, se cumple que la medida del largo es igual al doble de la medida del ancho, disminuido en dos metros, además la medida del lado del segundo terreno coincide con la medida del ancho del primer terreno, aumentado en tres metros. Halle la suma de los perímetros de ambos terrenos.

A) 56 metros

B) 94 metros

C) 98 metros

D) 84 metros

E) 46 metros

Solución:

Sea x el ancho del terreno rectangular entonces el largo es $2x - 2$ y

el ancho del terreno de forma cuadrada es por dato $x + 3$

Además el área de los terrenos son iguales

$$\text{Área}_{\text{rectangular}} = \text{Área}_{\text{cuadrada}}$$

$$x(2x - 2) = (x + 3)^2 \Rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \vee x = -1 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{Perímetro}_{\text{rectangular}} = 2(x + 2x - 2) = 6x - 4 = 50$$

$$\text{Perímetro}_{\text{cuadrada}} = 4(x + 3) = 48$$

Por lo tanto

$$\text{Perímetro}_{\text{rectangular}} + \text{Perímetro}_{\text{cuadrada}} = 98 \text{ metros}$$

Rpta : C

5. Si a y b son soluciones de la ecuación $2x^2 + 8x - 3 = 0$, halle el valor $(a - b)^2 + a^2b + ab^2$.

- A) 22 B) 16 C) 19 D) 18 E) 28

Solución:

$$2x^2 + 8x - 3 = 0$$

Por la relación entre los coeficientes y las soluciones

$$a + b = -4$$

$$ab = -\frac{3}{2}$$

Luego

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \Rightarrow (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 = (-4)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = 22$$

$$(a - b)^2 + a^2b + ab^2 = (a - b)^2 + ab(a + b) = 22 + \left(-\frac{3}{2}\right)(-4) = 28$$

Rpta : E

6. Una camioneta pesa 890 kg y debe llevar una carga de cinco cajones de igual peso cada uno. Si la diferencia entre el peso de la camioneta vacía y el peso total de la carga no debe ser inferior a 420 kg, ¿cuánto debe pesar como máximo cada cajón de carga?

- A) 88 kg B) 92 kg C) 80 kg D) 86 kg E) 94 kg

Solución:

Sea x el peso de cada cajón

$$890 - 5x \geq 420 \Rightarrow x \leq 94$$

$$\Rightarrow 0 < x \leq 94 \text{ entonces } x_{\text{max}} = 94$$

Por lo tanto
Cada cajón debe pesar como máximo 94 kg.

Rpta.: E

7. Si el número de elementos enteros del conjunto solución de la inecuación $\frac{(x-3)}{x^2-x+2} > \frac{1}{x-2}$ es "m", entonces respecto de la ecuación en x :
 $mx = 2$

podemos afirmar :

- A) No tiene solución. B) 0 es solución única.
C) Tiene infinitas soluciones. D) 1 es solución única.
E) 2 es solución única.

Solución:

I)

$$\frac{(x-3)}{x^2-x+2} > \frac{1}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{(x-3)}{x^2-x+2} < 0 \Rightarrow \frac{(x^2-x+2)-(x-3)(x-2)}{(x^2-x+2)(x-2)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x-4}{(x^2-x+2)(x-2)} < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} < 0 \Rightarrow \text{CS} = \langle 1, 2 \rangle \Rightarrow m = 0$$

II) $mx = 2$

$0x - 2 = 0$ la ecuación no tiene solución.

Rpta.: A

8. En las ecuaciones en x,

$$x^2 + px + q = 0 \text{ y } x^2 - p^2x + pq = 0$$

se cumple que cada una de las soluciones de la segunda ecuación es igual a cada una de las soluciones de la primera ecuación aumentada en una unidad, además $p \neq 1$. Halle el número de elementos enteros del conjunto solución de la inecuación $qx^2 + 7x - p^{-2q+1} > 0$.

- A) 7 B) 6 C) 9 D) 8 E) 10

Solución:

I) Sean a y b las soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0 \Rightarrow a + b = -p \wedge ab = q$
y

II) $(a+1)$ y $(b+1)$ las soluciones de la ecuación $x^2 - p^2x + pq = 0$

$$\Rightarrow (a+1) + (b+1) = p^2 \wedge (a+1)(b+1) = pq$$

$$\Rightarrow a + b + 2 = p^2 \wedge ab + a + b + 1 = pq$$

$$\Rightarrow -p + 2 = p^2 \wedge q - p + 1 = pq$$

$$0 = p^2 + p - 2 \Rightarrow p = -2 \vee p = 1 \Rightarrow p = -2$$

$$q + 2 + 1 = (-2)q \Rightarrow q = -1$$

$$\text{III) } qx^2 + 7x - p^{-2q+1} > 0 \Rightarrow -x^2 + 7x + 8 > 0 \Rightarrow x^2 - 7x - 8 < 0 \\ \Rightarrow (x-8)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 8$$

Por lo tanto:

Número de elementos enteros del conjunto solución de la inecuación es 8

Rpta: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si r es solución de la ecuación en x , $\frac{2x-a}{x+b} + \frac{2x-b}{x+a} = 1$, halle el valor de $M = 3r^2 + ab$.

A) $(a+b)^2$ B) $2ab$ C) $a^2 - b^2$ D) $(a-b)^2$ E) $a^2 + b^2$

Solución:

$$\frac{2x-a}{x+b} + \frac{2x-b}{x+a} = 1 \Rightarrow \frac{(2x-a)(x+a) + (2x-b)(x+b)}{(x+b)(x+a)} = 1$$

$$2x^2 + ax - a^2 + 2x^2 + bx - b^2 = x^2 + ax + bx + ab$$

$$3x^2 = a^2 + b^2 + ab$$

Como r es solución

$$\Rightarrow 3r^2 = a^2 + b^2 + ab \Rightarrow 3r^2 + ab = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

Rpta.: A

2. Jonathan compró una camioneta y le hicieron un descuento equivalente a 0,1. Luego de 10 años lo vendió a \$ 14 400 perdiendo un equivalente a 0,2 de lo que le costó. ¿A cuánto ascendía el precio sin descuento de la camioneta?

A) \$24 400 B) \$ 44 400 C) \$ 20 000 D) \$25 400 E) \$ 19 400

Solución:

Sea x el precio de la camioneta

El compró a $0,9x$

Luego lo vendió $0,2$ de lo que le costó

$$\text{Entonces } 14\,400 = 0,8(0,9)x \rightarrow x = 20\,000$$

$\therefore$ El precio de la camioneta sin descuento es \$ 20 000

Rpta: C

3. En un jardín de forma rectangular, cuyas dimensiones son 50 m de largo y 30 m de ancho, se va a construir a su alrededor una vereda de ancho constante. Si el área total de la vereda es 600 m^2 , ¿cuánto mide el ancho de la vereda?

- A) $(-20 + 5\sqrt{22})\text{m}$ B) $(20 - \sqrt{22})\text{m}$ C) $(20 + 5\sqrt{22})\text{m}$
 D) $(20 + 15\sqrt{22})\text{m}$ E) $(5\sqrt{2})\text{m}$

Solución:

Sea x el ancho constante de la vereda, entonces

$$\text{Área}_{\text{vereda}} = \text{Área}_{\text{jardín+vereda}} - \text{Área}_{\text{jardín}}$$

$$600 = (50 + 2x)(30 + 2x) - 50(30)$$

$$0 = x^2 + 40x - 150$$

$$x = -20 + 5\sqrt{22} \vee x = -20 - 5\sqrt{22} \Rightarrow x = -20 + 5\sqrt{22}$$

$$\therefore \text{El ancho de la vereda es: } (-20 + 5\sqrt{22})\text{m}$$

Rpta.: A

4. María compró cierta cantidad de ventiladores. El costo de cada uno es igual al número de ventiladores que compró aumentado en diez, pero si hubiese comprado el doble de número de ventiladores hubiera pagado por cada uno menos de la quinta parte del número de ventiladores que compró y hubiese gastado 625 soles más. ¿Cuántos ventiladores compró?

- A) 54 B) 25 C) 45 D) 52 E) 35

Solución:

Sea x el número de ventiladores que compró María

Costo de cada uno : $x + 10$

Si hubiera comprado el doble de ventiladores: $2x$

Entonces el costo de cada uno $(x + 10) - \frac{x}{5}$

$$2x \left[(x + 10) - \frac{x}{5} \right] - x(x + 10) = 625$$

$$3x^2 + 50x - 3125 = 0 \Rightarrow x = -\frac{125}{3} \vee x = 25 \Rightarrow x = 25$$

Rpta.: B

5. Si la ecuación en x , $x^2 - (m+2)x + m + 5 = 0$ tiene soluciones no reales, entonces podemos afirmar que la ecuación $y^2 - 5y + m = 0$ tiene

- A) soluciones reales y diferentes
 B) soluciones reales e iguales
 C) como discriminante un valor que pertenece al intervalo $\langle 9, 16 \rangle$
 D) soluciones no reales
 E) como discriminante un valor menor a 8

Solución:

$$I) x^2 - (m+2)x + m + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta < 0$$

$$[-(m+2)]^2 - 4(1)(m+5) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 < 16 \Rightarrow -4 < m < 4$$

II)

$$y^2 - 5y + m = 0$$

$$\Delta_1 = [-5]^2 - 4(1)m = 25 - 4m$$

$$\text{Como } -4 < m < 4 \Rightarrow -16 < -4m < 16 \Rightarrow 9 < 25 - 4m < 41$$

Su discriminante pertenece al intervalo $\langle 9, 41 \rangle$

$\therefore$ La ecuación tiene soluciones reales y diferentes

Rpta.: A

6. En la ecuación en x , $x(x - \alpha^2) + 4 = x^2 + x - 3\alpha$, $x < 0$, halle el mayor valor entero de α .

- A) 0 B) 4 C) 2 D) -2 E) -3

Solución:

De la ecuación

$$x(x - \alpha^2) + 4 = x^2 + x - 3\alpha \Rightarrow x^2 - \alpha^2 x + 4 = x^2 + x - 3\alpha \Rightarrow x = \frac{3\alpha + 4}{\alpha^2 + 1} < 0$$

$$\Rightarrow \alpha < -\frac{4}{3}$$

$\therefore$ El mayor valor entero de α es -2

Rpta.: D

7. En un triángulo equilátero, cuya medida de su lado es $(x-5)m$ se cumple que la medida de su área no es menor a $9\sqrt{3}m^2$, ¿cuánto mide como mínimo la altura de dicho triángulo?

A) $\frac{11\sqrt{3}}{2} m$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2} m$ C) $3\sqrt{3} m$ D) $\frac{7\sqrt{3}}{2} m$ E) $11\sqrt{3} m$

Solución:

Lado del triángulo equilátero: $(x-5)m$

Altura del triángulo equilátero: $\frac{\sqrt{3}(x-5)}{2}m$

Área del triángulo equilátero: $\frac{\sqrt{3}(x-5)^2}{4}m$

$$\frac{\sqrt{3}(x-5)^2}{4} \geq 9\sqrt{3} \Rightarrow (x-5)^2 \geq 36$$

$$\Rightarrow x-5 \geq 6 \vee x-5 \leq -6$$

$$\Rightarrow x \geq 11 \vee x \leq -1 \Rightarrow x \geq 11 \Rightarrow x_{\text{menor}} = 11$$

Por lo tanto

La altura mide como mínimo $\frac{\sqrt{3}(11-5)}{2} = 3\sqrt{3}m$

Rpta.: C

8. Dado los conjuntos

$$M^C = \left\{ x \in \mathbb{R} / -x^2 + 2x + 15 \leq 0 \right\} \text{ y } P = \left\{ 2x - 3 \in \mathbb{R} / x \geq \frac{5x^2 + 10x + 75}{2x^2 + 4x + 30} \right\}. \text{ Si } m \text{ es la}$$

suma de los elementos enteros de $M - P$, determine la ecuación cuadrática y mónica que tiene por soluciones a $(m-1)$ y $(m+1)$.

A) $x^2 + 4x + 3 = 0$ B) $x^2 - 4x + 3 = 0$ C) $x^2 + x - 3 = 0$
 D) $x^2 - 4x - 3 = 0$ E) $x^2 - 2x + 3 = 0$

Solución:

$$I) M^C = \left\{ x \in \mathbb{R} / -x^2 + 2x + 15 \leq 0 \right\}$$

$$x^2 - 2x - 15 \geq 0$$

$$(x-5)(x+3) \geq 0$$

$$\Rightarrow M^C = \langle -\infty, -3 \rangle \cup [5, +\infty) \Rightarrow M = \langle -3, 5 \rangle$$

$$\text{II) } P = \left\{ 2x - 3 \in \mathbb{R} / x \geq \frac{5x^2 + 10x + 75}{2x^2 + 4x + 30} \right\}$$

$$x \geq \frac{5(x^2 + 2x + 15)}{2(x^2 + 2x + 15)}$$

$$x \geq \frac{5}{2} \Rightarrow 2x - 3 \geq 2$$

$$P = [2, +\infty)$$

$$\text{III) } M - P = \langle -3, 2 \rangle \Rightarrow m = -2 - 1 + 0 + 1 = -2$$

$$m - 1 = -3, \quad m + 1 = -1$$

IV) Luego la ecuación que tiene soluciones -3 y -1 es

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

Rpta: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si la ecuación lineal $(2a^2 - b)x - (b^2 - 16b + 64) = 0$ admite infinitas soluciones, determine el valor de x en $\frac{ax-1}{3} - \frac{x+(2b-3)}{6(a+2)} = 3x + \frac{5(x+1)}{8}$.

A) 3 B) 4,5 C) - 0,5 D) - 1,5 E) 2,5

Solución:

$(2a^2 - b)x - (b^2 - 16b + 64) = 0$ tiene infinitas soluciones

$$\Rightarrow (2a^2 - b = 0 \text{ y } b^2 - 16b + 64 = 0) \Rightarrow (2a^2 = b \text{ y } b - 8 = 0)$$

$$\Rightarrow (b = 8 \text{ y } a^2 = 4) \Rightarrow ((a = 2 \text{ ó } a = -2) \text{ y } b = 8)$$

Para $a = 2$ y $b = 8$ tenemos $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+13}{24} = 3x + \frac{5(x+1)}{8}$

$$\Rightarrow 8(2x-1) - (x+13) = 72x + 15(x+1) \Rightarrow -72x = 36 \quad x = -\frac{1}{2}$$

Rpta.: C

2. Alexandra tenía cierta cantidad de dinero. Gastó 30 soles en una blusa y con los $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba compró pantalones. Si aún le quedan 30 soles, ¿cuánto dinero tenía Alexandra al inicio?

A) 110 soles B) 160 soles C) 70 soles D) 150 soles E) 90 soles

Solución:

Dinero de Alexandra: x soles

Gasta en blusas 30 soles, le queda: $x - 30$ soles

En pantalones, gasta $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba

Por dato, $(x - 30) - \frac{3}{4}(x - 30) = 30$

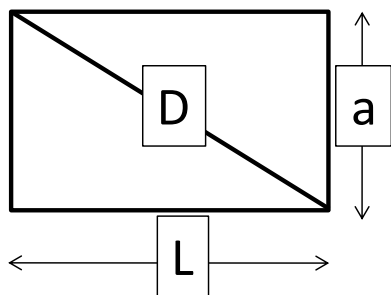
$$\frac{x - 30}{4} = 30 \Rightarrow x = 150$$

Alexandra tuvo 150 soles antes de comprarse ropa.

Rpta.: D

3. Un terreno rectangular tiene como perímetro 140 metros y su diagonal mide 50 metros. Determine la diferencia positiva de sus lados.

A) 15 m B) 20 m C) 10 m D) 8 m E) 5 m

Solución:

$$\text{Dato: } 2(L + a) = 140 \Rightarrow L + a = 70$$

$$D^2 = 2500 = a^2 + L^2 \Rightarrow (70 - L)^2 + L^2 = 2500$$

$$\Rightarrow L^2 - 70L + 1200 = 0 \Rightarrow (L - 30)(L - 40) = 0$$

entonces ($L = 40$ m y $a = 30$ m)

$$\text{Piden } L - a = 40 - 30 = 10 \text{ m}$$

Rpta.: C

4. Si a y b son soluciones de $x^2 - 3x - 1 = 0$ halle el valor de $J = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{a-1} + \frac{a}{b-1} + \frac{b}{b+1}$.

A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) -2 D) $-\frac{7}{3}$ E) -3

Solución:

Por dato, a y b son soluciones de $x^2 - 3x - 1 = 0$ entonces $a + b = 3$ y $ab = -1$

Como a es solución $a^2 - 3a - 1 = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 3a$

$$\Rightarrow (a+1)(a-1) = 3a \Rightarrow \frac{a-1}{3} = \frac{a}{a+1}$$

Análogamente $\frac{b-1}{3} = \frac{b}{b+1}$

$$J = \left(\frac{a}{b-1} + \frac{b}{a-1} \right) + \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) = \left(\frac{a(a-1) + b(b-1)}{(a-1)(b-1)} \right) + \left(\frac{a-1}{3} + \frac{b-1}{3} \right)$$

$$J = \left(\frac{\overbrace{a^2 + b^2}^{(a+b)^2 - 2ab} - (a+b)}{ab - (a+b) + 1} \right) + \left(\frac{(a+b) - 2}{3} \right) = \frac{9 + 2 - 3}{-1 - 3 + 1} + \frac{3 - 2}{3} = \frac{8}{-3} + \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$$

Rpta.: D

5. En un tren de Lima metropolitana viaja cierto número de pasajeros. Si bajara la cuarta parte de pasajeros en el próximo paradero continuarían viajando menos de 129 pasajeros; pero si bajara la sexta parte, continuaría viajando más de 135 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros hay en el tren?

A) 170 B) 142 C) 150 D) 160 E) 168

Solución:

Número de pasajeros en el tren: x

$$\begin{cases} x - \frac{x}{4} < 129 \Rightarrow x < 172 \dots (1) \\ x - \frac{x}{6} > 135 \Rightarrow x > 162 \dots (2) \end{cases}$$

De (1) y (2): $162 < x < 172$ además $x = \overset{0}{4}$ y $x = \overset{0}{6}$ entonces $x = 168$

En el tren hay 168 pasajeros.

Rpta.: E

6. La ecuación $(x^2 - x + 1)(x^2 - (n+2)x + 2n) = 0$ tiene dos soluciones reales e iguales, además la suma de los elementos del conjunto solución es " a " y el producto de los elementos del conjunto solución es " b ". Halle el valor numérico de $a+b$.

A) 5 B) 9 C) 6 D) 11 E) 7

Solución:

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - (n+2)x + 2n) = 0$$

Si $x^2 - x + 1 = 0$ se tiene $\Delta = -3$ entonces hay raíces complejas,

digamos z_1 y z_2 , se cumple: $(z_1 + z_2 = 1 \wedge z_1 z_2 = 1)$

Si $x^2 - (n+2)x + 2n = 0$ debe tener $\Delta = 0$

$$\Rightarrow (n+2)^2 - 4(2n) = 0 \Rightarrow (n-2)^2 = 0 \Rightarrow n = 2$$

$$\text{Tenemos } (x^2 - x + 1)(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow \text{C.S.} = \{z_1, z_2, 2\}$$

$$\text{entonces } a = (1) + (2) = 3 \text{ y } b = (1)(2) = 2$$

$$\text{Piden } a + b = 3 + 2 = 5$$

Rpta.: A

7. Si $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x}{x^2 - 1} > \frac{4}{x+1} \right\}$ y $B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} + 3 \right\}$, halle el número de elementos enteros positivos de $A \cap B$.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Solución:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x}{x^2 - 1} > \frac{4}{x+1} \right\} \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 1} > \frac{4}{x+1}$$

$$\frac{x - 4(x-1)}{x^2 - 1} > 0 \Rightarrow \frac{-3x + 4}{(x-1)(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{3x - 4}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$$\therefore A = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} + 3 \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1+3x^2}{x^2} \Rightarrow 0 < \frac{3x^2 - x + 1}{x^2}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\} \therefore B = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$A \cap B = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$$

Número de elementos enteros positivos es cero

Rpta.: A

8. Luis le pregunta a Nicolás Lunié, ¿cuántos años tienes? y éste le responde: mi edad es el doble de la cantidad de números enteros que satisfacen la inecuación $\frac{71}{67} < \frac{x^2 + 7}{x^2 + 3} < \frac{4}{3}$. ¿Cuál es la edad de Nicolás Lunié?

- A) 8 años B) 16 años C) 12 años D) 17 años E) 20 años

Solución:

$$\frac{71}{67} < \frac{x^2+7}{x^2+3} < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{71}{67} < 1 + \frac{4}{x^2+3} < \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{67} < \frac{4}{x^2+3} < \frac{1}{3} \Rightarrow 12 < x^2+3 < 67 \Rightarrow 9 < x^2 < 64$$

$$\Rightarrow (-8 < x < -3 \quad \vee \quad 3 < x < 8)$$

$$x \in \{-7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7\}$$

Hay 8 números enteros que satisfacen la inecuación
Nicolás Lunié tiene $2(8)=16$ años.

Rpta.: B**EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. Halle la ecuación que tiene por soluciones los cuadrados de las inversas de las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, si $ac \neq 0 \wedge \{a,b,c\} \subset \mathbb{R}$.

- A) $c^2x^2 - (b^2 + 2ac)x + a^2 = 0$ B) $c^2x^2 + (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$
 C) $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x - a^2 = 0$ D) $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$
 E) $c^2x^2 - (b^2 + 2ac)x - a^2 = 0$

Solución:

Sean α, β soluciones de $ax^2+bx+c=0$

Por Cardano $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ y $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

Construimos la ecuación

$$\left(x - \frac{1}{\alpha^2}\right)\left(x - \frac{1}{\beta^2}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)x + \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = 0$$

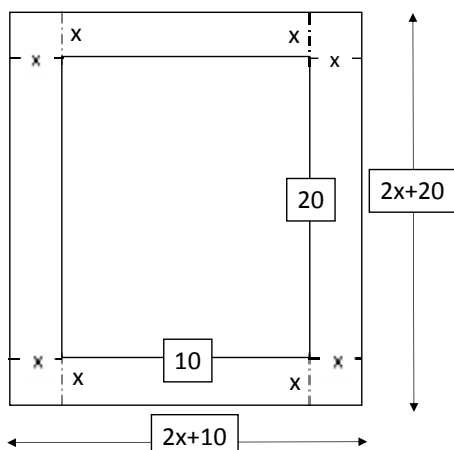
$$\Rightarrow x^2 - \left[\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}\right]x + \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - \left[\left(\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right)\frac{a^2}{c^2}\right]x + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{b^2 - 2ac}{c^2}\right)x + \frac{a^2}{c^2} = 0 \quad \therefore \quad c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$$

Rpta.: D

2. Mario desea colocar alrededor de una fotografía de $20 \times 10 \text{ cm}^2$, un marco de vidrio de igual anchura para lo cual debe utilizar por lo menos 216 cm^2 de vidrio. Determine la longitud mínima que tendría el ancho del marco de vidrio.

- A) 3 cm B) 4 cm C) 2,5 cm D) 3,2 cm E) 4,5 cm

Solución:

ancho del marco de vidrio = x cm

área del vidrio : $(2x+10)(2x+20) - 200$

área del vidrio : $4x^2 + 60x$, $x > 0$

dato : $4x^2 + 60x \geq 216$

$\Rightarrow x^2 + 15x - 54 \geq 0$

$\Rightarrow (x+18)(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

$\therefore x_{\min} = 3$ cm

Rpta.: A

3. El número de DNI de Rosana es $\overline{09(a+1)7697(a+3)}$ donde "a" es solución de la ecuación $1 - \frac{3}{1 - \frac{x-1}{2}} = x - 2$. Halle la suma de los dígitos primos del DNI de

$$1 - \frac{x-1}{2} = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{2}}$$

Rosana.

- A) 21 B) 22 C) 14 D) 19 E) 15

Solución:

$$\frac{2}{1 - \frac{x-1}{2}} = \frac{2}{\frac{x-3}{x-1}} = \frac{2}{x-3}, \quad x \neq 3, \quad x \neq 1$$

$$1 - \frac{3}{1 - \frac{x-1}{2}} = 1 - \frac{3}{1 - \frac{x-1}{2}} = 1 - \frac{3}{\left(\frac{x-5}{x-3}\right)} = 1 - \frac{3x-9}{x-5} = \frac{-2x+4}{x-5} \quad \text{con } x \neq 5$$

$$\text{Entonces } \frac{-2x+4}{x-5} = x-2 \Rightarrow -2(x-2) = (x-2)(x-5) \Rightarrow (x-2)(x-5) = 0 \Rightarrow (x=2 \text{ ó } x=3)$$

$\therefore a = 2$

Si $a = 2$, el DNI de Rosana es 09376975 piden $3+7+7+5 = 22$

Rpta.: B

4. Juan le ofrece a Maria 100 mochilas a 8 soles cada una pero intuye que por cada incremento de 4 soles sobre el precio a cada mochila, Maria le comprará 10 mochilas menos. Determine el precio máximo de cada mochila al que debe vender Juan y la cantidad de mochilas que debe vender para que su ingreso sea mayor a 1280 soles.
- A) 32 soles, 40 mochilas
B) 28 soles, 50 mochilas
C) 20 soles, 70 mochilas
D) 24 soles, 60 mochilas
E) 40 soles, 32 mochilas

Solución:

Número de incrementos de 4 soles al precio inicial de cada mochila: x

$$\text{Ingreso} > 1280 \Rightarrow (8 + 4x)(100 - 10x) > 1280 \Rightarrow (x + 2)(x - 10) < -32$$

$$x^2 - 8x + 12 < 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 2) < 0 \Rightarrow 2 < x < 6$$

$$\text{Si } x = 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{precio máximo : } 8 + 4(5) = 28 \text{ soles} \\ \text{cantidad ha vender : } 100 - 10(5) = 50 \end{cases}$$

Rpta.: B

5. Enrique compró cierto número de sacos de fruta por 240 soles. Si hubiera comprado 3 sacos más con el mismo dinero inicial, cada saco le habría costado 4 soles menos. ¿Cuántos sacos de fruta compró Enrique y cuánto le costó cada saco?
- A) 18 sacos, 30 soles
B) 15 sacos, 20 soles
C) 12 sacos, 20 soles
D) 20 sacos, 26 soles
E) 14 sacos, 20 soles

Solución:

Número de sacos de fruta que compró Enrique: x

cada saco costó $\frac{240}{x}$ soles

si compra 3 sacos más, cada saco costaría: $\frac{240}{x+3}$ soles

$$\text{Se tiene } \frac{240}{x} - \frac{240}{x+3} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{60} \Rightarrow \frac{3}{x(x+3)} = \frac{1}{60} \Rightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$$

$$\Rightarrow (x+15)(x-12) = 0 \Rightarrow x = 12$$

Enrique compró 12 sacos de fruta y cada saco le costó $\frac{240}{12} = 20$ soles.

Rpta.: C

6. Ana quiere comprar x paquetes de galletas para su tienda a un costo total de 20 soles. El dueño de la tienda le hace la siguiente oferta: "Si por cada x paquetes de galletas lleva $\frac{x}{2}$ paquetes más pagaría solo por 12 paquetes de galleta", ella contenta se anima y compra $29x$ paquetes de galletas más y ahorra en total S/. $\frac{1200}{x}$. Halle el número total de paquetes de galletas que compró Ana.

A) 308 B) 300 C) 342 D) 280 E) 180

Solución:

precio de cada paquete de galleta: $\frac{20}{x}$ soles

oferta: por cada $\frac{3x}{2}$ paquetes de galletas paga solo por 12 paquetes de galletas

precio oferta de $\frac{3x}{2}$ galletas = $12\left(\frac{20}{x}\right)$ soles

$\Rightarrow$ precio oferta de $30x$ galletas = $20.12\left(\frac{20}{x}\right)$ soles

ahorro = $\left(\frac{\text{precio real de } 30x}{\text{paquetes de galletas}}\right) - \left(\frac{\text{precio oferta de } 30x}{\text{paquetes de galletas}}\right)$

$$\frac{1200}{x} = 30x \cdot \left(\frac{20}{x}\right) - 20.12 \cdot \left(\frac{20}{x}\right) \Rightarrow \frac{12}{x} = 6 - \frac{48}{x} \Rightarrow x = 10$$

Número total de paquetes de galletas compradas: 300

Rpta.: B

7. ¿Qué cantidad debe disminuirse a cada uno de los términos de la fracción $f = \frac{m}{n}$ ($m \neq n$) para que la fracción resultante sea igual a la inversa de la fracción original?

A) $-(m+n)$ B) $m+n$ C) $(m+n)/2$ D) $2m+n$ E) $m+2n$

Solución:

$$\text{Tenemos } \frac{m-x}{n-x} = \frac{n}{m} \Rightarrow m(m-x) = n(n-x) \Rightarrow mx - nx = m^2 - n^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{(m+n)(m-n)}{m-n} \Rightarrow x = m+n$$

Rpta.: B

8. Determine la suma de cifras del número intermedio de los tres menores números enteros consecutivos que satisfacen que, la cuarta parte del número menor sumado con la tercera parte del número intermedio exceda a la mitad del número mayor.

A) 7 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9

Solución:

Sean los números consecutivos: $x, x+1, x+2$

$$\text{Dato: } \frac{x}{4} + \frac{x+1}{3} > \frac{x+2}{2} \Rightarrow 3x + 4(x+1) > 6(x+2) \Rightarrow \left(x > 8 \text{ y } x = 4 \right)$$

El número intermedio es 21 entonces la suma de cifras es 3.

$x = 4$	$x + 1 = 3$	$x + 2 = 2$
12	no	no
16	no	no
20	21	22
28	no	no
no	no	no

Rpta.: B

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

04

semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

1. VALOR ABSOLUTO

1.1 Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de “a” denotado por $|a|$ se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades:

Si $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, se tiene las siguientes propiedades

- i) $|a| \geq 0$
- ii) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- iii) $|ab| = |a||b|$
- iv) $|-a| = |a|$
- v) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \text{ si } b \neq 0.$

Observaciones

- i) $\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ si } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } n \text{ es par.}$
- ii) $\sqrt[n]{a^n} = a \text{ si } n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\} \text{ y } n \text{ es impar.}$
- iii) $a^2 = |a^2| = |a|^2.$

1.2 Ecuaciones con valor absoluto

- i) $|a| = b \Leftrightarrow [b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)]$
- ii) $|a| = |b| \Leftrightarrow [a = b \vee a = -b]$

Ejemplo 1:

Halle el producto de las soluciones de la ecuación, $|x^2 + 11 - 4x| = 3|x - 2| + 35$.

Solución:

De la ecuación: $|x^2 + 11 - 4x| = 3|x - 2| + 35$.

$$\rightarrow |x^2 - 4x + 4 + 7| = 3|x - 2| + 35$$

$$\rightarrow \left| \underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0} + 7 \right| = 3|x - 2| + 35$$

$$\rightarrow (x-2)^2 + 7 - 3|x - 2| - 35 = 0$$

$$\rightarrow |(x-2)|^2 - 3|x - 2| - 28 = 0$$

$$\rightarrow (|(x-2)| - 7)(|(x-2)| + 4) = 0$$

$$\rightarrow |x - 2| = 7 \vee \underbrace{|x - 2| = -4}_{\text{absurdo}}$$

$$\rightarrow x = 9 \vee x = -5$$

$\therefore$ Producto de soluciones es -45 .

1.3 Inecuaciones con valor absoluto

$$\text{i) } |a| \leq b \Leftrightarrow [b \geq 0 \wedge (-b \leq a \leq b)]$$

$$\text{ii) } |a| \geq b \Leftrightarrow [a \geq b \vee a \leq -b]$$

$$\text{iii) } |a| \geq |b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b) \geq 0$$

Ejemplo 2:

Los hermanos Jahir y Bryanna compraron 4 y m cuadernos, respectivamente. Si el valor que representa la diferencia positiva de cuadernos, que tienen ambos hermanos, es el doble de la cantidad de cuadernos que tiene Bryanna, disminuido en 5. ¿Cuántos cuadernos en total compraron los dos hermanos?

Solución:

La diferencia positiva de cuadernos que tienen ambos hermanos: $|4 - m|$

El doble de la cantidad de cuadernos que tiene Bryanna, disminuido en 5: $2m - 5$

Luego, del dato: $|4 - m| = 2m - 5$

$$\rightarrow |4 - m| = 2m - 5$$

$$\rightarrow 2m - 5 \geq 0 \wedge \{4 - m = 2m - 5 \vee 4 - m = 5 - 2m\}$$

$$\rightarrow m \geq \frac{5}{2} \wedge \{m = 3 \vee m = 1\}$$

$$\rightarrow m = 3.$$

$\therefore$ Entre ambos hermanos compraron 7 cuadernos.

Ejemplo 3:

Si $\langle a, b \rangle$ es el conjunto solución que se obtiene al resolver la inecuación, $|5x - 5| - |5x + 15| < |2x - 2| - |4x + 12|$, halle el valor de $3(a + b)$.

Solución:

$$|5x - 5| - |5x + 15| < |2x - 2| - |4x + 12|$$

$$\rightarrow 5|x - 1| - 5|x + 3| < 2|x - 1| - 4|x + 3|$$

$$\rightarrow 3|x - 1| < |x + 3| \rightarrow (3|x - 1|)^2 < (|x + 3|)^2$$

$$\rightarrow (3(x - 1))^2 - (x + 3)^2 < 0$$

$$\rightarrow (3(x - 1) - (x + 3))(3(x - 1) + (x + 3)) < 0$$

$$\rightarrow (2x - 6)(4x) < 0$$

Luego los puntos críticos son: 3 y 0

$$\rightarrow x \in \langle 0, 3 \rangle = \langle a, b \rangle$$

$$\rightarrow a = 0, b = 3$$

$$\therefore 3(a+b) = 9.$$

2. NÚMEROS COMPLEJOS

El conjunto de los números complejos se denota por :

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1 \}$$

Notación: $z = a + bi$, donde $a = \operatorname{Re}(z)$ y $b = \operatorname{Im}(z)$.

2.1 Igualdad de números complejos

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow [a = c \wedge b = d]$$

2.2 Operaciones con números complejos

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ entonces

i. $z + w = (a + c) + (b + d)i$

ii. $z \cdot w = (ac - bd) + (bc + ad)i$

2.3 Definiciones: Sea $z = a + bi$ un número complejo

1. $\bar{z} = a - bi$ se llama conjugado de z
2. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se llama módulo de z
3. Si $b = 0$, $z = a$ se llama número real
4. Si $a = 0$, $z = bi$ se llama imaginario puro

Ejemplo 4: Sean $z = 3 - 2i$ y $w = -2 + 4i$ entonces

- $z + w = (3 - 2i) + (-2 + 4i) = (3 - 2) + (-2 + 4)i = 1 + 2i$
- $z \cdot w = (3 - 2i) \cdot (-2 + 4i) = (-6 + 8) + (12 + 4)i = 2 + 16i$
- $|z| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ y $\bar{z} = 3 + 2i$
- $|w| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{5}$ y $\bar{w} = -2 - 4i$

Observación: Se cumple:

$$a) (1+i)^2 = 2i \text{ y } (1-i)^2 = -2i$$

$$b) \left(\frac{1+i}{1-i} \right) = i \text{ y } \left(\frac{1-i}{1+i} \right) = -i$$

$$c) z = \frac{a+bi}{c+di} \text{ es un número real } \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$d) z = \frac{a+bi}{c+di} \text{ es un imaginario puro } \Leftrightarrow \frac{a}{d} = -\frac{b}{c}$$

Ejemplo 5:

Si z es el número complejo tal que satisface , $8i - 7 + \bar{z} = 3z - (4i - 5)$, halle el valor de $\operatorname{Re}(z-2) + \operatorname{Im}(z - 3^8)$.

Solución:

$$\text{Sea } z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - bi$$

En la ecuación se tiene:

$$8i - 7 + a - bi = 3(a + bi) - 4i + 5$$

$$\rightarrow -7 + a + i(8 - b) = 3a + 5 + i(3b - 4)$$

$$\rightarrow -7 + a = 3a + 5 \quad \wedge \quad 8 - b = 3b - 4$$

$$\rightarrow a = -6 \quad \wedge \quad b = 3$$

$$\rightarrow z = -6 + 3i$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z-2) + \operatorname{Im}(z - 3^8) = \operatorname{Re}(-8 + 3i) + \operatorname{Im}(-6 - 3^8 + 3i) = -8 + 3 = -5.$$

2.4 Propiedades:

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene las siguientes propiedades.

$$1) z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$6) \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$2) z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = [2\operatorname{Im}(z)]i$$

$$7) \overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$$

$$3) |z| = |\bar{z}| = |-z|$$

$$8) \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$4) |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$9) \overline{\bar{z}} = z$$

$$5) \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ con } w \neq 0$$

$$10) |z^n| = |z|^n, \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

2.5 Potencias de la unidad imaginaria i

$$i^{\overset{0}{4}} = 1, i^{\overset{0}{4}+1} = i, i^{\overset{0}{4}+2} = -1, i^{\overset{0}{4}+3} = -i$$

Ejemplo 7: Calcule las potencias

$$1) i^{1247} = i^{\overset{0}{4}+3} = -i$$

$$2) i^{-3691} = (i^{3691})^{-1} = (i^{\overset{0}{4}+3})^{-1} = (-i)^{-1} = -\frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = i$$

$$3) \frac{1}{i^{2362}} = i^{-2362} = (i^{2362})^{-1} = (i^{\overset{0}{4}+2})^{-1} = (-1)^{-1} = -1$$

Álgebra

EJERCICIOS

1. En el conjunto de los números reales, se define el operador Δ dado por $(a \Delta b) = |a + |b||$. Si se cumple que $(3 \Delta x)(5x - 3) = 7|x + 3|$, halle el valor de $(3x)$.
- A) 10 B) 6 C) 7 D) 9

Solución:

$$(3 \Delta x)(5x - 3) = 7|x + 3|$$

$$\rightarrow |3 + |x|| (5x - 3) = 7|x + 3|$$

i) $5x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{5}$. Luego: $|x + 3| = x + 3$ y $|x| = x$

ii) Reemplazando en la ecuación:

$$|3 + |x|| (5x - 3) = 7|x + 3|$$

$$\rightarrow |3 + x|(5x - 3) = 7(x + 3)$$

$$\rightarrow (x + 3)(5x - 3) = 7 \underbrace{(x + 3)}_{\neq 0}$$

Cancelando el término $(x + 3)$, se obtiene:

$$5x - 3 = 7$$

$$\rightarrow x = 2$$

$$\therefore 3x = 6.$$

Rpta.: B

2. Para un show infantil se reservó solamente para los niños una sala de teatro de forma rectangular, en la que las butacas estaban distribuidas de manera uniforme en $(a+b)$ filas y $(b-a)$ columnas. Cuando empezó la función estuvieron presentes $4(2b-5a)$ niños sentados y al cabo de los primeros veinte minutos llegaron 84 niños más, tal que al sentarse cada uno de ellos, resultó que el total de las butacas estuvieron ocupadas. ¿Cuántas filas de butacas hay en dicha sala de teatro?

A) 20 B) 18 C) 12 D) 14

Solución:

- i) Total de butacas $(a+b)(b-a) = b^2 - a^2$
 ii) Total de niños que ocuparon las butacas : $4(2b-5a) + 84$
 iii) Luego: $b^2 - a^2 = 4(2b-5a) + 84$
 $\rightarrow b^2 - 8b + 16 = a^2 - 20a + 100$
 $\rightarrow (b-4)^2 = (a-10)^2 \rightarrow \sqrt{(b-4)^2} = \sqrt{(a-10)^2}$
 $\rightarrow |b-4| = |a-10|$
 $\rightarrow b-4 = a-10 \vee b-4 = 10-a$
 $\rightarrow b-a = -6 \vee a+b = 14$; del dato $(b-a)$ es positivo
 $\therefore a+b = 14$.

Rpta.: D

Lea la siguiente información, y en base a ello, responda a las preguntas 3 y 4 :

Tablero Matemático (jumpmath): Bryanna es una niña muy ingeniosa quien ha elaborado un juego matemático, al cual lo ha denominado *jumpmath*. Este juego consta, como se muestra en la figura 1, de un tablero dividido en casilleros, en la que cada uno de ellos está determinado por una posición (desde la posición cero " P_0 " hasta la posición cincuenta " P_{50} "); además contiene un dado y fichas numéricas, en las que están impresos, valores enteros x , distintos de cero y de la unidad. El juego empieza sacando al azar una ficha numérica y ubicarla en la posición cero; luego se lanza el dado, cinco veces, de manera consecutiva y en el cual el número obtenido en cada lanzamiento determina las indicaciones a seguir, según se muestra en la tabla 1:

P_0	P_1	...					P_{50}
Inicio							

Figura 1

Número obtenido al lanzar el dado	Indicación.
1	Retroceder 6 casilleros.
2	Ir a la posición $ x $.
3	Retroceder $ x - 3 $ casilleros.
4	Retroceder $(x^2 + 3)$ casilleros.
5	Avanzar 18 casilleros.
6	Avanzar hasta la posición obtenida de multiplicar el valor que indica la posición actual por $ x $.

Tabla 1

Nota: Se pierde el juego, si al seguir la indicación del número obtenido en el dado, resulta que la ficha sale a la izquierda de la posición inicio o si sale la ficha a la derecha de la posición cincuenta. Se gana el juego si se llega a la posición cincuenta.

3. Bryanna al usar el *jumpmath* por primera vez, obtuvo la ficha numérica “x” y al lanzar el dado cinco veces obtuvo, en el orden dado, los siguientes números: 2, 1, 6, 5, 3. Si Bryanna terminó el juego en la posición 15, ¿cuál fue la posición de la ficha al término del primer lanzamiento?

A) 6 B) 9 C) 5 D) 8

Solución:

- i) Ubicaciones de la ficha, según los lanzamientos obtenidos :

Al 1er lanzamiento: la posición obtenida es $|x|$

Al 2do lanzamiento: la posición obtenida es $|x| - 6$

Al 3er lanzamiento: la posición obtenida es $(|x| - 6)|x|$

Al 4to lanzamiento: la posición obtenida es $(|x| - 6)|x| + 18$

Al 5to lanzamiento: la posición obtenida es $((|x| - 6)|x| + 18) - ||x| - 3|$

ii) Terminó el juego en la posición 15

$$\text{Luego: } ((|x| - 6)|x| + 18) - |x| - 3 = 15$$

$$(|x|^2 - 6|x| + 9) - |x| - 3 + 9 = 15$$

$$(|x| - 3)^2 - |x| - 3 - 6 = 0$$

$$||x| - 3|^2 - |x| - 3 - 6 = 0$$

$$(|x| - 3 - 3)(|x| - 3 + 2) = 0$$

$$\rightarrow |x| - 3 = -2 \text{ (absurdo)} \vee |x| - 3 = 3$$

$$\rightarrow |x| = 6 \vee |x| = 0, \text{ (del dato } x \neq 0)$$

$\therefore$ La posición obtenida al término del primer lanzamiento fue 6.

Rpta.: A

4. En el mismo juego, Jaime obtuvo al lanzar el dado, los siguientes números, en el orden dado: 2, 1, 1, 5, 4. Si al inicio la ficha sacada al azar por Jaime fue $(x^2 + 2x + 5)$; $x < 7$ y la posición final de la ficha de Jaime superó a la posición $|4x - 24|$, ¿cuál es el menor valor entero que asume x ?

A) 6

B) 5

C) 3

D) 4

Solución:

Ubicaciones de la ficha, según los lanzamientos obtenidos

Al 1er lanzamiento: la posición obtenida es $|x^2 + 2x + 5|$

Al 2do lanzamiento: la posición obtenida es $|x^2 + 2x + 5| - 6$

Al 3er lanzamiento: la posición obtenida es $|x^2 + 2x + 5| - 6 - 6$

Al 4to lanzamiento: la posición obtenida es $|x^2 + 2x + 5| - 6 - 6 + 18$

Al 5to lanzamiento: la posición obtenida es $|x^2 + 2x + 5| - 6 - 6 + 18 - (x^2 + 3)$

Entonces: $|x^2 + 2x + 5| + 6 - (x^2 + 3) > |4x - 24|$

$$\rightarrow \underbrace{(x^2 + 2x + 5) + 6 - (x^2 + 3)}_{\Delta < 0 \text{ y } a > 0} > |4x - 24|; \text{ pues } |x^2 + 2x + 5| = x^2 + 2x + 5$$

$$\rightarrow 2x + 8 > |4x - 24|$$

$$\rightarrow -2x - 8 < 4x - 24 < 2x + 8 \quad y \quad \begin{cases} 2x + 8 > 0 \\ \rightarrow x > -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow 16 < 6x \quad \wedge \quad 2x < 32$$

$$\rightarrow \frac{16}{6} < x < 16 \quad \wedge \quad x > -4 \quad \wedge \quad x < 7$$

$$\rightarrow x \in \{3, 4, 5, 6\}$$

$\therefore$ El menor valor que puede asumir x es 3.

Rpta.: C

5. El lado de un patio, que tiene forma cuadrada, mide $|x - 2|$ metros. Si el valor numérico del área de dicho patio, disminuído en quince unidades es menor que el semiperímetro del mismo patio, halle el perímetro de dicho patio, sabiendo que x es el mayor valor entero que cumple las condiciones mencionadas.

A) 20 metros B) 16 metros C) 12 metros D) 24 metros

Solución:

La ecuación planteada es: $|x - 2|^2 - 15 < 2|x - 2|$

$$\rightarrow |x - 2|^2 - 2|x - 2| - 15 < 0$$

$$\rightarrow (|x - 2| - 5)(|x - 2| + 3) < 0$$

$$\rightarrow |x - 2| < 5$$

$$\rightarrow -5 < x - 2 < 5$$

$$\rightarrow -3 < x < 7$$

$$\rightarrow x_{\max} = 6$$

$\therefore$ Perímetro es $4|x - 2| = 16$ metros.

Rpta.: B

6. En una fábrica, se elaboraron cajas de aluminio en forma de un paralelepípedo rectangular, cuyas dimensiones, en metros, son: 20, " x " y $\frac{1}{|x^2 - 1|}$. Un segundo

lote de cajas de base en forma cuadrada será elaborado, y se exige que el lado de la base de cada caja mida $|x|$ metros y la altura de cada caja mida $\frac{1}{||x| - 1|}$ metros.

Halle el mayor valor entero que puede asumir " x "; de modo que el volumen de cada caja del segundo lote sea menor al volumen de cada caja del primer lote.

A) 5 B) 6 C) 4 D) 3

Solución :

Volumen de cada caja del primer lote : $\frac{20x}{|x^2 - 1|}$

Volumen de cada caja del segundo lote : $\frac{|x|^2}{||x|-1|}$

Luego: $\frac{|x|^2}{||x|-1|} < \frac{20x}{|x^2 - 1|}$; donde $x > 0$

$$\rightarrow \frac{|x|^2}{|x-1|} < \frac{20x}{|x+1||x-1|} \quad ; \quad x \neq \{-1, 1\}$$

$$\rightarrow x^2 < \frac{20x}{(x+1)}$$

$$\rightarrow x < \underbrace{\frac{20}{(x+1)}}_{>0} \quad \rightarrow x^2 + x < 20$$

$$\rightarrow x^2 + x - 20 < 0$$

$$\rightarrow (x+5)(x-4) < 0$$

$$\rightarrow x \in \langle -5, 4 \rangle - \{-1, 1\}$$

$$\rightarrow x \in \langle -5, 4 \rangle - \{-1, 1\} \cap \langle 0, +\infty \rangle$$

$$\rightarrow x \in \langle 0, 4 \rangle - \{1\}$$

$\therefore$ Mayor valor de x es 3.

Rpta.: D

7. Beto, Camila, Daniel y Alexia son cuatro estudiantes destacados(as) en el curso de matemáticas. Su profesor de álgebra seleccionará a quién o quienes den alguna respuesta correcta respecto a los números complejos z y w tales que verifican :

$$\operatorname{Re}(z - w) = \operatorname{Im}(w), \quad \operatorname{Re}(w + i) = \operatorname{Im}(\bar{z} + 2w), \quad w + z = 7i$$

Cada uno de ellos, en el orden mencionado, respondió lo siguiente:

- El complejo w es $1+2i$.
- El complejo z es $1+5i$.
- El complejo $(w - z)$ es $-2 - 3i$.
- El complejo w es $1 - 2i$.

¿Quién o quiénes fueron seleccionados?

- | | |
|----------------|--------------------|
| A) Solo Camila | B) Camila y Daniel |
| C) Solo Beto | D) Daniel y Alexia |

Solución:

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$

De $7i = w + z = (a + c) + (b + d)i \rightarrow a + c = 0$ y $b + d = 7$

Luego $w = -a + di$

Entonces $z - w = (a + bi) - (-a + di) = 2a + (b - d)i$

$$w + i = -a + (d + 1)i$$

$$\bar{z} + 2w = (a - bi) + (-2a + 2di) = -a + (2d - b)i$$

De: $\operatorname{Re}(z - w) = \operatorname{Im}(w) \rightarrow 2a = d$

De: $\operatorname{Re}(w + i) = \operatorname{Im}(\bar{z} + 2w)$

$\rightarrow -a = 2d - b$; donde $b = 7 - d = 7 - 2a$

$\rightarrow -a = 4a - (7 - 2a)$

$\rightarrow a = 1, b = 5, c = -1, d = 2$

Luego, $z = 1 + 5i$ y $w = -1 + 2i, w - z = -2 - 3i$

Por tanto respondieron correctamente Camila y Daniel

Rpta.: B

8. Un número complejo z , cuyo módulo es 39, está representado gráficamente en el primer cuadrante y es tal que su parte real es a su parte imaginaria como 5 es a 12, halle el módulo de $(z - \bar{z})$.

A) 72

B) 52

C) 30

D) 78

Solución:

Sea $z = a + bi = 5k + (12k)i$

$$\rightarrow 39 = \sqrt{(5k)^2 + (12k)^2} = 13k$$

$$\rightarrow k = 3$$

$$\rightarrow z = 15 + 36i$$

$$\rightarrow z - \bar{z} = 72i$$

$$\therefore |z - \bar{z}| = 72.$$

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La casa de Stephano y la casa de Rebeca están ubicadas en una misma acera recta. La ubicación de ambas casas, en ese orden, está representada por los puntos $S(x, 0)$ y $R(10, 0)$ de la recta numérica; tal que $x < 0$. Si la distancia (en metros) entre ambas casas es igual a la suma de la unidad con, la diferencia positiva del doble de la abscisa del punto S con tres, halla la distancia entre ambas casas.
- A) 6 metros B) 12 metros C) 16 metros D) 14 metros

Solución:

- i) Distancia entre ambas casas : $|10 - x|$
 ii) Doble de la abscisa del punto S : $2x$
 iii) Diferencia positiva del doble de la abscisa del punto S con tres : $|2x - 3|$

Entonces: $|10 - x| = 1 + |2x - 3|$; donde $x < 0$, luego $10 - x > 0$

$$\rightarrow 10 - x = 1 + |2x - 3|$$

$$\rightarrow 9 - x = |2x - 3| , 9 - x > 0$$

$$\rightarrow 2x - 3 = 9 - x \vee 2x - 3 = x - 9$$

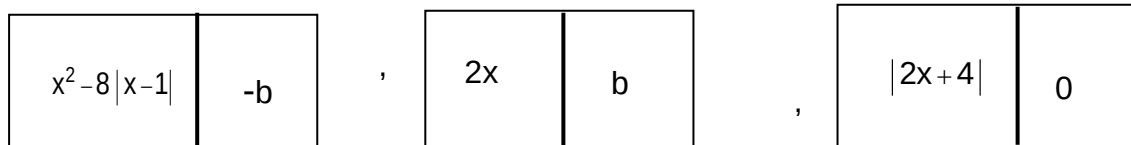
$$\rightarrow x = 4 \quad \vee \quad x = -6$$

$$\rightarrow x = -6 \text{ (cumple } x < 0 \text{)}$$

$\therefore$ Distancia entre ambas casas es $|10 - x| = 16$ metros

Rpta.:C

2. **Domaths:** Son piezas de madera en forma rectangular dividido en dos casilleros, como se muestra en la figura, en tres de las piezas del Domaths,



Los números impresos que hay en cada casillero (caras colaterales) de una misma pieza dan la misma suma en cada una de las piezas. Si b y x son números positivos, halle el valor de x .

- A) 8 B) 10 C) 9 D) 12

Solución:

Se cumple:

$$x^2 - 8|x - 1| - b = 2x + b = |2x + 4| + 0$$

$$i) |2x + 4| = 2x + b \quad ; \quad 2x + b > 0$$

$$\rightarrow 2x + 4 = 2x + b$$

$$\rightarrow b = 4$$

$$ii) x^2 - 8|x - 1| - 4 = 2x + 4$$

$$\rightarrow x^2 - 8|x - 1| - 8 - 2x = 0$$

$$\rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 8|x - 1| - 9 = 0$$

$$\rightarrow (x - 1)^2 - 8|x - 1| - 9 = 0$$

$$\rightarrow |x - 1|^2 - 8|x - 1| - 9 = 0$$

$$\rightarrow (|x - 1| - 9)(|x - 1| + 1) = 0$$

$$\rightarrow |x - 1| = 9 \quad \vee \quad \underbrace{|x - 1| = -1}_{\text{absurdo}}$$

$$\rightarrow x = 10 \quad \vee \quad \underbrace{x = -8}_{\text{No cumple la condición}}$$

$$\therefore x = 10.$$

Rpta.: B

3. Una piscina tiene la forma de un paralelepípedo rectangular, cuya base tiene un área de 3 metros cuadrados y su profundidad mide $|2x + 1|$ metros. Si la piscina tiene una capacidad máxima de $|x + 18|$ metros cúbicos, ¿cuánto será el costo mínimo para llenar dicha piscina, si el metro cúbico cuesta S/ 3,30?

A) S/ 49, 50

B) S/ 52, 30

C) S/ 69, 30

D) S/ 66

Solución:

$$i) \text{ De los datos : Volumen} = 3|2x + 1| = |x + 18|$$

$$\rightarrow |6x + 3| = |x + 18|$$

$$\rightarrow 6x + 3 = x + 18 \quad \vee \quad 6x + 3 = -(x + 18)$$

$$\rightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

$$ii) \text{ Si } x = 3, \text{ entonces Volumen} = |x + 18| = 21, \text{ luego el costo es: } 21 \times 3,30 = \text{S/ } 69,30$$

$$\text{Si } x = -3, \text{ entonces Volumen} = |x + 18| = 15, \text{ luego el costo es: } 15 \times 3,30 = \text{S/ } 49,50$$

$\therefore$ El costo mínimo es S/ 49,50.

Rpta.: A

4. Las dimensiones de un terreno de forma rectangular son $|4x+8|$ y $|10x+20|$ metros. Si el perímetro del terreno es $||6x+12|+66|$ metros, determine el área de dicho terreno.

A) 420m^2 B) 300m^2 C) 240m^2 D) 360m^2

Solución:

De los datos :

$$\begin{aligned}2|4x+8|+2|10x+20| &= ||6x+12|+66| \\ \rightarrow 2[4|x+2|+10|x+2|] &= |6|x+2|+66| = 6|x+2|+66 \\ \rightarrow 28|x+2| &= 6(|x+2|+11) \\ \rightarrow 22|x+2| &= 66 \\ \rightarrow |x+2| &= 3\end{aligned}$$

Luego, las dimensiones del terreno son: $4|x+2|=12$ y $10|x+2|=30$
Por tanto, el área de dicho terreno es de 360 metros cuadrados.

Rpta.: D

5. El día de ayer en una ciudad del departamento de Puno, se registró una temperatura promedio T (en grado Celsius) expresada por $T = \left| \frac{x-3}{x+6} \right|$; donde $x \in \langle -4, 4 \rangle$. El día de hoy la temperatura promedio ha aumentado en cinco grados Celsius respecto del día de ayer. Si para mañana se pronostica que la temperatura aumente en un grado más, respecto a la temperatura promedio del día de hoy, ¿cuánto es la mínima temperatura que se pronostica para mañana?

A) 7°C B) 5°C C) 6°C D) 9°C

Solución:

$$i) T = \left| \frac{x-3}{x+6} \right| = \left| \frac{x+6-9}{x+6} \right| = \left| 1 - \frac{9}{x+6} \right|$$

$$ii) -4 < x \leq 4$$

$$\rightarrow 2 < x+6 \leq 10 \rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{x+6} \geq \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow \frac{-9}{2} < -\frac{9}{x+6} \leq -\frac{9}{10} \rightarrow \frac{-7}{2} < 1 - \frac{9}{x+6} \leq \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow 0 \leq \left| 1 - \frac{9}{x+6} \right| < \frac{7}{2}$$

$$\rightarrow 0 \leq T < \frac{7}{2}$$

$$iii) \text{Temperatura de hoy} = T + 5 \in \left[5, \frac{17}{2} \right)$$

$$iv) \text{Temperatura que se pronostica para mañana} = T + 6 \in \left[6, \frac{19}{2} \right)$$

Por tanto, la mínima temperatura que se pronostica para mañana es de 6°C

Rpta.: C

6. Una fábrica produce varillas de bronce. Cada varilla es considerada aceptable si la diferencia positiva del doble de la longitud (en metros) de cada varilla con un metro, no es mayor que la diferencia positiva de la longitud de la varilla con cinco metros, y el valor de esta última diferencia positiva debe ser menor que seis. Si la longitud de cada varilla es la de mayor medida posible, halle dicha longitud.

A) 2 metros

B) 3 metros

C) 4 metros

D) 1 metro

Solución:

Sea la longitud de cada varilla: x metros; $x > 0$

i) La diferencia positiva del doble de la longitud de cada varilla con uno : $|2x - 1|$

ii) la diferencia positiva de la longitud de la varilla con cinco : $|x - 5|$

De los datos:

$$|2x-1| \leq |x-5| < 6$$

$$1) |2x-1| \leq |x-5| \rightarrow |2x-1|^2 \leq |x-5|^2$$

$$\rightarrow (2x-1)^2 - (x-5)^2 \leq 0$$

$$\rightarrow [(2x-1)+(x-5)][(2x-1)-(x-5)] \leq 0$$

$$\rightarrow (3x-6)(x+4) \leq 0$$

Luego los puntos críticos son -4 y 2

$$\rightarrow x \in [-4, 2]$$

$$2) |x-5| < 6$$

$$\rightarrow -6 < x-5 < 6$$

$$\rightarrow -1 < x < 11$$

iii) Intersectamos los valores de x obtenidos en 1º) y 2º), se obtiene $x \in \langle -1, 2 \rangle$

iv) Como $x > 0$, entonces de iii) $x \in \langle 0, 2 \rangle$

Por tanto, la mayor medida posible de cada varilla es de 2 metros.

Rpta.: A

7. Halle la distancia que separa a un número complejo z (no real y no nulo) del origen del plano complejo; si se cumple que el cuadrado de dicho número complejo es igual al conjugado del mismo número complejo.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B) 1

C) $\frac{1}{2}$

D) $\sqrt{3}$

Solución:

Sea $z = a + bi$ es no real, entonces $b \neq 0$

Del dato : $z^2 = \bar{z}$

$$\rightarrow (a + bi)^2 = a - bi$$

$$\rightarrow a^2 + 2abi + (bi)^2 = a - bi$$

$$\rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = a - bi$$

$$\rightarrow a^2 - b^2 = a \quad y \quad \begin{cases} 2ab = -b \\ \rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow b^2 = a^2 - a = \frac{3}{4} \rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto la distancia de z respecto del origen es: $|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

Rpta.: B

8. En el conjunto $\mathbb{C}$ se define el operador $\boxed{m+ni} = \frac{m+ni}{-n+mi}$; donde $\{m,n\} \subset \mathbb{R}$.

Si $z_1 = \boxed{a-2i}$ y $z_2 = \boxed{a-4i}$ y $M = z_1 + z_2$; halle el valor de $(a-n)$, tal que $M+a = \frac{3+ni}{2+i^6}$, $a \in \mathbb{R}$.

A) 6

B) 8

C) 5

D) 7

Solución:

$$z_1 = \frac{a-2i}{2+ai} = \frac{(a-2i)i}{2+ai^2} = \frac{ai-2i^2}{2+ai^2} = \frac{-i(2i-a)}{2i-a} = -i$$

$$\text{Análogamente } z_2 = \frac{a-4i}{4+ai} = -i; \text{ luego } M = -2i$$

$$\text{De } M+a = \frac{3+ni}{2+i^6} \rightarrow -2i+a = \frac{3+ni}{2+i^4 i^2} = \frac{3+ni}{2-1} = 3+ni$$

$$\rightarrow a=3 \text{ y } n=-2$$

$$\therefore a-n=5.$$

Rpta.: C

Álgebra

EJERCICIOS

1. La solución de la ecuación $\left| \left| x^2 + 2x + 1 \right| + 7 \right| = \left| x^2 + x + 30 \right|$ representa mi edad en años. Si tengo una hermana, cuya edad es el doble de la mía, halle la suma de las cifras del número que representa la edad (en años) de mi hermana.

A) 12 B) 8 C) 10 D) 11

Solución:

i) Encontremos la solución de la ecuación :

$$\left| \left| x^2 + 2x + 1 \right| + 7 \right| = \left| x^2 + x + 30 \right|$$

$$\left| \underbrace{\left| x^2 + 2x + 1 \right|}_{\geq 0} + 7 \right| = \left| \underbrace{x^2 + x + 30}_{\Delta < 0} \right|$$

$$\left| \underbrace{x^2 + 2x + 8}_{\Delta < 0} \right| = x^2 + x + 30$$

$$x^2 + 2x + 8 = x^2 + x + 30$$

$$x = 22$$

ii) Luego mi edad es 22 años, así mi hermana tiene 44 años.

iii) Por lo tanto $4+4=8$.

Rpta.: B

2. María necesitará globos y sorpresas para la fiesta de cumpleaños de su hijo. En esta fiesta habrá 100 invitados y a todos le corresponderá un globo y una sorpresa. Si la suma y el producto de las soluciones de la ecuación $|2x - 6| + |15 - 5x| = 14$ representan, respectivamente, el número de globos y sorpresas (ambos en decenas), que compró María, ¿cuántas sorpresas y globos (en ese orden), aun le faltará comprar?

A) 60 y 70 B) 40 y 20 C) 50 y 40 D) 40 y 50

Solución:

i) De la ecuación se tiene

$$|2x - 6| + |15 - 5x| = 14$$

$$2|x - 3| + 5|x - 3| = 14$$

$$7|x - 3| = 14$$

$$|x - 3| = 2 \Rightarrow x - 3 = 2 \text{ o } x - 3 = -2$$

$$x = 5 \text{ o } x = 1$$

ii) Así la suma de soluciones es 6, entonces hay 60 globos.

iii) Así el producto de soluciones es 5, entonces hay 50 sorpresas.

iv) Por lo tanto aún le faltan comprar 40 globos y 50 sorpresas.

Rpta.: C

3. La pista de una calle debe tener al menos dos carriles y cada carril debe tener un ancho de 40cm más que el ancho x (en metros) de un auto de marca SPEEDY. Si x satisface la ecuación $|15x - 20| = 15 - 5x$, ¿cuál es el ancho mínimo de tal pista?

A) 4,30 m

B) 3,90 m

C) 3,50 m

D) 4,70 m

Solución:

i) De la ecuación tenemos

$$|15x - 20| = 15 - 5x$$

$$15 - 5x \geq 0 \text{ y } [15x - 20 = 15 - 5x \text{ o } 15x - 20 = 5x - 15]$$

$$x \leq 3 \text{ y } \left[x = \frac{35}{20} \text{ o } x = \frac{1}{2} \right]$$

$$x \leq 3 \text{ y } [x = 1.75 \text{ o } x = 0.5]$$

$$x = 175\text{cm} \text{ o } x = 50\text{cm}$$

no puede ser muy pequeño para un auto

- ii) Un carril mide $175 + 40 = 215\text{cm}$, y como al menos son 2 carriles que tiene tal pista, por tanto tal pista debe medir $\geq 2(215) = 430\text{cm}$.

Rpta.: A

4. Al resolver $|x + 4| \geq x^2 - x + 1$, x_0 es el máximo valor que satisface la inecuación. Sabiendo que el precio de un cuaderno de 100 hojas de marca LAY es S/ x_0 y $\overline{ab}$ representa la cantidad de soles que José tiene que pagar por la compra de $(x_0^2 - 2)$ cuadernos de 100 hojas de marca LAY, halle el valor de $a + 4b$.

A) 11

B) 6

C) 3

D) 10

Solución:

De la inecuación se tiene: $x + 4 \geq x^2 - x + 1 \quad \vee \quad x + 4 \leq -x^2 + x - 1$.

De donde $\underbrace{x^2 - 2x - 3 \leq 0}_{(x-3)(x+1) \leq 0} \quad \vee \quad \underbrace{x^2 + 5 \leq 0}_{\text{absurdo}}$

De donde el máximo valor es $x_0 = 3$.

Así cada cuaderno cuesta 3 soles y José pagará por la compra de $x_0^2 - 2 = 7$

Cuadernos: $3(7) = \overline{ab} = 21$ soles.

Por tanto $a + 4b = 2 + 4(1) = 6$.

Rpta.: B

5. Halle la suma de los divisores positivos del mayor elemento entero del conjunto solución de la inecuación $|1 + |x - 2| + x| \leq 4$.

A) 3

B) 6

C) 7

D) 2

Solución:

i) Resolviendo

$$|1 + |x - 2| + x| \leq 4$$

$$-4 \leq 1 + |x - 2| + x \leq 4$$

$$-5 \leq |x - 2| + x \leq 3$$

$$* \text{ Si } x \geq 2: -5 \leq x - 2 + x \leq 3$$

$$\frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{asi } x \in \left[2, \frac{5}{2}\right] \dots \dots \alpha$$

$$* \text{ Si } x < 2: -5 \leq -x + 2 + x \leq 3$$

$$-5 \leq 2 \leq 3$$

$$\text{asi } x < 2 \Rightarrow x \in \langle -\infty, 2 \rangle \dots \dots \dots \beta$$

$$\text{ii) de } \alpha \text{ y } \beta: \text{c.s} = \left[2, \frac{5}{2}\right] \cup \langle -\infty, 2 \rangle = \langle -\infty, \frac{5}{2} \rangle$$

iii) Luego el mayor elemento entero en el conjunto solución es 2 y

la suma de sus divisores positivos es $1 + 2 = 3$.

Rpta.: A

6. Al expresar $M = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 3 - 3x < \sqrt{x^2 + 1} - 2x + 2 + x \right\}$ como un intervalo, la longitud de este, representa la medida en metros de la arista de un cubo ¿Cuál será el área de la superficie del cubo?

A) $6\sqrt{3} \text{ m}^2$

B) 12 m^2

C) 24 m^2

D) $6\sqrt{2} \text{ m}^2$

Solución :

i) Del conjunto M tenemos

$$\begin{aligned} \underbrace{2x^2 + 1 - 4x}_{2(x-1)^2 - 1} &< \underbrace{\sqrt{x^2 + 1 - 2x}}_{\sqrt{(x-1)^2}} \\ \Rightarrow 2\underbrace{(x-1)^2}_{|x-1|^2} - 1 &< |x-1| \\ \Rightarrow 2|x-1|^2 - |x-1| - 1 &< 0 \\ \Rightarrow (2|x-1| + 1)(|x-1| - 1) &< 0 \\ \Rightarrow 0 \leq |x-1| &< 1 \\ \Rightarrow 0 < x &< 2 \\ \text{asi } M &= \langle 0, 2 \rangle \end{aligned}$$

ii) Luego la longitud del intervalo es 2, por tanto la arista del cubo es 2m

iii) El área de la superficie del cubo es 24m^2 .

Rpta.: C

7. El suero glucosado es una solución de dextrosa en agua que se aplica de manera intravenosa. Además cada 1000 ml al x%, contiene $1000x\%$ g de dextrosa disuelta en agua para inyección. Cierta día, se suministra a un paciente 1000 ml de suero glucosado al M%, donde $M = \text{Re}(2z - w) + \text{Im}(z - 5w) + 7$, $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}$ y $w = 3i^{2019} + (1+i)^8 - 12$. ¿Cuántos gramos de dextrosa recibe el paciente ese día?

- A) 200 g B) 250 g C) 100 g D) 150 g

Solución:

a) $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$

b) $w = 3i^{2019} + (1+i)^8 - 12 = 3i^{2016+3} + \left(\underbrace{(1+i)^2}_{2i}\right)^4 - 12 = -3i + 16 - 12 = 4 - 3i$

c) $M = \text{Re}(2z - w) + \text{Im}(z - 5w) + 7$

$$M = \text{Re}[2(1) - (4 - 3i)] + \text{Im}[1 - 5(4 - 3i)] + 7 = \text{Re}(-2 + 3i) + \text{Im}(-19 + 15i) + 7$$

$$M = -2 + 15 + 7 = 20$$

d) Así el paciente recibe $1000(20\%)g = 200g$

Rpta.: A

8. Sean $z = 4 - 3i$, $w \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z + \bar{z}) + \frac{75i}{z} = 12i - |w|$. Si $\left| |w|^2 [\operatorname{Re}(w)]^2 - 1 \right| = |\bar{z}|$, halle el menor valor que puede tomar $\operatorname{Re}(w)$.

- A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{8}$ C) $-\sqrt{6}$ D) $-\sqrt{3}$

Solución:

a) $z = 4 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 4 + 3i$ y $|\bar{z}| = 5$

asi $z + \bar{z} = 8 \Rightarrow \operatorname{Re}(z + \bar{z}) = 8$

b) luego $\operatorname{Re}(z + \bar{z}) + \frac{75i}{4 - 3i} = 12i - |w|$

$$\Rightarrow 8 + \frac{75i(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = 12i - |w|$$

$$\Rightarrow 8 + 3i(4 + 3i) = 12i - |w|$$

$$\Rightarrow -1 = -|w| \Rightarrow |w| = 1$$

c) Reemplazando en $\left| |w|^2 [\operatorname{Re}(w)]^2 - 1 \right| = |\bar{z}|$

$$[\operatorname{Re}(w)]^2 - 1 = 5 \quad \text{o} \quad [\operatorname{Re}(w)]^2 - 1 = -5$$

$$[\operatorname{Re}(w)]^2 = 6 \quad \text{o} \quad [\operatorname{Re}(w)]^2 = -4 \text{ (absurdo)}$$

$$[\operatorname{Re}(w)] = \sqrt{6} \quad \text{o} \quad [\operatorname{Re}(w)] = -\sqrt{6}$$

d) por tanto el menor valor que puede tomar $[\operatorname{Re}(w)]$ es $-\sqrt{6}$.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La longitud del radio de un círculo C es numéricamente igual a tres unidades menos que la suma de los valores de x que verifican la ecuación $|2x^2 - 4| = 8x - 6$. Calcule el área de la región determinada por el círculo C.

- A) $4\pi u^2$ B) $3\pi u^2$ C) $2\pi u^2$ D) $(2 + \sqrt{3})\pi u^2$

Solución:

i) De la ecuación $|2x^2 - 4| = 8x - 6 \Leftrightarrow 8x - 6 \geq 0$ y

$$2x^2 - 4 = 8x - 6 \quad \text{o} \quad 2x^2 - 4 = -8x + 6$$

$$2x^2 - 8x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{o} \quad x = -5, \quad x = 1$$

$$\text{asi } CS = \{2 + \sqrt{3}, 1\}$$

ii) Luego el radio es $\sqrt{3}$, asi el área es $3\pi u^2$

Rpta.: B

2. En la ecuación $|x^2 - x + 1| = |3x - 5|$ la suma de los valores absolutos de sus soluciones, aumentado en $\sqrt{8}$ es de la forma $2\sqrt{m + \sqrt{p}}$, halle el valor de $p - m$.
- A) 33 B) 41 C) 23 D) 13

Solución:

Se tienen dos ecuaciones:

$$x^2 - x + 1 = 3x - 5 \quad \vee \quad x^2 - x + 1 = -3x + 5$$

$$\text{De donde } \underbrace{x^2 - 4x + 6 = 0}_{x \in \mathbb{R}} \quad \vee \quad \underbrace{x^2 + 2x - 4 = 0}_{x = -1 \pm \sqrt{5}}$$

Así la suma de los valores absolutos de sus soluciones, aumentado en $\sqrt{8}$:

$$|-1 + \sqrt{5}| + |-1 - \sqrt{5}| + \sqrt{8} = \sqrt{5} - 1 + 1 + \sqrt{5} + \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{5} + \sqrt{8} = 2\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = 2\sqrt{7 + \sqrt{40}}$$

Luego $m=7$ y $p=40$, $p-m=33$.**Rpta.: A**

3. Si $G = \left\{ \left| \frac{x-2}{x+4} \right| + 5 \mid x \in \langle -1, 8 \rangle \right\}$ y $T = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2x \leq \sqrt{x^2 - 6x + 9} + 7 \right\}$, halle la suma del mínimo elemento de G y máximo elemento de T .

- A) 11 B) 8 C) 9 D) 7,5

Solución:Hallando G :

$$\text{i) } \frac{x-2}{x+4} = 1 - \frac{6}{x+4}$$

$$\text{ii) } x \in \langle -1, 8 \rangle \Rightarrow -1 < x \leq 8$$

$$3 < x+4 \leq 12$$

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{x+4} \geq \frac{1}{12}$$

$$1 + (-6) \frac{1}{3} < 1 + \frac{-6}{x+4} \leq \frac{-6}{12} + 1$$

$$-1 < 1 + \frac{-6}{x+4} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| \frac{x-2}{x+4} \right| < 1$$

$$\Rightarrow 0 + 5 \leq \left| \frac{x-2}{x+4} \right| + 5 < 1 + 5$$

$$\text{iii) } G = [5, 6)$$

Hallando T :

$$i) 2x \leq \sqrt{x^2 - 6x + 9} + 7$$

$$2x - 7 \leq |x - 3| \Leftrightarrow 2x - 7 \leq x - 3 \quad \text{o} \quad x - 3 \leq 7 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4 \quad \text{o} \quad x \leq \frac{10}{3} \Leftrightarrow x \leq 4$$

$$ii) T = \langle -\infty, 4] \rangle$$

Por lo tanto $G_{\min} = 5$ y $T_{\max} = 4$, así la Suma es 9.

Rpta.:C

4. El conjunto solución de $|x^2 - 5x| \leq x + 3$ es de la forma $[a, b] \cup [c, d]$. Si el valor de $a+b+c+d$ representa el promedio final de la nota de cierto curso de Jorge y se sabe que la nota mínima aprobatoria es 10,5, ¿cuánto le falta para aprobar el curso a Jorge?

A) 2

B) 1

C) 0,25

D) 0,5

Solución:

$$|x^2 - 5x| \leq x + 3$$

$$\Leftrightarrow x + 3 \geq 0 \text{ y } [-x - 3 \leq x^2 - 5x \leq x + 3]$$

$$\Leftrightarrow x \geq -3 \text{ y } [0 \leq x^2 - 4x + 3 \text{ y } x^2 - 6x - 3 \leq 0]$$

$$\Leftrightarrow x \geq -3 \text{ y } [0 \leq (x-3)(x-1) \text{ y } (x-3-\sqrt{12})(x-3+\sqrt{12}) \leq 0]$$

$$\Leftrightarrow CS = [3 - \sqrt{12}, 1] \cup [3, 3 + \sqrt{12}]$$

Así $a + b + c + d = 10$

a Jorge le falta 0.5 puntos.

Rpta.: D

5. Pepe se entera que una ONG repartirá canastas de víveres a personas que viven en lugares de frío extremo y que esto se hará de acuerdo al **PT** que es el promedio de la temperatura máxima y mínima de un pueblo. Si el **PT** $< 0^\circ\text{C}$, la canasta será de S/ 600; si $0^\circ\text{C} \leq \text{PT} < 5^\circ\text{C}$, la canasta será de S/ 350; si $5^\circ\text{C} \leq \text{PT} < 10^\circ\text{C}$, la canasta será de S/ 200, si no se cumple con cualquiera de estas condiciones, la persona no recibirá nada. La temperatura en el pueblo donde vive Pepe es $T^\circ\text{C}$. Si $T^\circ\text{C}$ disminuido en 1°C , no es menor que la diferencia positiva de 13°C con el doble de $T^\circ\text{C}$, ¿en cuántos soles estará valorizada la canasta que recibirá Pepe?

A) 200

B) 600

C) No recibe canasta

D) 350

Solución:

i) se tiene del dato que :

$$|2T - 13| \leq T - 1$$

$$\Leftrightarrow (T - 1 \geq 0 \text{ y } 1 - T \leq 2T - 13 \leq T - 1)$$

$$\Leftrightarrow \left(T \geq 1 \text{ y } \frac{14}{3} \leq T \leq 12 \right) \Leftrightarrow \frac{14}{3} \leq T \leq 12$$

$$\text{ii) } T_{\max} = 12 \text{ y } T_{\min} = \frac{14}{3}$$

$$\text{iii) } PT = \frac{12 + \frac{14}{3}}{2} = 8,33...$$

iv) Por tanto Pepe recibe 200 soles.

Rpta.: A

6. Se sabe que el valor de la temperatura (en °C) de cierto pueblo en la sierra peruana pertenece al complemento del conjunto solución de la inecuación $3x^2 \leq \frac{|x+28|}{x} - 3$.

Determine la suma del mayor valor entero de la temperatura negativa con el menor valor entero de la temperatura positiva de aquel pueblo.

A) 5°C

B) 2°C

C) 0°C

D) 4°C

Solución:i) De la inecuación se tiene que $x > 0$ y además $3x^3 + 3x \leq x + 28$

$$\Rightarrow 3x^3 + 2x - 28 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 2) \underbrace{(3x^2 + 6x + 14)}_{\Delta < 0} \leq 0 \rightarrow x \leq 2$$

$$CS = \{0, 2\}$$

ii) Así $(CS)^c = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty]$

iii) Luego el mayor valor entero de la temperatura negativa : -1°C

iv) Y el menor valor entero de la temperatura positiva: 3°C

v) Por tanto -1°C + 3°C = 2°C.

Rpta.: B

7. Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $z = (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + (1+i)^4$. Si las dimensiones (en metros) de un campo deportivo de forma rectangular, están dados por los valores de: $|\operatorname{Re}(z)|$ y $|\operatorname{Im}(z)| + 4$, calcule el área de dicho campo deportivo.

A) 55 m²B) 60 m²C) 45 m²D) 30 m²

Solución:

$$a) z = (1+i) + \underbrace{(1+i)^2}_{2i} + (1+i)^3 + \underbrace{(1+i)^4}_{[(1+i)^2]^2}$$

$$z = 1+i + 2i + (1+i)^2(1+i) + (2i)^2$$

$$z = 1+3i + (2i)(1+i) - 4 = -3+5i - 2 = -5+5i$$

$$b) \text{ así } \operatorname{Re} z = -5 \text{ y } \operatorname{Im} z = 5 \Rightarrow |\operatorname{Re} z| = 5 \text{ y } |\operatorname{Im} z| = 5$$

luego las medidas del campo de voley son 5m y 9m

por tanto su área es 45m^2 .

Rpta.: C

8. Con respecto a dos números complejos se sabe lo siguiente: la parte imaginaria de la suma de ellos es 5 y la parte real de su diferencia es nula. Además el producto de ambos es $-5+5i$ ¿Cuáles son estos números? Dé como respuesta la suma de sus módulos.

$$A) \sqrt{15+2\sqrt{50}} \quad B) \sqrt{15+2\sqrt{10}} \quad C) \sqrt{15+20\sqrt{5}} \quad D) \sqrt{50+2\sqrt{15}}$$

Solución:

$$1) \text{ Sean los números complejos } z = a+bi \text{ y } w = c+di$$

$$2) z+w = a+c+i(b+d) \Rightarrow \operatorname{Im}(z+w) = d+b = 5$$

$$3) z-w = a-c+i(b-d) \Rightarrow \operatorname{Re}(z-w) = a-c = 0 \Rightarrow a=c$$

$$4) zw = (ac-bd) + (ad+bc)i \Rightarrow -5+5i = ac-bd \text{ y } 5 = (ad+bc)$$

$$\text{así } a=c=1 \text{ y } (b=3, d=2 \text{ o } b=2, d=3)$$

$$5) \text{ De cualquier manera } (z=1+3i \text{ y } w=1+2i) \text{ o } (w=1+3i \text{ y } z=1+2i)$$

$$6) \text{ luego } |w|+|z| = \sqrt{10} + \sqrt{5} = \sqrt{15+2\sqrt{50}}.$$

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS DE CLASE N° 4

1. Halle el mayor valor de x en la ecuación $x^2 - |x - 2| - 8 = 4x$.

A) 8 B) 2 C) 4 D) 9 E) 6

Solución:

Tenemos la ecuación

$$x^2 - 4x - |x - 2| - 8 = 0, \text{ luego}$$

$$(x^2 - 4x + 4) - |x - 2| - 12 = 0,$$

$$\rightarrow |x - 2|^2 - |x - 2| - 12 = 0, \text{ I}$$

$$\text{luego } (|x - 2| - 4)(|x - 2| + 3) = 0,$$

$$\rightarrow |x - 2| = 4 \rightarrow x - 2 = 4 \vee x - 2 = -4$$

$$\rightarrow x = 6 \vee x = -2$$

Por lo tanto la mayor solución es 6.

Rpta.: E

2. Al resolver la ecuación $|3x - 1| = |5x - 15|$ se obtiene soluciones cuya suma representa la edad de María hace 2 años, ¿cuántos años falta para que María celebre sus quince años?

A) 6 B) 1 C) 3 D) 4 E) 8

Solución:

De la ecuación

$$3x - 1 = 5x - 15 \vee 3x - 1 = -5x + 15$$

$$\rightarrow x = 7 \vee x = 2$$

$$\rightarrow \text{Edad de María hace 2 años} = \text{Suma de soluciones} = 9$$

Edad actual : 11 años

$\therefore$ Le falta 4 años para cumplir quince

Rpta.: D

3. Dado los conjuntos

$$M = \{x^2 \in \mathbb{R} / |x^2 + 8| \leq |3x^2 - 7| + 5\} \text{ y } N = \{x \in \mathbb{R} / 3|x - 5| < 8 + |10 - 2x|\},$$

halle el número de elementos enteros de $M \cap N$.

A) 12 B) 14 C) 13 D) 11 E) 10

Solución:

I) En M:

$$\begin{aligned}
 |x^2 + 8| &\leq |3x^2 - 7| + 5 \rightarrow |x^2 + 3| \leq |3x^2 - 7| \\
 \Rightarrow (4x^2 - 4)(2x^2 - 10) &\geq 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 5) \geq 0 \\
 \Rightarrow x^2 \leq 1 \vee x^2 &\geq 5 \Rightarrow M = [0, 1] \cup [5, +\infty)
 \end{aligned}$$

II) En N

$$\begin{aligned}
 3|x - 5| < 8 + 2|x - 5| &\Rightarrow |x - 5| < 8 \Rightarrow -8 < x - 5 < 8 \\
 -3 < x < 13 &\Rightarrow N = (-3, 13)
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow M \cap N = [0, 1] \cup [5, 13)$$

$\therefore$ Nro. de elementos enteros de $M \cap N$ es 10.

Rpta.: E

4. El tiempo de servicios que tiene Juan en su trabajo es $(2p + 3)$ años, donde el valor de p es la suma de los valores enteros del conjunto solución que se obtiene al resolver la inecuación $x^2 + 3|x - 5| < 10x - 15$. Determine el tiempo de servicios que tiene Juan.

A) 33 años B) 23 años C) 28 años D) 39 años E) 25 años

Solución:

De la inecuación

$$x^2 - 10x + 25 - 25 + 3|x - 5| + 15 < 0$$

$$|x - 5|^2 + 3|x - 5| - 10 < 0$$

$$[|x - 5| + 5][|x - 5| - 2] < 0 \Rightarrow |x - 5| < 2$$

$$-2 < x - 5 < 2 \rightarrow 3 < x < 7$$

$$\rightarrow p = 4 + 5 + 6 = 15$$

$\therefore$ El tiempo de servicio es: $2(15) + 3 = 33$ años

Rpta.: A

5. La suma de dos números complejos conjugados entre si es 6 y la suma de sus módulos es $\sqrt{52}$. Determine el mayor número de 2 cifras significativas y diferentes que se forma con la parte real e imaginaria de uno de los números complejos.

A) 23 B) 13 C) 31 D) 32 E) 34

Solución:Sea $z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - bi$

$$\text{I. } z + \bar{z} = 6 \rightarrow a + bi + a - bi = 6 \rightarrow a = 3 \rightarrow \operatorname{Re}(z) = 3$$

$$z = 3 + bi \rightarrow \bar{z} = 3 - bi$$

$$\text{II. } |z| + |\bar{z}| = \sqrt{52} \quad 2|z| = 2\sqrt{13}$$

$$|z| = \sqrt{13} \sqrt{9 + b^2} = \sqrt{13} \rightarrow b = \pm 2 \quad \operatorname{Im}(z) = 2$$

Por lo tanto el mayor número de dos cifras significativas y diferentes es 32.

Rpta.: D

6. Si $z = \sqrt{3} + i$ y $w = \sqrt{2} + i$, halle $H = \operatorname{Re}(w) + z + \bar{z} + \overline{z - w}$.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3} - i$ C) $3\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3} + i$ E) $3\sqrt{3} + i$

Solución:

1. Hallemos $\overline{z - w} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

2. Ahora tenemos que: $H = \operatorname{Re}(w) + z + \bar{z} + \overline{z - w} = \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$

3. Finalmente $H = 3\sqrt{3}$.

Rpta.: C

7. Si al simplificar la expresión $\frac{3 - 2ai}{4 - 3i}$ se obtiene un número real, determine el valor de $N = i^{16a+3} - i^{8a} - 1$.

A) 1 B) $2i - 1$ C) -1 D) $-i - 1$ E) $2i$

Solución:

$$\frac{(3 - 2ai)}{(4 - 3i)} = \frac{(3 - 2ai)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{12 + 6a}{25} + \frac{9 - 8a}{25}i$$

$$\Rightarrow \frac{9 - 8a}{25} = 0 \rightarrow 8a = 9, \quad 16a + 3 = 21$$

$$N = i^{16a+3} - i^{8a} - 1 = i^{21} - i^9 - 1 = -1$$

Rpta.: C

8. Si z_1 y z_2 son las soluciones de la ecuación compleja

$$z^2 + 3 + i = (2 + i)z,$$

$$\text{halle } w = \left[(z_1 + z_2 - 1)^{|z_1 \cdot z_2|^2 - |z_1 + z_2|^2} \right].$$

A) $4 + 4i$ B) $-4 - 4i$ C) $-4 + 4i$ D) $1 - i$ E) $1 + i$

Solución:

De la ecuación

$$z^2 - (2+i)z + 3+i = 0$$

Como z_1 y z_2 son las soluciones de la ecuación

$$\text{I. } z_1 + z_2 = 2 + i \rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 5$$

$$\text{II. } z_1 \cdot z_2 = 3 + i \rightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = 10$$

$$\begin{aligned} \text{III. } w &= \left[(z_1 + z_2 - 1)^{|z_1 \cdot z_2|^2 - |z_1 + z_2|^2} \right] = (1+i)^{10-5} = (1+i)^5 \\ &= (1+i)(1+i)^4 = -4 - 4i \end{aligned}$$

Rpta.: B**EVALUACIÓN DE CLASE N° 4**

1. En un pueblito de Ayacucho vive Pedro junto a su esposa e hijos, sabiendo que el número de hijos coincide con una solución de la ecuación $|5-2x| = 3x-12$, indique cuántos integrantes hay en esta familia.

A) 7 B) 4 C) 6 D) 5 E) 9

Solución:

De la ecuación

$$3x - 12 \geq 0 \wedge [5 - 2x = 3x - 12 \vee 5 - 2x = -3x + 12]$$

$$x \geq 4 \wedge \left[x = \frac{17}{5} \vee x = 7 \right]$$

→ El número de hijos es: 7

∴ Hay 9 integrantes

Rpta.: E

2. Halle la suma de las 2 menores soluciones de la ecuación $35x^2 + 28x + 14 - 5|6x^2 + x - 2| = 0$

A) $-\frac{9}{5}$ B) $-\frac{124}{65}$ C) $-\frac{23}{5}$ D) $-\frac{33}{65}$ E) $-\frac{43}{13}$

Solución:

De la ecuación

$$35x^2 + 28x + 14 = |30x^2 + 5x - 10|$$

$$35x^2 + 28x + 14 = 30x^2 + 5x - 10 \vee 35x^2 + 28x + 14 = -30x^2 - 5x + 10$$

$$5x^2 + 23x + 24 = 0 \vee 65x^2 + 33x + 4 = 0$$

$$x = -\frac{8}{5} \vee x = -3 \vee x = -\frac{4}{13} \vee x = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore \Sigma \text{ dos menores soluciones } : \left(-\frac{8}{5}\right) + (-3) = -\frac{23}{5}$$

Rpta.: C

3. En una reunión de coordinación de actividades de una empresa, asistieron m personas, donde m representa el triple del valor absoluto del producto de soluciones de la ecuación $x^2 - 18 - 10x = 3|x - 5| - 25$. Si m representa las $\frac{3}{4}$ partes del número total de personas que conforman la coordinación, determine el número de personas que asistieron a una reunión hace 2 semanas, sabiendo que nadie faltó.

- A) 30 B) 33 C) 40 D) 55 E) 44

Solución:

De la ecuación

$$x^2 - 10x + 25 - 3|x - 5| - 18 = 0 \rightarrow |x - 5|^2 - 3|x - 5| - 18 = 0$$

$$[|x - 5| - 6] \cdot [|x - 5| + 3] = 0 \rightarrow |x - 5| = 6$$

$$x - 5 = 6 \vee x - 5 = -6 \rightarrow x = 11 \vee x = -1$$

$$\rightarrow m = 3|11(-1)| = 33$$

Luego, si N es el número de personas que conforman la coordinación

$$\rightarrow m = \frac{3}{4}N \Rightarrow N = 44$$

Rpta.: E

4. Dados los conjuntos $M = \{x^2 - 2 \in \mathbb{Z} / x^2 > |3x^2 - 7| - 5\} \cup \{6\}$ y $N = \{x \in \mathbb{R} / |x - 3| \leq 2\}$, halle el número de elementos de $M - N$.

- A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

Solución:

i. En M :

$$\begin{aligned}
 x^2 + 5 > |3x^2 - 7| &\Leftrightarrow |x^2 + 5| > |3x^2 - 7| \\
 (4x^2 - 2)(2x^2 - 12) < 0 &\Leftrightarrow (2x^2 - 1)(x^2 - 6) < 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x^2 < 6 &\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x^2 - 2 < 4 \\
 \rightarrow M = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \cup \{6\}
 \end{aligned}$$

ii. En N :

$$\begin{aligned}
 N &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq 2\} \\
 |x - 3| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2 \\
 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5 \\
 \rightarrow N &= [1, 5] \\
 \rightarrow M - N &= \{-1, 0, 6\}
 \end{aligned}$$

 $\therefore$ El número de elementos de $M - N$ es 3.**Rpta.: D**5. Si $z = 1 + i$ y $w = 2 + 3i$, halle $|z^2 - w^2|$.

- A) 25 B) $\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{5}$ D) 5 E) $5\sqrt{2}$

Solución:[1] Hallemos z^2 y w^2

$$z^2 = 2i \quad ; \quad w^2 = -5 + 12i$$

[2] Ahora tenemos que: $z^2 - w^2 = 2i - (-5 + 12i) = 5 - 10i$ [3] Finalmente $|z^2 - w^2| = \sqrt{5^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{5}$.**Rpta.: C**

6. Un docente san marquino dicta semanalmente en la Facultad de Ciencias Matemáticas $(5m - n + 4)$ horas y en la PRESM $(n - 2m + 5)$ horas; donde m y n son respectivamente los módulos al cuadrado de $z_1 = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}}$ y $z_2 = 5 - \frac{2}{2 - \frac{2}{1+i}}$.

¿Cuántas horas en total dicta semanalmente?

- A) 16 B) 20 C) 12 D) 24 E) 18

Solución:

$$I. \quad z_1 = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{1+i}} = 1 + \frac{1+i}{1} = 2 + \frac{1}{i} = 2 - i \Rightarrow |z_1|^2 = 5 = m$$

$$II. \quad z_2 = 5 - \frac{2}{2 - \frac{2}{1+i}} = 5 - \frac{2}{\frac{2}{1+i}} = 5 - \frac{1+i}{1} = 4 - \frac{1}{i} = 2 = 4 + i \Rightarrow |z_2|^2 = 17 = n$$

III. En la Facultad de Ciencias Matemáticas dicta $(5m - n + 4) = 12$ horas
En la PRESMA $(n - 2m + 5) = 12$ horas

$\therefore$ En total dicta 24 horas semanales

Rpta.: D

7. Si $z = i + 7i^2 + 13i^3 + 19i^4 \dots + 115i^{20}$ y $M^3 = \frac{z(1+i)\left[(1+i)^4 + (1-i)^4\right]}{960i}$, halle un valor de la expresión M.

- A) $-i$ B) $2i$ C) 0 D) 1 E) -1

Solución:

$$I) \quad z = i + 7i^2 + 13i^3 + 19i^4 \dots + 109i^{19} + 115i^{20}$$

$$-iz = -i^2 - 7i^3 - 13i^4 - 19i^5 - \dots - 109i^{20} - 115i^{21}$$

$$\rightarrow (1-i)z = i + 6i^2 + 6i^3 + 6i^4 + \dots + 6i^{20} - 115i^{21}$$

$$\rightarrow (1-i)z = 6(i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{20}) - 114i$$

$$\rightarrow (1-i)z = 6i(i + i^2 + i^3) - 114i \rightarrow z = \frac{-120i}{1-i}$$

$$II) \quad M^3 = \frac{z(1+i)\left[(1+i)^4 + (1-i)^4\right]}{960i} = \frac{-120i(1+i) \cdot [-8]}{(1-i)960i} = i$$

$$\rightarrow M = \sqrt[3]{i} = -\sqrt[3]{i^3} = -i$$

Rpta.: A

8. Las edades de Jorge y Ana están en la relación de $|z|$ es $|w|$, donde $z, w \in \mathbb{C}$ son tales que verifican $|z| = \left| \sqrt{5} + 2 + \overline{(1+i)}^3 \right|$ y $|\bar{w}| = \left| \{|\bar{z}| + 1\} i^{2018} + 3 \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^5 \right|$. Si la suma de sus edades es $(|w|^2 |z| - 3)$ años, halle la diferencia de las edades de Ana y Jorge.

- A) 12 años B) 14 años C) 20 años D) 18 años E) 16 años

Solución:

Calculando:

$$i) \overline{(1+i)}^3 = (1-i)^3 = (1-i)^2(1-i) = (-2i)(1-i) = -2i + 2i^2 = -2 - 2i$$

$$\Rightarrow |z| = |\sqrt{5} + 2 - 2 - 2i| = |\sqrt{5} - 2i| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow |z| = 3$$

$$ii) i^{2018} = i^{(4^0+2)} = -1 \text{ y } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5 = (-i)^5 = i^5 = i^{4^0+1} = i$$

$$\Rightarrow |\bar{w}| = |-4 + 3i| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow |w| = 5$$

Luego, si la edad de Jorge es a la edad de Ana como 3 es a 5.

Sean $3k$ años y $5k$ años las edades de Jorge y Ana respectivamente. Entonces por dato se cumple; $3k + 5k = (|w|^2 |z| - 3) = 72 \Rightarrow k = 9$

$\therefore$ La diferencia de edades de Ana y Jorge es de $2k$ años = 18 años.

Rpta.: D

Rpta.: D

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si m es la suma de las soluciones de la ecuación $|3 - 2x| = 2 - x$, halle el valor de

$$N = \left| a^2 + 6m \right| - |a| \sqrt{a^2 - |1 - 3m|} - 2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- A) 5 B) 9 C) 7 D) 11 E) -1

Solución:

De la ecuación $|3 - 2x| = 2 - x$ se tiene

$$2 - x \geq 0 \wedge [3 - 2x = 2 - x \vee 3 - 2x = -2 + x]$$

$$x \leq 2 \wedge \left[x = 1 \vee x = \frac{5}{3} \right] \Rightarrow 1 \text{ y } \frac{5}{3} \text{ son soluciones de la ecuación}$$

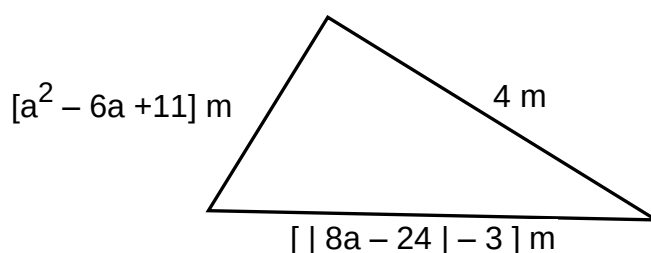
$$\Rightarrow m = \frac{8}{3}$$

Luego

$$\begin{aligned} N &= \left| a^2 + 6m \right| - |a| \sqrt{a^2 - |1 - 3m|} - 2 = \left| a^2 + 6m - |a|^2 - |1 - 3m| \right| - 2 \\ &= \left| 6m - |1 - 3m| \right| - 2 = \left| 16 - |1 - 8| \right| - 2 = 7 \end{aligned}$$

Rpta.: C

2. El perímetro del triángulo mostrado en la figura



mide 12 m, determine el menor valor de a .

- A) 4 B) 0 C) 1 D) 2 E) -4

Solución:

Se tiene que

$$\begin{aligned} [a^2 - 6a + 11] + [|8a - 24| - 3] + 4 &= 12 \Rightarrow |a - 3|^2 + 8|a - 3| - 9 = 0 \\ \Rightarrow [|a - 3| - 1][|a - 3| + 9] &= 0 \Rightarrow |a - 3| = 1 \Rightarrow a = 4 \vee a = 2 \end{aligned}$$

Rpta.: D

3. Determine el número de soluciones enteras de la inecuación

$$|2x - 10 + |-x + |x - |x + 1||| \leq x - 1$$

- A) 2 B) 4 C) 5 D) 0 E) 3

Solución:

De la inecuación se tiene que $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$$\bullet x + 1 \geq 2$$

$$\bullet -x + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow |2x - 10 + x - 1| \leq x - 1 \Rightarrow |3x - 11| \leq x - 1$$

$$\Rightarrow 1 - x \leq 3x - 11 \wedge 3x - 11 \leq x - 1 \Rightarrow 3 \leq x \wedge x \leq 5 \Rightarrow 3 \leq x \leq 5$$

$\therefore$ El número de soluciones enteras de la inecuación es: 3

Rpta.: E

4. El auditorio Rosa Alarco Larrabure ubicado en la Biblioteca Central de la UNMSM, tiene una capacidad máxima de $(-15m + 9n - 20)$ personas sentadas en butacas muy cómodas; si un día de este año se realizó una conferencia y los asistentes ocuparon $(m + 12n + 2)$ butacas, ¿cuántas butacas libres en total quedaron ese día de la conferencia?, sabiendo que m es la suma de los elementos enteros negativos y n es la suma de los cuadrados de los elementos enteros positivos del conjunto solución de la inecuación $|x^2 - 9| \leq |x^2 - 23|$.

- A) 40 B) 24 C) 35 D) 52 E) 48

Solución:

$$|x^2 - 9| \leq |x^2 - 23| \Rightarrow [2x^2 - 32] [14] \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow CS = [-4, 4]$$

$$\Rightarrow m = -4 - 3 - 2 - 1 = -10$$

$$\Rightarrow n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\text{Capacidad: } -15m + 9n - 20 = 400$$

$$\text{Asistieron: } m + 12n + 2 = 352$$

$$\text{Diferencia: } 48$$

$\therefore$ Quedaron 48 butacas libres

Rpta.: E

5. Dado los conjuntos $M = \{2x - 3 \in \mathbb{R} / |x - 8| \geq 5\}$ y $N = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{|-3x + 9|} > \frac{1}{9}\right\}$, determine $M \cap N$.

A) $[0, 3]$ B) $\langle 0, 6 \rangle - \{3\}$ C) $\langle 1, 3 \rangle$ D) $\langle 0, 3 \rangle$ E) $\langle 3, 6 \rangle$

Solución:

$$\bullet M = \{2x - 3 \in \mathbb{R} / |x - 8| \geq 5\}$$

$$x - 8 \geq 5 \vee x - 8 \leq -5 \Rightarrow x \geq 13 \vee x \leq 3$$

$$\Rightarrow 2x - 3 \geq 23 \vee 2x - 3 \leq 3$$

$$\Rightarrow M = \langle -\infty, 3] \cup [23, +\infty)$$

$$\bullet N = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{|-3x + 9|} > \frac{1}{9}\right\}$$

$$\Rightarrow 0 < |-3x + 9| < 9, x \neq 3 \Rightarrow -9 < -3x + 9 < 9 \Rightarrow -18 < -3x < 0 \Rightarrow 0 < x < 6, x \neq 3$$

$$N = \langle 0, 6 \rangle - \{3\}$$

$$M \cap N = \langle 0, 3 \rangle$$

Rpta.: D

6. El número de integrantes de una familia está representado por el valor de $N = 2|4 + z| - 3\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$, donde z es un complejo no real tal que $3iz - z^2 = 3i\bar{z} - |z|^2$.

A) 7 B) 9 C) 10 D) 5 E) 13

Solución:

$$3iz - z^2 = 3i\bar{z} - |z|^2 \Rightarrow 3i(z - \bar{z}) - z(z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow (3i - z)(z - \bar{z}) = 0$$

$$\Rightarrow z = \bar{z} \vee z = 3i, \text{ como } z \text{ es un complejo no real} \Rightarrow z = 3i$$

$$\Rightarrow N = 2|4 + z| - 3\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 2|4 + 3i| - 3(0) + 3 = 13$$

Rpta.: E

7. En agosto del 2018, el congreso de la República del Perú conformado por 130 congresistas de los cuales el número de congresistas sancionados en los 2 primeros años de gestión coincide con el módulo del complejo Z , sabiendo que $z = \bar{w} - 3i + 2$ y $w = \sqrt{48} + i^{38}(2-i)$; ¿cuántos congresistas no fueron sancionados durante los 2 primeros años de la actual gestión?
- A) 122 B) 128 C) 124 D) 96 E) 112

Solución:

$$w = \sqrt{48} + i^{38}(2-i) = \sqrt{48} - (2-i) = \sqrt{48} - 2 + i \Rightarrow \bar{w} = \sqrt{48} - 2 - i$$

$$z = \bar{w} - 3i + 2 = \sqrt{48} - 2 - i - 3i + 2 = \sqrt{48} - 4i$$

$$|z| = \sqrt{\sqrt{48}^2 + (-4)^2} = 8$$

$\Rightarrow$ 8 congresistas fueron sancionados

$\therefore$ 122 congresistas no fueron sancionados

Rpta.: A

8. Halle el módulo de Z , si $z = \frac{2i^{666} + \sqrt{21}i^5}{(-3+4i)^3}$.

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{25}$ C) 1 D) 5 E) $\frac{1}{125}$

Solución:

$$z = \frac{2i^{666} + \sqrt{21}i^5}{(-3+4i)^3} = \frac{-2 + \sqrt{21}i}{(-3+4i)^3}$$

$$\Rightarrow |z| = \frac{|-2 + \sqrt{21}i|}{|(-3+4i)^3|} = \frac{|-2 + \sqrt{21}i|}{|-3+4i|^3} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + \sqrt{21}^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}^3} = \frac{1}{25}$$

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Durante una clase de álgebra el profesor Walter encargó a uno de sus estudiantes que halle el producto de los valores de un número real, tal que cumple lo siguiente: La diferencia positiva de dicho número con el recíproco, de su valor disminuido en cinco es igual a tres si el estudiante respondió correctamente, ¿cuál fue su respuesta?

A) 224 B) 164 C) -184 D) 124 E) -224

Solución: Sea x el número real

$$\left| x - \frac{1}{x-5} \right| = 3 \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 5x - 1}{x-5} \right| = 3 \Rightarrow \frac{x^2 - 5x - 1}{x-5} = 3 \vee \frac{x^2 - 5x - 1}{x-5} = -3$$

$$\underbrace{x^2 - 8x + 14 = 0}_{\substack{\Delta > 0 \\ \text{sol reales}}} \quad \vee \quad \underbrace{x^2 - 2x - 16 = 0}_{\substack{\Delta > 0 \\ \text{sol reales}}}$$

Producto soluciones = 14 Producto soluciones = -16

∴ El estudiante respondió: $(14)(-16) = -224$

Rpta.: E

2. Las soluciones de la ecuación $x^2 + 34 = 2|x - 7| + 14x$ representa el precio de venta y el precio de costo en soles de un llavero. Determine la ganancia obtenida por la venta de 30 docenas de llaveros.

A) 2880 soles B) 3600 soles C) 2160 soles D) 720 soles E) 1080 soles

Solución:

$$x^2 + 34 = 2|x - 7| + 14x \Rightarrow (x^2 - 14x + 49) - 2|x - 7| - 15 = 0$$

$$\Rightarrow |x - 7|^2 - 2|x - 7| - 15 = 0 \Rightarrow [|x - 7| - 5][|x - 7| + 3] = 0$$

$$\Rightarrow |x - 7| = 5 \Rightarrow x - 7 = 5 \vee x - 7 = -5 \Rightarrow \underbrace{x = 12}_{\text{precio de venta}} \vee \underbrace{x = 2}_{\text{precio de costo}}$$

⇒ Ganancia de cada llavero es de 10 soles

∴ Ganancia de 30 docenas de llaveros es : $30 \times 12 \times 10 = 3600$ soles

Rpta.: B

3. Un juego consiste en lanzar un dado $8 + |x - 1|$ veces. Si la diferencia entre el máximo y mínimo puntaje que se puede obtener es mayor que $|x^2 - 2x + 35|$, halle el máximo valor de x .

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 3

Solución:

$$\begin{aligned}
6[8 + |x-1|] - [8 + |x-1|] &> |x^2 - 2x + 35| \Rightarrow 5[8 + |x-1|] > x^2 - 2x + 1 + 34 \\
\Rightarrow |x-1|^2 - 5|x-1| - 6 &< 0 \Rightarrow (|x-1| - 6)(|x-1| + 1) < 0 \Rightarrow |x-1| < 6 \\
\Rightarrow -6 < x-1 < 6 &\Rightarrow -5 < x < 7 \Rightarrow x_{\max} = 6
\end{aligned}$$

Rpta.:C

4. Si los ingresos mensuales, en millones de soles, de una empresa importadora es dado por $I(x) = |x^2 - 3x - 4|$, donde x denota el número de lotes vendidos, ¿cuál sería el mayor número de lotes vendidos si los ingresos no exceden los 6 millones de soles mensuales?

A) 7 B) 2 C) 1 D) 5 E) 3

Solución:

$$\begin{aligned}
I(x) = |x^2 - 3x - 4| &\leq 6 \Rightarrow -6 \leq x^2 - 3x - 4 \leq 6 \\
\Rightarrow -6 \leq x^2 - 3x - 4 \wedge x^2 - 3x - 4 &\leq 6 \Rightarrow 0 \leq (x-2)(x-1) \wedge (x-5)(x+2) \leq 0 \\
x \in \langle -\infty, 1] \cup [2, +\infty) \wedge x &\in [-2, 5]
\end{aligned}$$

Del problema $x \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow x \geq 1$

$$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow x_{\max} = 5$$

Rpta.:D

5. Un estudiante de la pre ingresó a la UNMSM en marzo el año $\overline{200a}$, donde a es el número de elementos enteros negativos del conjunto $M = \{x - 3 \in \mathbb{R} / |x - 5| \geq 15 \wedge x > -12\}$. Si el estudiante inició sus estudios el mismo año en el que ingresó y terminó en 5 años su carrera de Computación, ¿en qué año terminó su carrera?

A) 2007 B) 2006 C) 2005 D) 2008 E) 2004

Solución:

$$\begin{aligned}
M &= \{x - 3 \in \mathbb{R} / |x - 5| \geq 15 \wedge x > -12\} \\
[x - 5 \geq 15 \vee x - 5 &\leq -15] \wedge x > -12 \\
[x \geq 20 \vee x \leq -10] \wedge x &> -12 \Rightarrow -12 < x \leq -10 \vee x \geq 20 \\
\Rightarrow M &= \langle -12, -10] \cup [20, +\infty) \Rightarrow a = 2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ingresó: 2002

$\therefore$ Terminó su carrera: 2006

Rpta.: B

6. Sea z un número complejo no real que satisface $\overline{[z - 2 + 3 - i]} + 5 = [\operatorname{Re}(z)]^2 + i + [\operatorname{Im}(z)]^2 i$, halle un valor de z .

A) $3 + i$ B) $3 - i$ C) $3i$ D) $2 + i$ E) $2 - i$

Solución: Sea $z = a + bi$, donde $b \neq 0$

$$\Rightarrow \overline{a + bi - 2 + 3 - i} + 5 = [a]^2 + i + [b]^2 i$$

$$\Rightarrow \overline{a - 2 - bi + 3 - i} + 5 = a^2 + [b^2 + 1]i \Rightarrow (a + 6) + (b + 1)i = a^2 + [b^2 + 1]i$$

$$\bullet (a + 6) = a^2 \Rightarrow a = 3 \vee a = -2$$

$$\bullet (b + 1) = [b^2 + 1] \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow z = 3 + i \vee z = -2 + i$$

Rpta.: A

7. Dado los complejos z y w tales que $(|z| - \sqrt{82})^2 + (|w|^2 - 10)^2 = 0$ y $\operatorname{Re}(zw) = -6 \left| \frac{w}{\sqrt{10}} \right|$, determine la suma de cifras del valor de $N = |w - \bar{z}|^2$.

A) 7 B) 13 C) 10 D) 5 E) 11

Solución:

$$(|z| - \sqrt{82})^2 + (|w|^2 - 10)^2 = 0, \quad |z|, |w| \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{82} \wedge |w| = \sqrt{10}$$

$$\bullet N = |w - \bar{z}|^2 = (w - \bar{z})(\overline{w - \bar{z}}) = (w - \bar{z})(\bar{w} - z) = w\bar{w} - \underbrace{zw - \bar{z}w}_{-(zw + \bar{z}w)} + z\bar{z}$$

$$= |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(zw) = 82 + 10 - 2(-6) \underbrace{\left| \frac{w}{\sqrt{10}} \right|}_1 = 104$$

$$\therefore \sum \text{cifras de } N = 1 + 0 + 4 = 5$$

Rpta.: D

8. Halle el módulo de z , si $z = \frac{1}{(i+1)^{2018}} \left(\left[\frac{2(3i+7)}{7i-3} \right]^6 + 2^{5i^{20}} \right)$.

A) $(2)^{-19}$

B) $(2)^{-9}$

C) 2

D) $(2)^{-29}$

E) $(2)^9$

Solución:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{(i+1)^{2018}} \left(\left[\frac{2(3i+7)}{7i-3} \right]^6 + 2^{5i^{20}} \right)^{200} = \frac{1}{(2i)^{1009}} \left(\left[\frac{2i(3-7i)}{-(3-7i)} \right]^6 + 2^5 \right)^{200} \\ &= \frac{1}{(2)^{1009} i} \left(2^6 i^6 + 32 \right)^{200} = \frac{1}{(2)^{1009} i} (-32)^{200} = \frac{1}{(2)^{1009} i} (2)^{1000} = \frac{(2)^{-9}}{i} \\ \Rightarrow z &= \left| \frac{(2)^{-9}}{i} \right| = (2)^{-9} \end{aligned}$$

Rpta.:B

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

05

semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

POLINOMIOS

DEFINICIÓN

Llamaremos polinomio de grado n en la variable x a la expresión algebraica de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde $n \in \mathbb{Z}_0^+$ y $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números en un conjunto numérico K , llamados coeficientes del polinomio. El coeficiente $a_n \neq 0$ es llamado coeficiente principal mientras que al coeficiente a_0 se le llama término independiente.

Con respecto al conjunto K , este puede ser el conjunto de los $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

EJEMPLOS

Polinomio	Grado(gr)	Coeficiente Principal	Término Independiente
$p(x) = x^2 + 2x - 5x^5 + 3$	5	-5	3
$q(x) = 5x - \sqrt{2} + x^6 + 4x^7$	7	4	$-\sqrt{2}$

TEOREMA: Dado un polinomio $p(x)$ se cumple:

- 1) La suma de coeficientes de $p(x)$ es igual a $p(1)$
- 2) El término independiente de $p(x)$ es igual a $p(0)$

POLINOMIO MÓNICO

Un polinomio $p(x)$ se dice mónico si su coeficiente principal es uno.

EJEMPLO

$q(x) = 5x - \sqrt{2} + x^6 + 4x^5$ es un polinomio mónico.

POLINOMIO ORDENADO

Diremos que un polinomio es ordenado en forma creciente (o decreciente) respecto a una de sus variables, cuando los exponentes de la variable mencionada solo aumentan (o disminuyen).

EJEMPLOS

- 1) En $p(x) = 2x^8 - 5x^5 + 3x^3 + 2x - 4$, los exponentes de la variable x son 8, 5, 3, 1, 0; en ese orden entonces $p(x)$ está ordenado en forma decreciente.
- 2) En $q(x) = 3x^2 + \sqrt{3}x^{19} + 5x^{25}$, los exponentes de la variable x son 2, 19, 25; en ese orden entonces $q(x)$ está ordenado en forma creciente.
- 3) En $p(x,y) = x^2 - 2x^5y + 7x^8y + 9x^{10}y^4 + x^{14}y^3$ solo los exponentes de la variable x están aumentando entonces $p(x,y)$ está ordenado en forma creciente respecto a la variable x .

GRADO RELATIVO DE UN POLINOMIO RESPECTO A UNA VARIABLE (G R)

Es el mayor exponente de la variable en referencia que aparece en el polinomio.

EJEMPLO

$$p(x,y) = 5x^3y^6 - 2x^2y^4 + 3x^3y^5 \rightarrow GR_x[p(x,y)] = 3 \wedge GR_y[p(x,y)] = 6$$

GRADO ABSOLUTO (G A)

- A) Para un monomio: El grado absoluto de un monomio se obtiene sumando los exponentes de las variables que aparecen.

EJEMPLO

$$m(x,y,z) = -2x^4y^5z^9 \rightarrow G.A. [m(x,y,z)] = 18$$

- B) Para un polinomio: El grado absoluto de un polinomio es el mayor de los grados absolutos de los monomios que lo conforman.

EJEMPLO

$$p(x,y) = 5x^3y^6 - 2x^2y^4 + 3x^3y^5 \rightarrow GA [p(x,y)] = 3 + 6 = 9$$

POLINOMIO COMPLETO

Diremos que un polinomio de varias variables es completo respecto a una de sus variables si en cada término del polinomio está la variable elevada a un exponente diferente en otro término que lo contiene, desde cero hasta el grado relativo del polinomio respecto de esa variable.

POLINOMIOS IDÉNTICOS

Dos polinomios en una variable y del mismo grado de las formas

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad y$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$$

son idénticos si y solo si:

$$a_n = b_n, \dots, a_2 = b_2, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

OBSERVACIÓN:

También decimos que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son idénticos si $p(\alpha) = q(\alpha); \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

POLINOMIO IDÉNTICAMENTE NULO

Un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ es idénticamente nulo si $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$.

EJEMPLO

Dado el polinomio idénticamente nulo $p(x) = bx^2 + 8 + ax + (b-4)x^2 + 2c - 4bx$, calcule el valor de $(a + b - c)$.

SOLUCIÓN:

$$p(x) = bx^2 + 8 + ax + (b-4)x^2 + 2c - 4bx$$

$$p(x) = \underbrace{(2b-4)}_{=0} x^2 + \underbrace{(a-4b)}_{=0} x + \underbrace{(2c+8)}_{=0}$$

$$b = 2; a = 8; c = -4$$

$$\therefore a + b - c = 14$$

OBSERVACIÓN

El polinomio $p(x)$ es también idénticamente nulo si y solo si $p(\alpha) = 0; \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

EJEMPLOS

- 1) En $p(x) = 3x^2 - 5x + 7 + 4x^3$ vemos que tiene los términos x^0, x^1, x^2, x^3 entonces $p(x)$ es un polinomio completo de grado 3.
- 2) El polinomio $r(x, y) = 4x^2 - 2xy + 4y^2$ tiene los términos $x^0; x^1; x^2$ e $y^0; y^1; y^2$, entonces $r(x, y)$ es completo respecto a las variables x e y .

POLINOMIO HOMOGÉNEO

Un polinomio es homogéneo si cada término del polinomio tiene el mismo grado absoluto. Al grado absoluto común se le denomina grado de homogeneidad o simplemente grado del polinomio.

EJEMPLO

$$p(x, y) = 3x^5y^4 + 3x^3y^6 - 2x^7y^2 + y^9$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
GA = 9 GA = 9 GA = 9 GA = 9

el polinomio es homogéneo y su grado de homogeneidad es 9.

Álgebra

EJERCICIOS

1. Sean los polinomios $p(x) = 3x^3 + 2x^4 + 3x + 5n$ y $q(x) = nx^2 + 8x + n$. Si la suma de los coeficientes de $p(x)$ es 88, halle la suma de los coeficientes de $h(x) = p(x) + q(x)$.

A) 120

B) 124

C) 126

D) 128

Solución:

- 1) La suma de coeficiente de $p(x)$ es 88

$$p(1) = 3(1)^3 + 2(1)^4 + 3(1) + 5n = 88$$

$$8 + 5n = 88$$

$$5n = 80$$

$$n = 16$$

- 2) $q(x) = nx^2 + 8x + n = 16x^2 + 8x + 16$

- 3) La suma de coeficientes de $h(x) = p(x) + q(x)$ es $h(1) = p(1) + q(1) = 88 + 40 = 128$

Rpta.: D

2. Jorge ahorra mensualmente una cantidad de dinero en dólares, la cual se determina a partir de un polinomio cuadrático $p(t)$; cuando t asume el valor correspondiente al número del mes en que ahorra. En la siguiente tabla se detalla la cantidad ahorrada por Jorge cada uno de los primeros tres meses:

	Monto ahorrado en \$
Primer mes	800
Segundo mes	1000
Tercer mes	1400

Determine cuánto ahorrará Jorge el quinto mes.

A) \$ 2400

B) \$ 2800

C) \$ 3000

D) \$ 3400

Solución:

- 1) Consideremos el polinomio cuadrático $p(t) = at^2 + bt + c$

De los datos se tiene $p(1) = 800 = a + b + c$

$$p(2) = 1000 = 4a + 2b + c$$

$$p(3) = 1400 = 9a + 3b + c$$

tiene: $a = 100$, $b = -100$, $c = 800$

$$p(t) = 100t^2 - 100t + 800$$

- 2) El quinto mes $p(5) = 100(5)^2 - 100(5) + 800 = 2800$

Rpta.: B

3. Si el polinomio $t(x) = x^{n+6} - 3x^{n-3} + 4x^2 + 3$ es de grado 32, halle el valor numérico de $t\left(\frac{n}{2} - 12\right)$.

A) 2

B) 3

C) 5

D) 6

Solución:

- 1) Como $t(x)$ es de grado 32, $n + 6 = 32 \rightarrow n = 26$

$$2) \quad t(x) = x^{32} - 3x^{23} + 4x^2 + 3 \rightarrow t\left(\frac{n}{2} - 12\right) = t(13 - 12) = t(1) = 5$$

Rpta.: C

4. Gabriela compra durante los meses de enero y febrero una determinada cantidad de kilogramos de arroz y azúcar, la información se muestra en la siguiente tabla:

Producto	Enero	Febrero
Azúcar	$(a+1)y^{\frac{n}{6}}$ kg	$(3+y^{5-n})$ kg
Arroz	$(2x^n)$ kg	(xy) kg

El precio de un kilogramo de azúcar y un kilogramo de arroz son $(a-1)$ y $(2a-4)$ soles respectivamente y polinomio $p(x, y)$ representa el gasto total de Gabriela en los dos meses por la compra de azúcar y arroz. Determine el valor de "a", si el término independiente de $p(x, y)$ es 32.

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

Solución:

$$1) \quad p(x, y) = \left[(a+1)y^{\frac{n}{6}} + 3 + y^{5-n} \right] (a-1) + \left[2x^n + xy \right] (2a-4)$$

- 2) El valor de n, para que $p(x, y)$ sea polinomio es $n = 0$

$$p(x, y) = \left[y^5 + a + 4 \right] (a-1) + \left[2 + xy \right] (2a-4)$$

- 3) Término independiente de: $p(x, y) = \left[y^5 + a + 4 \right] (a-1) + \left[2 + xy \right] (2a-4)$

$$\left[a + 4 \right] (a-1) + \left[2 \right] (2a-4) = 32$$

- 4) $\left[a + 4 \right] (a-1) + \left[2 \right] (2a-4) = 32$

$$(a+4)(a-1) + 2(2a-4) = 32$$

$$\Rightarrow a^2 + 3a - 4 + 4a - 8 = 32$$

$$\Rightarrow a^2 + 7a - 44 = 0$$

$$\Rightarrow (a+11)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4$$

Rpta.: C

5. Carlos lleva tarea a su casa para analizar el siguiente polinomio: $p(x) = (3x-2)^3 (x^2-3)^2 (x^3+1)^4 + (x^2+2)^4$. Del resultado de su tarea, Carlos afirma las siguientes proposiciones:

- I) La suma de los coeficientes de $p(x)$ es 146
 II) El término independiente de $p(x)$ es -56
 III) El grado de $p(x)$ es 27

Determine cuales son verdaderas.

- A) I y II B) las 3 C) II D) III

Solución:

- 1) Como $p(x) = (3x - 2)^3 (x^2 - 3)^2 (x^3 + 1)^4 + (x^2 + 2)^4$
- I) La suma de los coeficientes de $p(x)$ es $p(1) = 145$
 II) El término independiente de $p(x)$ es $p(0) = -56$
 III) El grado de $p(x)$ es $3 + 2 \times 2 + 3 \times 4 = 19$
- 2) Solo es verdad (II)

Rpta.: C

6. La Oficina de Bienestar Universitario de la UNMSM organizó un campeonato de fútbol entre los estudiantes de la Escuela de Estudios generales. Los equipos de fútbol de las áreas de ingeniería y de ciencias de la salud se enfrentaron y anotaron $g(a - b)$ y $g(3a + b)$ goles respectivamente. Si $g(x) = x + 1$ y $g(g(g(x)))$ es idéntico a $t(x) = ax - b$, respecto al resultado del partido se puede afirmar que:
- A) En el marcador hubo 4 goles de diferencia
 B) Ganó el área de ciencias de la salud
 C) El área de ingeniería ganó 3 a 1
 D) Las dos áreas empataron

Solución:

- 1) $g(x) = x + 1 \rightarrow g(g(x)) = x + 2 \rightarrow g(g(g(x))) = x + 3$
 $a = 1; b = -3$
- 2) $g(a - b) = g(4) = 5$
 $g(3a + b) = g(0) = 1$
- 3) Ganó el equipo del área de ingeniería 5 a 1

Rpta.: A

7. Jorge tiene como objetivo ahorrar $(2a - b + 4)$ cientos de soles con el fin de comprar un obsequio a sus abuelos, por aniversario de bodas el 02 de junio. Se proyecta ahorrar mensualmente un monto, en soles, numéricamente igual a 20 veces el grado absoluto de $p(x, y)$ (el ahorro es efectivo al final de cada mes). Determine el mes que debe empezar a ahorrar, Jorge, para comprar el obsequio, sabiendo que

$$p(x, y) = ax^{\frac{a-7}{2}} y^{b-8} + (b-3)x^{\frac{9-a}{3}} y^{\frac{b-4}{6}} + (a+b-17)x^a y^{\frac{12-b}{2}}$$

es un polinomio.

- A) Enero B) Marzo C) Octubre D) Diciembre

Solución:

- 1) $p(x,y) = ax^{\frac{a-7}{2}}y^{b-8} + (b-3)x^{\frac{9-a}{3}}y^{\frac{b-4}{6}} + (a+b-17)x^a y^{\frac{12-b}{2}}$
- $$\frac{a-7}{2} \geq 0, b-8 \geq 0, \frac{9-a}{3} \geq 0, \frac{b-4}{6} \geq 0, a \geq 0, \frac{12-b}{2} \geq 0 \text{ todos enteros}$$
- $$7 \leq a \leq 9 \rightarrow a = 9$$
- $$8 \leq b \leq 12 \rightarrow b = 10$$
- $$\therefore p(x,y) = 9xy^2 + 7y + 2x^9y$$
- 2) Entonces $20GA[p(x,y)] = 20(9+1) = 200$
 Ahorra 200 soles al mes
 $(2a-b+4)=12$, quiere ahorrar 1200 soles
- 3) Le tomará 6 meses en ahorrar para el 02 de junio, desde diciembre.

Rpta.: D

8. La edad actual de Carlos es el doble de la edad de José. Hace $(n-1)$ años, la suma de esas edades era igual al promedio de sus edades actuales, disminuido en 0,5. Se sabe que n es el número de términos del polinomio $p(x) = x^{3a-b} + 5x^{2a} + 3x^{3b+c} + 2x^{b+a+c} + \dots$ completo y ordenado en forma decreciente. Halle ambas edades.

- A) 60 años y 30 años
 B) 18 años y 9 años
 C) 20 años y 10 años
 D) 40 años y 20 años

Solución:

- 1) Consideremos la edad actual de José: x años, Carlos tiene $2x$ años
 Hace $(n-1)$ años la suma de sus edades era $3x - 2n + 2$ años
 El promedio de sus edades actuales es $\frac{3x}{2}$ años
- 2) Se tiene $3x - 2n + 2 = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}$
- $$3x - 2n + 2 = \frac{3x-1}{2}$$
- $$6x - 4n + 4 = 3x - 1$$
- $$3x = 4n - 5$$
- $$x = \frac{4n-5}{3}$$
- 3) Como el polinomio es completo y ordenado en forma decreciente:

$$3a - b - 1 = 2a \rightarrow a = b + 1 \dots (1)$$

$$2a - 1 = 3b + c \rightarrow c = 2a - 1 - 3b \dots (2)$$

$$3b + c - 1 = b + a + c \rightarrow a = 2b - 1 \dots (3)$$

De (1) y (3) se tiene $b = 2$, en (1) $a = 3$ y en (2) $c = -1$

4) $p(x) = x^7 + 5x^6 + 3x^5 + 2x^4 + \dots$ tiene 8 términos, $n = 8$

5) Como $x = \frac{4n-5}{3} = 9$, las edades son 18 y 9 años

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si la suma de los coeficientes del polinomio mónico

$h(x) = 5x^n + nx^{8-n} + x^{n-4} + (n-2)x^{\frac{n}{3}} + bx^8$, representa la edad (en años) de Carlos y n (en años) la edad de su hermano Luis, halle la suma de las edades de ambos hermanos.

A) 15 años

B) 17 años

C) 21 años

D) 23 años

Solución:

1) Como $h(x)$ es un polinomio $4 \leq n \leq 8$, $n = \frac{0}{3} \rightarrow n = 6$

2) $h(x) = 5x^6 + 6x^2 + x^2 + 4x^2 + bx^8$, como es mónico $b = 1$

$$h(x) = 5x^6 + 11x^2 + x^8,$$

3) La suma de los coeficientes de $h(x)$ es $h(1)$

$$h(1) = 5(1)^6 + 11(1)^2 + (1)^8 = 17$$

4) Carlos tiene 17 años y su hermano Luis tiene 6 años

La suma de sus edades es 23 años.

Rpta.: D

2. Se sabe que h , k y m son constantes que hacen que los polinomios $q(x) = (x-1)(x+1)$ y $r(x) = h(2x^2 - 7x + 3) + k(3x^2 - 10x + 3) + m(6x^2 - 5x + 1)$ sean idénticos. Si $p(x^2 - x - 1) = x^2 - x + 5$, halle $p(h+k+2m)$.

A) 3

B) 6

C) 7

D) 8

Solución:

1) Como $r(x)$ y $q(x)$ son idénticos, entonces $q(3) = r(3)$

$$q(3) = (3-1)(3+1) = 8$$

$$r(x) = h(2x-1)(x-3) + k(3x-1)(x-3) + m(3x-1)(2x-1)$$

$$r(3) = h(2(3)-1)(3-3) + k(3(3)-1)(3-3) + m(3(3)-1)(2(3)-1) = 40m$$

$$m = \frac{1}{5}$$

2) También $q\left(\frac{1}{2}\right) = r\left(\frac{1}{2}\right)$

$$q\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) = -\frac{3}{4}$$

$$r\left(\frac{1}{2}\right) = h\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)-3\right) + k\left(3\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)-3\right) + m\left(3\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right) = -\frac{5}{4}k$$

$$k = \frac{3}{5}$$

3) También $q\left(\frac{1}{3}\right) = r\left(\frac{1}{3}\right)$

$$q\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right) = -\frac{8}{9}$$

$$r\left(\frac{1}{3}\right) = h\left(2\left(\frac{1}{3}\right)-1\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)-3\right) + k\left(3\left(\frac{1}{3}\right)-1\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)-3\right) + m\left(3\left(\frac{1}{3}\right)-1\right)\left(2\left(\frac{1}{3}\right)-1\right) = \frac{8}{9}h$$

$$h = -1$$

4) $p(h+k+2m) = p\left(-1+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right) = p(0)$

5) $p(x^2-x-1) = x^2-x+5 \rightarrow p(0) = 6$

Rpta.: B

3. Paco tenía para la venta en total $(2n)$ docenas de conejos entre negros y blancos. Considerando el polinomio $p(x-3) = (2x-1)^n + (x-1)^n + (x-2)^n$, se sabe que la cantidad de conejos negros que vendió el primer día coincide con la suma de coeficientes de $p(x)$ y los conejos blancos que vendió el segundo día fue igual al término independiente de $p(x)$. Cada día solo se vendieron conejos de un solo color y el primer día se vendieron cuatro conejos más que el segundo día. ¿Cuántos conejos le quedan por vender después del segundo día?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 8

Solución:

- 1) Número de conejos negros que vendió el primer día: $p(1) = (7)^n + (3)^n + (2)^n$
- 2) Número de conejos blancos que vendió el segundo día:

$$p(0) = (5)^n + (2)^n + 1$$

$$3) \quad (7)^n + (3)^n + (2)^n - ((5)^n + (2)^n + 1) = 4$$

$$(7)^n + (3)^n - (5)^n - 1 = 4$$

$$(7)^n + (3)^n - (5)^n - 5 = 0$$

$$n = 1$$

- 4) Paco tenía para la venta en total $(2n) = 2$ docenas de conejos es decir 24 conejos.
- 5) El primer día vende 12 conejos, y el segundo día 8 conejos, le quedan por vender 4 conejos.

Rpta.: C

4. Jesús ha organizado una fiesta de carnaval para un total de 100 personas. Para ello cada persona recibirá un antifaz, un globo metálico y un rollo de serpentina, cuyos precios por unidad son: S/ m, S/ n y S/ p respectivamente. Donde $p(x) = mx(1+x) + n(x+p) + x^2$ y $q(x) = 3x^2 + 8x + 12$ son idénticos. ¿Cuánto pagó en total Jesús, si le hicieron un descuento del 5% por la compra realizada?

- A) 559 soles B) 590 soles C) 950 soles D) 955 soles

Solución:

- 1) Como $p(x)$ y $q(x)$ son idénticos:

$$p(x) = (m+1)x^2 + (m+n)x + np$$

$$q(x) = 3x^2 + 8x + 12$$

$$m = 2 ; n = 6 ; p = 2$$

- 2) Monto a pagar: $100(2 + 6 + 2)$ soles es decir S/ 1 000, como le hicieron un descuento del 5%, pagó 950 soles

Rpta.: C

5. La familia Sánchez tiene 5 hijos: Alicia, Bruno, Camilo, Doris y Elena, cuyas edades son $|a|, |b|, |c|, |d|$ y $|e|$ años, respectivamente. Si los polinomios:

$$p(x) = 3x^5 - 2x^4 - 18x^2 + 3x - 7$$

$$q(x) = a(x-1)^5 + b(x-1)^4 + c(x-1)^3 + d(x-1) + e,$$

son idénticos, ¿qué edad tiene Camilo?

- A) 13 años B) 21 años C) 22 años D) 26 años

Solución:

- 1) Como el coeficiente principal del 1º miembro tiene que ser igual al coeficiente principal del 2º miembro, entonces $a = 3$

- 2) Para $x = 1$ resulta: $e = -21$
 Para $x = 0$ resulta: $a - b + c + d - e = 7$ (1)
 Para $x = 2$ resulta: $a + b + c + d + e = -9$ (2)
 3) Restando (1) de (2): $b = 13$
 Sumando (1) con (2): $c + d = -4$ (3)
 Para $x = -1$ resulta: $4c + d = 62$ (4)
 4) De (3) y (4): $c = 22$; $d = -26$
 5) Entonces Camilo tiene 22 años.

Rpta.: C

6. Luisa, Martha y Esmeralda hicieron un viaje al extranjero juntas. Ellas reunieron para el viaje $(p(x) + 8)$ mil soles, $(q(x) + 4)$ mil soles y 10 mil soles respectivamente y como grupo sólo gastaron 12000 soles en total en dicho viaje; donde $p(2x - 3) = 6x - 7$ y $q(12 + 7x) = 72 + 49x$. Al regreso del viaje todo el dinero que no fue gastado lo donaron a "x" indigentes de manera equitativa. ¿Cuánto dinero le tocó a cada indigente?

- A) S/ 800 B) S/ 1 000 C) S/ 8 000 D) S/ 10 000

Solución:

- 1) Se tiene $p(2x - 3) = 6x - 7$ y $q(12 + 7x) = 72 + 49x$
 2) Haciendo cambio de variable:
 $y_1 = 2x - 3$; $y_2 = 12 + 7x$
 3) Entonces:

$$p(y_1) = 6\left(\frac{y_1 + 3}{2}\right) - 7 = 3y_1 + 2$$

$$q(y_2) = 49\left(\frac{y_2 - 12}{7}\right) + 72 = 7y_2 - 12$$

$$p(x) = 3x + 2 \text{ y } q(x) = 7x - 12$$

 4) Luego, a cada indigente le tocó:

$$\frac{(p(x) + 8) + (q(x) + 4) + 10 - 12}{x} = \frac{3x + 10 + 7x - 8 + 10 - 12}{x} = 10$$

 5) Por lo tanto, a cada indigente le tocó 10 mil soles.

Rpta.: D

7. Juan asiste a su dentista el mes de agosto cada m días, comenzando su primera cita el primero de agosto. Sabiendo que cada consulta cuesta $10n$ soles, m y n son tales que verifican que el polinomio mónico

$$p(x) = (n-2)x^{m-n} + 2x^n - 5x^{m-n-2} + \dots + mx^{n-3}$$

es completo y ordenado, ¿a cuánto asciende el monto total a pagar por Juan el mes de agosto?

- A) 135 soles B) 150 soles C) 200 soles D) 225 soles

Solución:

- 1) Se observa que el polinomio está ordenado en forma decreciente, como es mónico, $n = 3$
Además $m - n - 1 = n \rightarrow m = 7$
- 2) El asiste a consulta los días: 1, 8, 15, 22 y 29
La consulta cuesta $10n = 30$ soles
- 3) El mes de agosto pago en total 150 soles en las consultas de su dentista

Rpta.: B

8. La edad de María y su hermana Inés (en años) son numéricamente iguales a $GR_x[p(x,y)]$ y $GR_y[p(x,y)]$ respectivamente. Si el polinomio $p(x,y) = 2x^{5m-3n}y^4 + 3x^9y^8 - x^{2m}y^{3m+n-12}$ es homogéneo, halle la diferencia de edades de María e Inés.

- A) 5 años B) 6 años C) 7 años D) 8 años

Solución:

- 1) Como el polinomio es homogéneo, $5m - 3n + 4 = 9 + 8 = 2m + 3m + n - 12$
Luego $m = 5$; $n = 4$
- 2) $p(x,y) = 2x^{13}y^4 + 3x^9y^8 - x^{10}y^7$
edad de María = $GR_x[p(x,y)]$ años = 13 años
edad de Inés = $GR_y[p(x,y)]$ años = 8 años
- 3) la diferencia de edades de María e Inés es 5 años

Rpta.:A

Álgebra

EJERCICIOS

1. El polinomio de coeficientes no nulos $p(x) = (k-2)x^{k-1} + \left(\frac{k-1}{2}\right)x + 17x^{3-k}$ genera números primos distintos cuando x es un número entero desde $(k-3)$ hasta $(5k)$. Con estos datos, halle la media aritmética del menor y mayor número primo generado por dicho polinomio.

A) 136

B) 135

C) 137

D) 134

Solución:

- 1) Como $p(x)$ es un polinomio entonces $k-1 \geq 0 \wedge 3-k \geq 0 \rightarrow 1 \leq k \leq 3$
- 2) $p(x)$ tiene coeficientes no nulos, entonces $k-2 \neq 0, k-1 \neq 0 \rightarrow k \neq 1, k \neq 2$
- 3) Luego de (1) y (2) se tiene $k=3 \rightarrow p(x) = x^2 + x + 17; 0 \leq x \leq 15$
- 4) Evaluando en $p(x)$

 $p(0) = 17$ menor número primo $p(15) = 257$ mayor número primo

$$\therefore MA(17, 257) = \frac{17 + 257}{2} = 137.$$

Rpta.: C

2. En el polinomio $p(x) = (x^{n-1} + 8x^{n-2} + nx^{n-3} + n + 1)^n$ se cumple que la suma de sus coeficientes es igual a 3^n veces su término independiente. Halle el valor de n .

A) 13 B) 9 C) 8 D) 7

Solución:

- 1) Como $p(x)$ es un polinomio, entonces

$$n-1 > 0, n-2 > 0, n-3 > 0 \rightarrow n > 3 \wedge n \in \mathbb{Z}^+$$

- 2) Se sabe que

$$p(1) = 3^n \cdot p(0) \rightarrow 3^n \cdot (n+1)^n = (10+2n)^n$$

$$\rightarrow (3n+3)^n = (10+2n)^n$$

$$\rightarrow 3n+3 = 10+2n$$

$$\rightarrow n = 7$$

$\therefore$ El valor de n es 7.

Rpta.: D

3. Ana y Carlos reciben diariamente de propina $(ax^2 - 3bx - cx + d)$ y $(x^2 + x + 5)$ soles, respectivamente, durante un período de x días. Al cabo de ese período el monto recibido por Ana genera un polinomio $p(x)$ considerando x como variable y de manera análoga el monto recibido por Carlos genera un polinomio $q(x)$ y los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son tales que al disminuir $p(x)$ en c coincide con $q(x)$ disminuido en d . ¿A cuánto ascendería la suma de los montos recibidos por Ana y Carlos, aumentado en $p(1)$ soles? Si el período durante el que recibieron la propina fue de $(a-b-c+d)$ días.

A) 102 soles B) 105 soles C) 100 soles D) 109 soles

Solución:

- 1) Del dato:

$$p(x) - c = q(x) - d$$

$$(ax^2 - 3bx - cx + d)x - c = (x^2 + x + 5)x - d$$

$$ax^3 + (-c - 3b)x^2 + dx - c = x^3 + x^2 + 5x - d$$

$$a = 1; b = -2; c = d = 5$$

- 2) Además la propina recibida luego de x días por Ana y por Carlos es la misma y es $p(x) = x^3 + x^2 + 5x$

- 3) Por otro lado $a - b - c + d = 1 - (-2) - (5) + (5) = 3$ y $p(1) = 7$
- 4) suma de los montos totales recibidos por Ana y Carlos al cabo de $x = 3$ días
 $2p(3) = 2(3^3 + 3^2 + 5(3)) = 102$, aumentado en 7 soles da un total de 109 soles

Rpta.: D

4. De n^2 estudiantes que dieron el examen de Cálculo I, aprobaron solamente m^2 estudiantes. Además $p(x)$ es un polinomio con coeficientes reales que verifica $p(1-x) = 2p(x) - mx + 2$. Si n y m son, respectivamente, la suma de los coeficientes y el término independiente de $p(x)$, ¿cuántos estudiantes aprobaron el examen?

- A) 9 B) 6 C) 1 D) 16

Solución:

- 1) Si $x = 1$, entonces $p(1-1) = 2p(1) - m(1) + 2 \rightarrow p(0) = 2p(1) - m + 2$
 $m = 2n - m + 2 \rightarrow m = n + 1$
- 2) Si $x = 0$, entonces $p(1-0) = 2p(0) - m(0) + 2 \rightarrow p(1) = 2p(0) + 2$
 $m - 1 = 2m + 2 \rightarrow m = 2m + 3 \rightarrow m = -3$
- 3) De (1) y (2) tenemos que $m = -3$, entonces solamente aprobaron $m^2 = 9$ estudiantes.

Rpta.: A

5. Un agricultor tiene un terreno de cultivo de forma rectangular. Se sabe que la distancia máxima existente entre dos puntos del mismo (en decámetros), coincide numericamente con el grado relativo de x del polinomio $p(x,y)$, disminuido en 14. Si $p(x,y) = 20 + (n^2 - 17)x^{2n-17}y + (n^2 - 18)x^{2n-16}y^4 + (n^2 - 19)x^{2n-15}y^6 + \dots$ es completo y ordenado respecto a una de sus variables y uno de los lados del terreno mide 40 decámetros, ¿cuántas hectáreas tiene el terreno rectangular de este agricultor? (1 decámetro = 10 metros)

- A) 1200 ha B) 12 ha C) 1,2 ha D) 120 ha

Solución:

- 1) Como $p(x,y) = 20 + (n^2 - 17)x^{2n-17}y + (n^2 - 18)x^{2n-16}y^4 + (n^2 - 19)x^{2n-15}y^6 + \dots$
 Completando el polinomio se tiene que $n = 9$
- 2) Y el polinomio es completo y ordenado

$$p(x,y) = 20y + (n^2 - 17)x^{2n-17}y^2 - (n^2 - 18)x^{2n-16}y^4 + (n^2 - 19)x^{2n-15}y^6 + \dots \\ (n^2 - 80)x^{2n+46}y^K$$

3) Entonces el grado relativo del polinomio con respecto a x es 64

Los lados del terreno son 30 y 40 decámetros

El área es de $30 \times 20 = 1200$ en Dm^2 , es decir, 12 hectáreas

Rpta.: B

6. $p(x)$ es un polinomio de segundo grado tal que bc , ab y ac son respectivamente su término independiente, coeficiente principal y coeficiente del término lineal para valores reales positivos de a , b y c . Si el polinomio $p(x)$ es idéntico a $q(x) = 2[(3x+2)(2x+2)+5x+1]$, ¿qué se puede afirmar del polinomio $r(x) = ax^b + cx^{2(a-c)} - bx^{c-3}$?

- A) Su grado es 4
 B) Está ordenado en forma decreciente
 C) Es idénticamente nulo
 D) Es un monomio que al ser evaluado en -1 se obtiene 9

Solución:

- 1) Del dato se tiene que $p(x) = abx^2 + acx + bc$,
 como $p(x)$ es idéntico a $q(x) = 2[(3x+2)(2x+2)+5x+1]$
 $abx^2 + acx + bc = 2[(3x+2)(2x+2)+5x+1]$
 $abx^2 + acx + bc = 12x^2 + 30x + 10$
 Luego $a = 6$, $b = 2$ y $c = 5$
 2) $r(x) = ax^b + cx^{2(a-c)} - bx^{c-3} = 6x^2 + 5x^2 - 2x^2 = 9x^2$
 $r(-1) = 9(-1)^2 = 9$

Rpta.: D

7. Dado el polinomio homogéneo $p(x,y) = x^3y^{n-5} + x^7y^{b-7} + x^8y^{12-n}$, determine un múltiplo de $\overline{(n-9)(b-6)}$.
 A) 44 B) 66 C) 46 D) 132

Solución:

- 1) De los datos, se trata de un polinomio homogéneo. Luego
 $3+n-5 = b = 8+12-n$

- 2) Entonces $n - 2 = 20 - n \rightarrow 2n = 22 \rightarrow n = 11$
 $n - 2 = b \rightarrow b = 9$
- 3) Luego $p(x, y) = x^3y^6 + x^7y^2 + x^8y$
- 4) $(n - 9)(b - 6) = 23$, en este caso uno de sus múltiplos es 46

Rpta.: C

8. Rebeca llevó a su gato al veterinario, quién le prescribió dos medicamentos. Por cada kilogramo de peso, le prescribió $(2y)$ mg del primer medicamento y (x) miligramos del segundo medicamento. El gato pesó x kilogramos y el tratamiento médico fue por x días. Respecto del polinomio $p(x, y)$ que representa el total (en miligramos) de ambos medicamentos que recibió el gato de Rebeca al cabo de los x días de tratamiento, se puede afirmar:

- A) El grado relativo con respecto a x es 2.
 B) Su grado absoluto es 2.
 C) Es un polinomio homogéneo de grado 3.
 D) La suma de sus coeficientes es 2.

Solución:

- 1) Dosis diaria(en mg) :
 i) Del primer medicamento : $x(2y)$
 ii) Del segundo medicamento: $x(x)$
 En un día recibe en total: $2xy + x^2$ mg
 Por tanto en x días recibe: $p(x, y) = (2xy + x^2)x$
 $\rightarrow p(x, y) = 2x^2y + x^3$
- 2) Luego $p(x, y)$ es un polinomio homogéneo de grado igual a 3.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dado el polinomio idénticamente nulo

$$p(x) = \left(a^{-2a-2a-2a-2n} - n \right) x^n - \left(b^b b^b - 5^{-\frac{5\sqrt{625}}{5}} \right) x^{n-1} - (c - d^d) x^7 - (d - e^e) x^6 - (e - 2f^0);$$

$f \neq 0$. Se cumple que $a + b = 5^{-1} + \frac{1}{\sqrt[8]{4}}$. Marilyn compró c kilogramos de papa para su tienda y por la compra de dicha cantidad le obsequiaron $(n + d + e)$ kilogramos más. Determine con cuántos kilogramos como máximo llega Marilyn a su tienda.

- A) 256 kg B) 258 kg C) 264 kg D) 266 kg

Solución:

1) Como

$$p(x) = \left(a^{-2a-2a-2a-2n} - n \right) x^n - \left(b^{bb} - 5^{-\frac{\sqrt[5]{625}}{5}} \right) x^{n-1} - (c-d^d)x^7 - (d-e^e)x^6 - (e-2f^0)$$

es idénticamente nulo, se tiene

$$i) a^{-2a-2a-2a-2n} - n = 0 \rightarrow a^{-2a-2a-2a-2n} = n \rightarrow a^{-2} = \sqrt[n]{n} \rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$ii) b^{bb} - 5^{-\frac{\sqrt[5]{625}}{5}} = 0 \rightarrow b^{bb} = 5^{-\frac{\sqrt[5]{625}}{5}} \rightarrow b^{bb} = 5^{-\frac{5^5}{5}} = 5^{-5^4} = 5^{-5^{-1}} \rightarrow b = 5^{-1}$$

$$iii) c - d^d = 0 \rightarrow c = 256$$

$$iv) d - e^e = 0 \rightarrow d = 4$$

$$v) e - 2f^0 = 0 \rightarrow e = 2$$

$$2) a + b = 5^{-1} + \frac{1}{\sqrt[n]{4}} \rightarrow 5^{-1} + \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = 5^{-1} + \frac{1}{\sqrt[n]{4}} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 4 \end{cases}$$

3) Luego la mayor cantidad de kilogramos de papa con la que llega Marilyn a su casa es de $c + (n + d + e) = 256 + 4 + 4 + 2 = 266$ kilogramos.

Rpta.: D

2. Aplicando un modelo matemático del VIH /SIDA a una determinada población, se obtuvo el ritmo básico de reproducción del virus $R_0 = P\left(\frac{1}{F(x)}\right) + 1,20$ donde

$$P\left(\frac{1}{F(x)}\right) = a^2x - 3a + 3,75 \text{ y } F(x) = ax - 1, \text{ "a" es un parámetro y } \frac{1}{F(x)} \text{ representa el}$$

tiempo en años del estudio de dicho virus. Si el estudio duro 6 meses, halle el ritmo básico de reproducción en dicho tiempo.

A) 4,95

B) 3,25

C) 3,75

D) 1,75

Solución:

$$1) a = \frac{F(x)+1}{x} \rightarrow P\left(\frac{1}{F(x)}\right) = \left(\frac{F(x)+1}{x}\right)^2 x - 3\left(\frac{F(x)+1}{x}\right) + 3,75$$

$$2) \text{ El estudio duro 6 meses } \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{F(x)}$$

$$3) P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{x}\right)^2 x - 3\left(\frac{3}{x}\right) + 3,75 = 3,75$$

$$4) R_0 = 3,75 + 1,20 = 4,95$$

Rpta.: A

3. $p(x)$ es un polinomio mónico de segundo grado tal que al ser evaluado en $x = 2$ y $x = 3$ se obtienen 9 y 18 respectivamente. De los 8 dígitos del DNI de doña Julia leídos de izquierda a derecha se sabe que el primer dígito es cero, el siguiente es el mayor número par que no es primo, el que sigue es "a". Los 5 primeros dígitos del DNI forman un número capicúa. El sexto dígito es "a", el que sigue es "b" y el último es "c", donde $a = p(1)$, $b = p(-5) - 1$ y c es el coeficiente del término lineal de $p(x)$, aumentado en 3. Halle la suma de cifras del DNI de Doña Julia.

A) 43

B) 31

C) 28

D) 26

Solución:

1) $p(x) = x^2 + mx + n$

$$p(2) = 2^2 + m(2) + n = 4 + 2m + n = 9 \quad \text{y} \quad p(3) = 3^2 + m(3) + n = 9 + 3m + n = 18$$

$$2m + n = 5 \quad \text{y} \quad 3m + n = 9$$

$$m = 4; \quad n = -3 \quad \text{luego} \quad p(x) = x^2 + 4x - 3$$

2) $a = p(1) = 2$, $b = p(-5) - 1 = 1$ y $c = 4 + 3 = 7$

3) La suma de cifras del DNI de Doña Julia es $0 + 8 + 2 + 8 + 0 + 2 + 1 + 7 = 28$

Rpta.: C

4. Un misil es lanzado desde un submarino que se encuentra a una profundidad de 720 metros. La altura que alcanza el misil (en metros) con respecto al nivel del mar está expresado por el polinomio $p(x) = -\frac{1}{4}x^3 + ax^2 + bx + c$ donde x es el tiempo transcurrido en segundos desde que se lanza el misil. Si a los 4 segundos de lanzado el misil, se ubica en la línea del nivel del mar y a los 10 segundos derriba una avión que se encontraba volando a 2640 metros sobre el nivel del mar, las trayectorias del misil y el avión son coplanares. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. A los 2 segundos de lanzado el misil se encuentra a 472 metros sobre el nivel del mar.
- II. A los 2 segundos de lanzado el misil se encuentra a 472 metros por debajo del nivel del mar.
- III. A los 2 segundos de lanzado el misil se encuentra a 642 metros por debajo del nivel del mar.

A) FFF

B) FFV

C) FVF

D) VFF

Solución:

$$1) \quad p(x) = -\frac{1}{4}x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$p(0) = c = -720 \rightarrow p(x) = -\frac{1}{4}x^3 + ax^2 + bx - 720$$

$$p(4) = 16a + 4b - 736 = 0 \rightarrow 4a + b = 184$$

$$p(10) = 100a + 10b - 970 = 2640 \rightarrow 10a + b = 361$$

$$a = \frac{59}{2}; \quad b = 66 \rightarrow p(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{59}{2}x^2 + 66x - 720$$

$$2) \quad p(2) = -\frac{1}{4}(2)^3 + \frac{59}{2}(2)^2 + 66(2) - 720 = -472. \text{ A los 2 segundos de lanzado el misil se encuentra a 472 metros por debajo del nivel del mar.}$$

Rpta.: C

5. Dados $p(2x-1) = 4x^2 + 2x - 1$ y $q(x) = p(x^2)$, se tiene que $q(0)$ representa el número de cuadernos que compró Luis y $q(1)$ el precio, en soles, de cada cuaderno que compró. ¿Cuánto pagó en total Luis por esta compra?

A) S/ 3

B) S/ 4

C) S/ 5

D) S/ 6

Solución:

$$1) \quad p(2x-1) = 4x^2 + 2x - 1 \rightarrow p(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$q(x) = p(x^2) = x^4 + 3x^2 + 1$$

$$2) \quad q(0) = 1; \quad q(1) = 5$$

$$3) \quad \text{Pagó S/ 5}$$

Rpta.: C

6. Si el polinomio $p(x,y) = x^{6-m} + x^r - 3y^m$ es completo y ordenado respecto a la variable x además María tiene tantos caramelos como el grado absoluto del polinomio $q(x,y) = p(x,1)p(1,y)$, ¿cuántos caramelos le faltan a María para tener una decena de caramelos?

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

Solución:

$$1) \quad p(x,y) \text{ es completo y ordenado respecto a la variable } x, \quad m = 4, \quad r = 1$$

$$p(x,y) = x^2 + x - 3y^4$$

$$2) \quad q(x,y) = p(x,1)p(1,y) = (x^2 + x - 3)(2 - 3y^4)$$

$$GA[q(x,y)] = 6$$

- 3) Luego, le faltan 4 caramelos para completar una decena de caramelos

Rpta.: B

7. Don Miguel tiene cuatro hijos: Juan, Julio, Juanita y Julieta. Las edades de sus hijos, en años, están dadas por los grados relativos de las variables en el polinomio homogéneo y completo respecto a x:

$$p(x,y,z,w) = y^c z^{a+b} w^{b+1} + y^{a+2} z^{c+2} w^a x^{b-3} + z^{3c-1} w^c x^{b-2}$$

Si Juan no es el menor, y además la suma de su edad con la de Juanita es igual a la de Julio, ¿cuántos años tiene Julieta?

- A) 3 años B) 2 años C) 5 años D) 6 años

Solución:

- 1) Como el polinomio es completo respecto a la variable x:

$$b-3=1 \rightarrow b=4$$

$$p(x,y,z,w) = y^c z^{a+4} w^5 + y^{a+2} z^{c+2} w^a x + z^{3c-1} w^c x^2$$

- 2) Como es homogéneo:

$$a+c+9 = 2a+c+5 = 4c+1$$

$$a=4; c=4$$

$$p(x,y,z,w) = y^4 z^8 w^5 + y^6 z^6 w^4 x + z^{11} w^4 x^2$$

- 3) Las edades son:

Julio: 11 años

Juan: 5 o 6 años

Juanita: 6 o 5 años

Julieta: 2 años

Rpta.: B

8. José María compra audífonos cuyo precio, en soles, es el mínimo valor de $m+n+p$.

Si el polinomio $p(x,y,z) = 3x^{m-5} + y^{n-1} + pz^{p^2} - 7xy^2z$ es homogéneo, ¿Cuánto pagó José María por los audífonos?

- A) S/ 12 B) S/ 17 C) S/ 15 D) S/ 14

Solución:

- 1) Como el polinomio es homogéneo, $m - 5 = n - 1 = p^2 = 1 + 2 + 1 = 4$
Luego $m = 9$; $n = 5$; $p = \pm 2$
- 2) José María pagó por los audífonos $m + n + p = 9 + 5 - 2 = 12$ soles

Rpta.:A

Álgebra

EJERCICIOS

1. El precio de un cuaderno en una librería está dado por $\left(\frac{p(x)-q(x)+1}{x}\right)$ soles, donde $p(2x-4)=14x-30$ y $p[q(x-3)]=14x-51$. ¿Cuál es el precio de una docena de cuadernos si le hacen un descuento del 5% del precio total?
- A) S/ 114 B) S/ 95, 20 C) S/ 57 D) S/ 45,60 E) S/ 51,30

Solución:

i) De $p(2x-4)=14x-30$,

$$\text{Sea } y = 2x - 4 \rightarrow x = \frac{y+4}{2}$$

$$p(y) = 14\left(\frac{y+4}{2}\right) - 30 \rightarrow p(y) = 7y - 2 \rightarrow p(x) = 7x - 2$$

ii) $p[q(x-3)]=14x-51 \rightarrow 7[q(x-3)] - 2 = 14x - 51$

$$\rightarrow q(x-3) = 2x - 7, \rightarrow q(x) = 2(x+3) - 7$$

$$\rightarrow q(x) = 2x - 1$$

$$\text{iii) } \frac{p(x)-q(x)+1}{x} = \frac{7x-2-(2x-1)+1}{x} = 5$$

Precio de un cuaderno: S/ 5, entonces una docena de cuaderno cuesta: S/ 60

Precio total con 5% de descuento: $0,95(60) = \text{S/ } 57$

Rpta.: C

2. Si: $f(x) = b(x^a + 1)^{a+b} + \left(1 - \frac{8}{a-1}\right)x^{-5} + \left(1 - \frac{9}{b-2}\right)\sqrt{x} + a^2 + a$, es una expresión cuya equivalencia es un polinomio, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.
- I. El grado de $f(x)$ es 180.
 II. El término independiente es la mitad del grado de $f(x)$.
 III. La suma de los coeficientes de $f(x)$ es 101.
- A) I, II y III B) solo I C) solo II D) solo III E) I y III

Solución:

Para que $f(x)$ sea equivalente a un polinomio, entonces

$$1 - \frac{8}{a-1} = 0 \quad \wedge \quad 1 - \frac{9}{b-2} = 0 \rightarrow a = 9 \quad \wedge \quad b = 11$$

$$\text{luego } a = 9 \quad \wedge \quad b = 11 \rightarrow f(x) = 11(x^9 + 1)^{20} + 9^2 + 9$$

I. $\text{Grad}(f(x)) = 180$ (V)

II. $f(0) = 101 \neq \frac{\text{Grad}(f(x))}{2}$ (F)

III. $\sum \text{coeficientes de } f = f(1) = 11 \cdot (2)^{20} + 90 \neq 101$ (F)

$\therefore$ Sólo I es correcto.

Rpta.: B

3. En el polinomio $p(x) = (2x^2 + 6 - 8x)(x + n + 9x^n)(x^3 + 4x^4 + n - 2)(-6 - 12x^n - 5x^{n-2})$ se cumple que su término independiente es igual a su coeficiente principal. Halle el grado de $p(x)$.
- A) 18 B) 16 C) 14 D) 10 E) 20

Solución:

i) $p(0) = 6(n)(n-2)(-6) \quad \wedge \quad \text{Coef.Princ}(p(x)) = 2(9)(4)(-12) \quad \wedge \quad n-2 \geq 0$

$$p(0) = \text{Coef.Princ}(p(x)) \rightarrow -36n(n-2) = 2(9)(4)(-12)$$

$$n(n-2) = 24 \rightarrow n = 6$$

ii) $p(x) = (2x^2 + 6 - 8x)(x + 6 + 9x^6)(x^3 + 4x^4 + 4)(-6 - 12x^6 - 5x^4)$

$$\text{Grad}(p(x)) = 2 + 6 + 4 + 6 = 18$$

Rpta.: A

4. Si $p(x) = (a^{2a} - 24a^a - 81)x^2 + (m + 3n - 4a)x + (mn - 4a)$, $a \in \mathbb{Z}$ es un polinomio idénticamente nulo, halle el valor de $m - n - a$.
- A) B) 1 C) 3 D) -1 E) 0

Solución:

i) $a^{2a} - 24a^a - 81 = 0 \rightarrow a^a = 27 \rightarrow a = 3$

ii) $m + 3n - 4a = 0 \rightarrow m + 3n = 12$

iii) $mn - 4a = 0 \rightarrow mn = 12$

Resolviendo $m = 6, n = 2$

$\therefore m - n - a = 1$

Rpta.: B

5. El número de gallinas que tiene un galpón es $(m+5n)$ en decenas de miles, donde m y n se obtienen, sabiendo que el polinomio $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 + 2x + 2$ es idéntico al polinomio $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^2 + (m+1)x - n$, ¿cuál es el gasto semanal del empresario si el costo por día de cada gallina es de S/1?

A) S/ 14000

B) S/ 149000

C) S/ 350000

D) S/ 3500

E) S/ 140000

Solución:

- I. Como el polinomio
- $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 + 2x + 2$
- es idéntico a

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)^2 + (m+1)x - n$$

$$\Rightarrow (ax^2 + bx + c)^2 + (m+1)x - n = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 + 2x + 2$$

 $\Rightarrow$ Desarrollando se tiene que :

$$a = 2, b = -3, c = 1, m = 7, n = -1 \vee a = -2, b = 3, c = -1, m = 7, n = -1$$

- II. El número de gallinas del galpón:

$$(m+5n) \text{ decenas de miles} = (7+5(-1)) \text{ decenas de miles} = 20000$$

El gasto del empresario a la semana es de 140000 soles.

Rpta.: E

6. Se sabe que el grado del polinomio $p(x)$ y el grado del polinomio $q(x)$ representan el precio en soles de una revista semanal y una revista mensual, respectivamente. Además, se conoce que el grado de $[p(x)]^3[q(x)]^2$ es igual a 26, y el grado de $[p(x)]^6[q(x)]^5$ es igual a 59. Si se desea comprar ambas revistas, ¿cuál será el costo total?

A) 7 soles

B) 11 soles

C) 9 soles

D) 10 soles

E) 12 soles

Solución:

$$i) \text{Grad}(p(x)) = m, \text{Grad}(q(x)) = n$$

$$ii) \text{Grad}([p(x)]^3[q(x)]^2) = 26 \rightarrow 3m + 2n = 26$$

$$\text{Grad}([p(x)]^6[q(x)]^5) = 52 \rightarrow 6m + 5n = 59$$

$$\text{Resolviendo } n = 7 \wedge m = 4$$

Precio de una revista semanal S/ 4

Precio de una revista mensual S/ 7

Costo total por ambas revistas S/ 11

Rpta.: B

7. En el polinomio

$p(x,y) = 5x^{m-1}y^{n+2} - 16x^{m+1}y^{n+3} + (m+2n+3)x^{m+3}y^{n-2} + mnx^{m+2}y^{n+4}$, se cumple que su grado absoluto es 19 y la diferencia entre los grados relativos de x e y es 2. Halle la suma de coeficientes de p(x,y).

A) 45

B) 53

C) 60

D) 50

E) 78

Solución:

$$i) \text{GA}(p(x,y)) = 19 \rightarrow m+n+6 = 19 \rightarrow m+n = 13 \dots (\alpha)$$

$$\text{GR}_x(p(x,y)) - \text{GR}_y(p(x,y)) = 2 \rightarrow m+3 - (n-4) = 2 \rightarrow m-n = 3 \dots (\beta)$$

$$\text{De } (\alpha) \text{ y } (\beta) \rightarrow m = 8 \wedge n = 5$$

$$ii) p(x,y) = 5x^7y^7 - 16x^9y^8 + 21x^{11}y^3 + 40x^{10}y^9$$

$$p(1,1) = 5 - 16 + 21 + 40 = 50$$

Rpta.: D

8. En una tienda de abarrotes se realizó una compra de varios productos. En dicha compra, el monto sin impuestos asciende a $(a^3 + b^3 + 4)$ soles, donde el valor de a y b se obtienen de los polinomios homogéneos $p(x,y) = 6x^{a^2+2a}y^{5b+3} + (a+2)x^{b^2}y^{11-b}$, $q(x,y) = x^a y^{b-3} + x^{3a}y^{2b-10}$, $a+b \neq 2$. Determine, el monto final a pagar por dicha compra si se tiene que pagar además un impuesto de $(2a+3b)\%$ del monto sin impuestos.

A) S/ 152,10

B) S/ 130

C) S/ 150,5

D) S/ 175,5

E) S/ 163,80

Solución:

i) $p(x,y) = 6x^{a^2+2a}y^{5b+3} + (a+2)x^{b^2}y^{11-b}$, $a+b \neq 2$ es homogéneo

$$a^2 + 2a + 5b + 3 = b^2 + 11 - b \rightarrow (a^2 + 2a + 1) - (b^2 - 6b + 9) = 0$$

$$(a+1)^2 - (b-3)^2 = 0 \rightarrow (a+b-2)(a-b+4) = 0 \rightarrow a-b = -4 \dots (\alpha)$$

ii) $q(x,y) = x^a y^{b-3} + x^{3a} y^{2b-10}$, es homogéneo

$$a + b - 3 = 3a + 2b - 10 \rightarrow 2a + b = 7 \dots (\beta)$$

$$\text{De } (\alpha) \text{ y } (\beta) \rightarrow a = 1, b = 5$$

Monto sin impuestos: S/ 130

Monto con impuestos: $130 + 17\%(130) = \text{S/}152,10$

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea $p(x)$ un polinomio de segundo grado, tal que su término independiente es tres; además se cumple que $p(1) = 4$ y $p(-2) = -5$. Si $q(x) = p(x+1)$, halle el producto del coeficiente principal de $p(x)$ con la suma de coeficientes de $q(x)$.

A) B) 1 C) D) 0 E) 3

Solución:

i) Sea $p(x) = ax^2 + bx + 3$

$$p(1) = 4 \rightarrow a + b + 3 = 4 \rightarrow a + b = 1 \quad (\alpha)$$

$$p(-2) = -5 \rightarrow 4a - 2b + 3 = -5 \rightarrow 2a - b = -4 \quad (\beta)$$

$$\text{De } \alpha \text{ y } \beta \rightarrow a = -1, b = 2 \text{ y } p(x) = -x^2 + 2x + 3$$

ii) $q(x) = p(x+1) \rightarrow q(x) = -(x+1)^2 + 2(x+1) + 3$

$$\rightarrow q(x) = -x^2 + 4 \rightarrow q(1) = -1 + 4 = 3$$

$$\therefore [\text{Coef. Princ. } p(x)][q(1)] = (-1)3 = -3$$

Rpta.: C

2. En la siguiente tabla se muestra la cantidad de camisas y polos que se ha vendido en la última semana en las tiendas R y S. En la tienda R se ha vendido en total entre camisas y polos $2x^7$ unidades; mientras que en la tienda S se ha vendido en total $2x^8$ unidades. Si para la siguiente semana la proyección, en la tienda R, es vender (x^{m+r+1}) camisas y, en la tienda S, es vender (x^{n+t+1}) camisas, halle el grado de la expresión que defina la suma de dichas proyecciones de ventas.

Tiendas	N° Camisas	N° Polos
R	x^{2+m}	x^{3+r}
S	x^{t+n-1}	x^{7+n-t}

- A) 8 B) 9 C) 12 D) 7 E) 10

Solución:

- i) Total de unidades vendidas en la tienda R: $2x^7 = x^{2+m} + x^{3+r}$

Entonces, x^{2+m} , x^{3+r} son términos semejantes y se cumple

$$2+m=7 \wedge 3+r=7 \rightarrow m=5 \wedge r=4$$

- ii) Total de unidades vendidas en la tienda S: $2x^8 = x^{t+n-1} + x^{7+n-t}$

Entonces x^{t+n-1} , x^{7+n-t} son términos semejantes y se cumple

$$t+n-1=8 \wedge 7+n-t=8 \rightarrow n+t=9 \wedge n-t=1 \rightarrow n=5 \wedge t=4$$

- iii) Proyección de venta de camisas en la tienda R: $x^{m+r+1} = x^{10}$

Proyección de venta de camisas en la tienda S: $x^{n+t+1} = x^{10}$

Suma de proyecciones de ventas de camisas (PV): $2x^{10} \rightarrow \text{Grado(PV)} = 10$

Rpta.: E

3. Dados los siguientes polinomios idénticos

$$p(x) = (m-5)x^{2n-1} + (n-3)x^{n-2} \quad \text{y} \quad q(x) = \frac{p}{4}x^{n-2} + (3-n)x^7.$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- i) La suma de sus coeficientes es cero

- ii) El grado de $p(x)$ es 7

- iii) El valor $\frac{m}{n^2+p^2} = 0,125$

- A) VVV B) VVF C) FVV D) VFF E) VFV

Solución:

De polinomios idénticos: $p(x) = q(x)$

$$(m-5)x^{2n-1} + (n-3)x^{n-2} = \frac{p}{4}x^{n-2} + (3-n)x^7$$

$$2n-1=7 \wedge m-5=3-n \wedge n-3=\frac{p}{4}$$

$$\rightarrow n=4 \wedge m=4 \wedge p=4$$

$$\rightarrow p(x) = q(x) = -x^7 + x^2$$

i) $p(1) = -1+1=0 \dots(V)$

ii) $\text{Grado}(p(x)) = 7 \dots(V)$

iii) $\frac{m}{n^2+p^2} = \frac{4}{4^2+4^2} = 0,125 \dots(V)$

Rpta.: A

4. Dado el polinomio homogéneo: $P(a,b) = 3a^4 - 2a^2b^2 + 5ab^3$.

Determine el polinomio que debe agregarse a $P(a,b)$ para que el polinomio resultante sea un polinomio homogéneo y completo respecto a sus dos variables, tal que la suma de sus coeficientes sea 16 y su valor numérico para $a=2, b=1$ sea 88.

A) $2ab^3 + 4b^4$

B) $3a^3b - 5b^4$

C) $4a^3b + 6b^4$

D) $6a^3b + 4b^4$

E) $3a^3b + 6b^4$

Solución:

Polinomio homogéneo: $P(a,b) = 3a^4 - 2a^2b^2 + 5ab^3$

Polinomio que se agrega: $ma^3b + nb^4$

Polinomio homogéneo y completo: $P_1(a,b) = 3a^4 - 2a^2b^2 + 5ab^3 + ma^3b + nb^4$

$$P_1(1,1) = 16 \rightarrow 3 - 2 + 5 + m + n = 16 \rightarrow m + n = 10$$

$$P_1(2,1) = 88 \rightarrow 3(16) - 2(4)(1) + 5(2)(1) + m(8)(1) + n(1) = 88 \rightarrow 8m + n = 38$$

Resolviendo $m = 4, n = 6$

Polinomio que se agrega: $4a^3b + 6b^4$

Rpta.: C

5. Analizando un modelo matemático sobre la tos ferina, el número reproductivo básico R_0 de la tos ferina tiene la siguiente expresión: $R_0 = \frac{2^{p(x)}}{8} + 2p(x) - 5$, donde

$$p(x) = 3\left(\frac{100x}{99}\right)^2 - 2\left(\frac{100x}{99}\right) + 5, \text{ para } x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{9900}. \text{ Halle } R_0.$$

A) 17

B) 14

C) 6

D) 15

E) 16

Solución:

$$i) \quad x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

$$ii) \quad p\left(\frac{99}{100}\right) = 6$$

$$iii) \quad R_o = \frac{2^6}{8} + 2(6) - 5 = 15$$

Rpta.: D

6. Si $m < n < 9$ y $p(x,y) = (k+5)x^{m^2+m+k} + (a+2k+m)x^{\frac{n^2}{5}}y^{m+1} + 3y^{\frac{n^2+20}{5}}$ es un polinomio homogéneo, halle $p(1,-1)$ si a es la suma de los elementos enteros del conjunto solución que se obtiene al resolver la inecuación $\frac{x+1}{x^2+x+1} > \frac{1}{x-4}$.

- A) 1 B) 2 C) -1 D) E) 3

Solución:

$$i) \quad p(x,y) \text{ es homogéneo, entonces se cumple: } m^2 + m + k = \frac{n^2}{5} + m + 1 = \frac{n^2}{5} + 4$$

$$i) \quad \frac{n^2}{5} + m + 1 = \frac{n^2}{5} + 4 \rightarrow m = 3$$

$$iii) \quad \text{De } m < n < 9 \rightarrow n = 4, 5, 6, 7, 8 \rightarrow n = 5$$

$$iv) \quad \text{De } m^2 + m + k = \frac{n^2}{5} + 4 \rightarrow 9 + 3 + k = 5 + 4 \rightarrow k = -3$$

$$v) \quad \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x-4} > 0 \rightarrow \frac{x^2-3x-4-x^2-x-1}{x-4} > 0 \rightarrow \frac{-4x-5}{x-4} > 0$$

$$\frac{4x+5}{x-4} < 0 \rightarrow \text{CS} = \left\langle -\frac{5}{4}, 4 \right\rangle \rightarrow a = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$$

$$p(x,y) = 2x^9 + 2x^5y^4 + 3y^9$$

$$\therefore p(1,-1) = 2(1) + 2(1)(1) + 3(-1) = 1$$

Rpta.: A

7. Se definen los polinomios: $p(x,y) = x^m y^{n-1} + x^{m-1} y^{2n}$, $q(x,y) = x^{m-1} y^{n+2} + x^m y^{n-2}$, y $r(x,y) = p(x,y) \cdot q(x,y)$. Además, en el polinomio $r(x,y)$ se cumple que $GR_x(r(x,y)) = GR_y(r(x,y))$ y $GA(r(x,y)) = 14$. Determine el grado absoluto del polinomio $s(x,y) = p(x,y) - q(x,y)$.

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Solución:

$$i) \ r(x,y) = p(x,y) \cdot q(x,y) \rightarrow r(x,y) = (x^m y^{n-1} + x^{m-1} y^{2n})(x^{m-1} y^{n+2} + x^m y^{n-2})$$

$$GR_x(r(x,y)) = GR_y(r(x,y)) \rightarrow 2m = 3n + 2 \dots (\alpha)$$

$$GA(r(x,y)) = 14 \rightarrow 2m + 3n = 14 \dots (\beta)$$

De (α) y (β) tenemos: $m = 4$, $n = 2$

$$ii) \ p(x,y) = x^4 y + x^3 y^4, \quad q(x,y) = x^3 y^4 + x^4$$

$$s(x,y) = p(x,y) - q(x,y) = x^4 y - x^4$$

$$\therefore GA(s(x,y)) = 5$$

Rpta.: B

8. El profesor Walter, un coleccionista de objetos antiguos, tiene una manera peculiar de calcular a partir de cuantos años es considerado coleccionable un objeto, e hizo una pequeña fórmula, que era tres veces el producto de las cifras de

$$M = \frac{k^{31} + r^{31} + t^{11}}{(kr)^6}. \text{ Calcule, cuántos años de coleccionable tiene un auto de 50 años}$$

de antigüedad, si se considera esta fórmula válida para este tipo de objeto y el valor de k , r y t se obtienen del polinomio idénticamente nulo

$$p(x) = k(x-4)^2 + r(x-5)^2 + t(x-3) - 12.$$

A) 30 años B) 20 años C) 10 años D) 40 años E) 25 años

Solución:

$$i) \ p(x) = k(x-4)^2 + r(x-5)^2 + t(x-3) - 12 \text{ es idénticamente nulo}$$

$$\rightarrow k(x^2 - 8x + 16) + r(x^2 - 10x + 25) + t(x-3) - 12 = 0$$

$$\rightarrow (k+r)x^2 + (-8k-10r+t)x + (16k+25r-3t-12) = 0$$

$$\rightarrow k = -r, \ t = 2r, \ r = 4 \rightarrow k = -4, \ t = 8$$

II. Reemplazando el valor de k , r y t en M , se obtiene $M=512$.

Producto de las cifras del valor de $M=5(1)(2)=10$.

La antigüedad que se considera coleccionable un auto de 50 años es:
 $30(10) = 30$ años.

El auto tiene: $50 - 3(10) = 20$ años de colección.

Rpta.: B

Álgebra

EJERCICIOS

1. Un comerciante de casacas tiene registrado el número de casacas vendidas y el precio de venta unitario en sus dos primeras semanas de venta, según cuadro adjunto:

	Nro. De Casacas Vendidas	Precio Unitario de cada casaca (en soles)
1era Semana	mx^{2r-1}	$4y^4$
2da semana	$6y^{16-3s}$	$(d+1)x^5$

Si el ingreso total en soles, en su venta de las dos primeras semanas está representado por el monomio $28x^c y^{3d+1}$. ¿Cuánto fue su ingreso en la tercera semana de venta, si vendió $(m-1)x^c$ casacas al precio unitario de $(c+r-1)y^{d+3}$ soles?

- A) $21x^5 y^4$ soles B) $28x^4 y^5$ soles C) $12x^5 y^4$ soles
 D) $36x^3 y^4$ soles E) $32x^4 y^5$ soles

Solución:

Ingreso total de las dos primeras semanas:

$$mx^{2r-1} \cdot 4y^4 + 6y^{16-3s} \cdot (d+1)x^5 = 28x^c y^{3d+1}$$

Así: $2r-1 = 5 = c \rightarrow r = 3$

$4 = 16-3s = 3d+1 \rightarrow s = 4, d = 1$, además: $4m + 6(d+1) = 28 \rightarrow m = 4$

Por tanto, en la 3ra semana su ingreso fue de : $3x^5(7y^4) = 21x^5 y^4$ soles.

Rpta.: A

2. Dado el polinomio $p(x,y) = 3nx(xy)^n - nx^{n-1}y^{n-1} + (n+2)(xy)^{n-2}$, tal que $GR_x[p(x,y)] = 4$ y $q(x) = p(x,1)$, calcule el valor de $p(-1,1) + n + GA[p(x,y)] + p(1,1) + GA[q(x)]$.

- A) 18 B) 14 C) 20 D) 15 E) 26

Solución:

$$p(x, y) = 3nx^{n+1}y^n - nx^{n-1}y^{n-1} + (n+2)x^{n-2}y^{n-2}$$

Por dato: $n+1=4 \rightarrow n=3$

Luego: $p(x, y) = 9x^4y^3 - 3x^2y^2 + 5x^1y^1$, $GA[p(x, y)] = 7$, $p(-1, 1) = 1$, $p(1, 1) = 11$

$q(x) = p(x, 1) = 9x^4 - 3x^2 + 5x^1 \rightarrow GA[q(x)] = 4$.

Así: $p(-1, 1) + n + GA[p(x, y)] + p(1, 1) + GA[q(x)] = 1 + 3 + 7 + 11 + 4 = 26$.

Rpta.: E

3. Sea $p(x) = 2x(ax^2 - bx - d) - x(bx^2 + 3cx - c) + d(x + 2) - 8$ un polinomio idénticamente nulo. Si $-bc$ y $(d^2 - a)$ son el cociente y divisor, respectivamente, de una división con residuo máximo, halle el valor del dividendo en dicha división.

A) 324 B) 474 C) 447 D) 342 E) 454

Solución:

$$p(x) = (2a - b)x^3 + (-2b - 3c)x^2 - x(d - c) + 2d - 8$$

Así: $2a = b$, $2b = -3c$, $c = d$, $2d = 8$

Luego: $d = 4$, $c = 4$, $b = -6$, $a = -3$

Así: $-bc = 24$, $(d^2 - a) = 19$, considerando $D = \text{dividendo}$

Luego: $D = 19(24) + 18 = 474$.

Rpta.: B

4. Según informe difundido por NAT GEO WILD, la velocidad promedio de un camélido está dada por $(5m + 2n + p + 1)$, expresado en km/h, cuyos valores de $\{m, n, p\} \subset \mathbb{Z}^+$, satisfacen la condición del polinomio completo y ordenado $p(x) = 2m(x^m)^6x^{5n+p} - 3nx^{6n+4p}(x^4)^m + 4p(x^m)^5x^{4n+5p} + 5(x^m)^6x^{5n} + \dots$, calcule dicha velocidad.

A) 31 km/h B) 80 km/h C) 56 km/h D) 55 km/h E) 46 km/h

Solución:

$$p(x) = 2mx^{6m+5n+p} - 3nx^{4m+6n+4p} + 4px^{5m+4n+5p} + 5x^{6m+5n} + \dots$$

Es completo y se observa que debe ser ordenado en forma decreciente. Así:

$$\underbrace{6m+5n+p}_{(I)} = \underbrace{4m+6n+4p+1}_{(II)} = \underbrace{5m+4n+5p+2}_{(III)} = \underbrace{6m+5n+3}_{(IV)}$$

De (I) y (IV): $p = 3$

De (II) y (III): $2n - m = 4 \dots\dots (V)$

De (II) y (IV): $2m - n = 10 \dots\dots (VI)$

De (V) y (VI): $m = 8, n = 6$

Por tanto, la velocidad es 56 km/h .

Rpta.: C

5. Dado $p(x) = a + (r - a^2)x^{a^2-15} + \dots + x^{r^2-1} \in \mathbb{Z}[x]$, un polinomio completo y ordenado de a^4 términos, determine el grado de $q(x) = (ax^a + 1)^{a-r}$.

- A) 12 B) 16 C) 9 D) 32 E) 64

Solución:

$$\text{i) } r^2 - 1 + 1 = a^4 \rightarrow \underbrace{r = a^2}_{\substack{\text{Descartado, pues } p(x) \\ \text{es completo}}} \quad \text{ó } r = -a^2$$

$$\text{ii) } a^{2a} - 15 = 1 \rightarrow a = 2, r = -4$$

$$\text{iii) } q(x) = (2x^2 + 1)^6, \text{ así el grado de } q(x) \text{ es } 12.$$

Rpta.: A

6. Si a, b y c , representan las edades de tres hermanos, y considerando que los polinomios: $p(x) = 5x^2 - 7 + 3x^3$ y $q(x) = b(x-2)(x+1) + cx - a(1-x)^3 + 24$ son polinomios idénticos, halle la suma de las edades del mayor y menor de estos tres hermanos.

- A) 16 B) 19 C) 13 D) 17 E) 15

Solución:

Como: $p(x) \equiv q(x)$

$$\rightarrow -7 + 5x^2 + 3x^3 \equiv -2b - a + 24 + (-b + c + 3a)x + (b - 3a)x^2 + ax^3$$

$$\text{Entonces: } a = 3, \quad \underbrace{b - 3a = 5}_{b=14}, \quad \underbrace{(-b + c + 3a) = 0}_{c=5}$$

Luego, las edades son: 3, 5 y 14. Por tanto, la suma de las edades del mayor y menor es 17.

Rpta.: D

7. Jesús compró $\overline{m(-2n)}$ docenas de lápices a $(m + 7 + n)$ soles cada docena. Si $p(x, y) = m^2x^{m-n} + nx^2y^6 + mx^6y^{m+n}$ es un polinomio homogéneo, ¿cuánto pagó Jesús, si le hicieron un descuento del 5% sobre el total a pagar?

- A) S/ 167.20 B) S/ 159.60 C) S/ 176.50 D) S/ 165.45 E) S/ 156.80

Solución:

Por ser homogéneo: $m^{m-n} = 2 + 6 = 6 + m^{m+n}$

$$\begin{cases} m^{m+n} = 2 \dots\dots (*) \\ m^{m-n} = 8 \dots\dots (**) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^{m+n} = 2 \dots\dots (*) \\ m^{m-n} = 8 \dots\dots (**) \end{cases}$$

Multiplico $(**)$ y $(*)$: $(m^{m+n})(m^{m-n}) = 16 \rightarrow m^{2m} = 16 \rightarrow m = 2$

Luego en $(*)$: $n = -1$

Así, Jesús compró $\overline{m(-2n)} = 22$ docenas de lápices, a $(m + 7 + n) = 8$ soles cada docena.

Además: $22 \times 8 \times 5\% = 8.8$, luego pago: $176 - 8.8 = 167.20$ soles.

Rpta.: A

8. En el polinomio $p(x, y) = (m + n + 1)x^{3m+1} - (2m - n + 2)x^{m+2}y^{n+7} + 4(m - 2n)x^{m-3}y^{n+4} - (3m - 2n)x^{2m-1}y^n$

la suma de los grados absolutos de sus cuatro monomios es 57 y n es una solución de la ecuación $3^{n^2-3n+1} + 3^{n^2-3n-1} + 3^{n^2-3n-3} + 3^{n^2-3n+2} = 1002$. Halle el grado del polinomio $[p(x, 1)]^2[p(x, 0)]^3$.

- A) 56 B) 32 C) 48 D) 64 E) 80

Solución:

Tenemos: $3m + 1 + m + n + 9 + m + n + 1 + 2m + n - 1 = 57$

$$7m + 3n = 47 \dots\dots (\alpha)$$

Ahora: $3^{n^2-3n+1} + 3^{n^2-3n-1} + 3^{n^2-3n-3} + 3^{n^2-3n+2} = 1002$

$$3^{n^2-3n}(3 + 3^{-1} + 3^{-3} + 3^2) = 1002$$

$$3^{n^2-3n} = 1002 \left(\frac{27}{334} \right)$$

$$3^{n^2-3n} = 3^4 \rightarrow n^2 - 3n - 4 = 0 \rightarrow n = 4, \quad n = -1$$

Por definición de polinomio: $n \neq -1$, por tanto $n = 4$

Así en (α) : $7m + 3n = 47 \rightarrow m = 5$

Tenemos: $p(x, y) = 10x^{16} - 8x^7y^{11} - 12x^2y^8 - 7x^9y^4$

Luego: $p(x, 1) = 10x^{16} - 8x^7 - 12x^2 - 7x^9 \rightarrow GA[p(x, 1)] = 16 \rightarrow GA[p(x, 1)^2] = 32$

$$p(x, 0) = 10x^{16} \rightarrow GA[p(x, 0)] = 16 \rightarrow GA[p(x, 1)^3] = 48$$

Por tanto: $GA([p(x, 1)]^2[p(x, 0)]^3) = 32 + 48 = 80$.

Rpta.: E

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si m_1 y m_2 son soluciones reales no nulas de la ecuación: $x^2 + x + 2(m_1 + m_2) = 0$ tal que $m_1 < m_2$. Halle la suma de coeficientes de $r(x)$, sabiendo que $p(x) = \sum_{i=1}^2 m_i x^{m_i+2}$, $q(x) = \sum_{i=1}^2 m_{3-i} x^i$ y $r(x) = p(x) + q(x)$.

- A) -1 B) -2 C) 3 D) 1 E) 2

Solución:

De la ecuación de segundo grado tenemos: $\begin{cases} m_1 + m_2 = -1 \dots\dots (i) \\ m_1 m_2 = 2 \left(\frac{m_1 + m_2}{-1} \right) = -2 \dots\dots (ii) \end{cases}$

De (i) e (ii): $(m_2)^2 + m_2 - 2 = 0 \rightarrow \underbrace{m_2 = -2}_{m_1=1} \text{ ó } \underbrace{m_2 = 1}_{m_1=-2}$

Por condición: $m_1 = -2, m_2 = 1$ soluciones de la ecuación.

Así: $p(x) = m_1 x^{m_1+2} + m_2 x^{m_2+2} = -2 + x^3$, $q(x) = m_2 x + m_1 x^2 = x - 2x^2$ y
 $r(x) = p(x) + q(x) = -2 + x - 2x^2 + x^3$ entonces $r(1) = p(1) + q(1) = -2$.

Rpta.: B

2. Si $p(x, y, z) = cx^{a+b-8}y^{|c|+1}z^{b+c-4} - ax^{a+b-2}y^{|c|+2}z^{b+c-2} - bx^{a+b-6}y^{|c|+3}z^{b+c}$ es un polinomio de tres términos, cuyos grados relativos con respecto a las variables x, y y z , son 10, 7 y 8, respectivamente, calcule el valor de $(ab - ac + bc)$.

A) 11 B) 15 C) 16 D) 19 E) 22

Solución:

Por condición del problema: $a + b - 2 = 10 \rightarrow a + b = 12 \dots\dots (*)$

$|c| + 3 = 7 \rightarrow |c| = 4 \rightarrow c = 4 \text{ ó } c = -4$

$$b + c = 8 \rightarrow \begin{cases} \text{Si } c = 4 \rightarrow b = 4 \\ \text{Si } c = -4 \rightarrow b = 12 \end{cases} \dots\dots (**)$$

De (**) en (*): $\begin{cases} \text{si } b = 4 \rightarrow a = 8 \\ \text{si } b = 12 \rightarrow a = 0 \end{cases}$

Por tanto: $a = 8, b = 4$ y $c = 4$

Así: $ab - ac + bc = 32 - 32 + 16 = 16$.

Rpta.: C

3. Sea $p(x) = (a + b - 4)x^2 + (a + c - 8)x + (b + c - 10)$ un polinomio idénticamente nulo. Si $q(x) = ax^3 - cx + b$, halle la suma de cifras $q(q(q(p(a + b + c))))$.

A) 21 B) 12 C) 11 D) 19 E) 23

Solución:

Por ser polinomio idénticamente nulo:

$$\begin{cases} a + b - 4 = 0 \rightarrow a + b = 4 \\ a + c - 8 = 0 \rightarrow a + c = 8 \\ b + c - 10 = 0 \rightarrow b + c = 10 \end{cases}$$

Sumando en forma vertical: $2(a + b + c) = 22 \rightarrow a + b + c = 11$.

Además: $a = 1, b = 3, c = 7$.

Así: $q(x) = x^3 - 7x + 3$ y $p(q(p(a + b + c))) = 0$.

Luego: $q \left(q \left(q \left(\underbrace{p(q(p(a+b+c)))}_0 \right) \right) \right) = q \left(q \left(\underbrace{q(0)}_3 \right) \right) = q \left(\underbrace{q(3)}_9 \right) = q(9) = 669.$

Así, la suma de cifras de 669 es 21.

Rpta.: A

4. Juan vende zapatillas por catálogo, ganando un 10m% del precio de costo. Si el precio de costo de un cierto par de zapatillas, en cientos de soles, es igual a la suma de coeficientes del polinomio

$p(x, y) = -5xy^{2n+8} + 2x^2y^{n+5} - (n-3)x^3y^m + \left(\frac{n+1}{2}\right)x^4y^{7+n}$, el cual es completo y ordenado en una de sus variables. Determine el precio de venta del mencionado par de zapatillas.

A) 380 soles

B) 450 soles

C) 300 soles

D) 320 soles

E) 430 soles

Solución:

Se observa que $p(x, y)$ no es completo con respecto a la variable x .

$p(x, y)$ es completo y ordenado respecto a la variable y .

Así: $\underbrace{2n+8=0}_{n=-4 \text{ sí cumple}} \quad \text{ó} \quad \underbrace{7+n=0}_{n=-7 \text{ no cumple}}$

Luego: $p(x, y) = -5xy^0 + 2x^2y^1 + 7x^3y^2 - \left(\frac{3}{2}\right)x^4y^3$

Así: $m = 2$, y suma de coef. de $p(x, y) = p(1, 1) = \frac{5}{2}$

Luego, el precio de costo es: $\frac{5}{2}(100) = 250 \text{ soles}$, y gana: $20\%250=50 \text{ soles}$

Por tanto, el precio de venta es 300 soles.

Rpta.: C

5. Si $q(x) = x^{3n^2-27} + nx^{4m^2-3} + 2mx^{2p^2-10} + \frac{s}{2}x^{s^2-1}$ es un polinomio completo y ordenado en forma creciente, calcule la suma de los cuadrados de los coeficientes del polinomio $q(x) + 1$.

A) 18

B) 21

C) 14

D) 16

E) 10

Solución:

Como $p(x)$ es ordenado en forma creciente y completo, tenemos:

$$3n^2 - 27 = 0 \rightarrow n^2 = 9$$

$$4m^2 - 3 = 1 \rightarrow m^2 = 1$$

$$2p^2 - 10 = 2 \rightarrow p^2 = 6$$

$$s^2 - 1 = 3 \rightarrow s^2 = 4$$

Luego, reemplazando en $q(x)$, tenemos:

$$q(x) = 1 + nx^1 + 2mx^2 + \frac{s}{2}x^3$$

$$q(x) + 1 = 2 + nx^1 + 2mx^2 + \frac{s}{2}x^3$$

$$\rightarrow \sum(\text{coeficientes})^2 = 2^2 + n^2 + (2m)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow \sum(\text{coeficientes})^2 = 4 + 9 + 4(1) + 1 = 18.$$

Rpta.: A

6. La cantidad de soles que recibe de propina Juanita está dada por el valor que toma $p(10(m+n+t+1))$. Si m, n y t son valores con la condición que hacen que los polinomios: $r(x) = m(x^2 + 2x - 3) + n(x^2 + 7x + 12) + t(x^2 - 4 + 3x)$ y $q(x) = x + 1$ sean polinomios idénticos y $p(x - 3) = 4x - 1$ ¿Cuánto es la propina de Juanita?

A) S/ 45.00 B) S/ 47.00 C) S/ 21.00 D) S/ 51.00 E) S/ 39.00

Solución:

Como: $r(x) \equiv q(x), \forall x$

$$\rightarrow m(x+3)(x-1) + n(x+3)(x+4) + t(x+4)(x-1) \equiv x+1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si: } x = -3 \rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si: } x = 1 \rightarrow n = \frac{1}{10}$$

$$\text{Si: } x = -4 \rightarrow m = -\frac{3}{5}$$

Así: $m + n + t + 1 = 1$, luego para encontrar el valor: $p(10)$

Como: $p(x - 3) = 4x - 1$, haciendo $x - 3 = 10$, así: $x = 13$

Por tanto, la propina de Juanita es: $p(10) = 51$ soles.

Rpta.: D

7. El profesor Walter durante una clase de álgebra, escribe en la pizarra el polinomio $p(x, y) = (b - 2a)\sqrt[2]{x^b} + \frac{b^{2018}}{a^{2017}}x + (a - 2b)\sqrt[2]{y^a} + \frac{a^{2018}}{b^{2017}}y$, y pide a sus alumnos que determinen el valor de verdad de las proposiciones:

- i) El polinomio es constante y no nulo
- ii) El polinomio tiene 4 términos
- iii) $p(x, y)$ es idénticamente nulo

José, Carmen, Carlos, Ronald y Liz, respondieron, respectivamente: FFV, FVV, FVF, VFV y VVF ¿Cuántos estudiantes hallaron correctamente el valor de verdad de por lo menos 2 proposiciones?

A) 3 B) 5 C) 4 D) 1 E) 2

Solución:

Como $p(x, y)$ es un polinomio, b es múltiplo de a y a es múltiplo de b , entonces $a = b$.

Luego, reemplazando en $p(x, y)$ tenemos:

$$p(x, y) = -ax + ax - ay + ay \equiv 0$$

Es decir, $p(x, y)$ es idénticamente nulo.

Así, el valor de verdad es FFV, 3 de ellos hallaron correctamente el valor de verdad de por lo menos 2 proposiciones.

Rpta.: A

8. Un economista novato en la venta de mercado asesora a una empresa y modela sus costos, utilidad e ingresos (en cientos de soles) por semana, mediante los polinomios $C(x) = 63 + 3x$; $U(x) = x^2 + 2x - 63$ y $I(x) = x(ax + b) + c$, respectivamente, donde x representa la cantidad (en decenas) de relojes fabricados y vendidos. Calcule el ingreso semanal de la empresa, cuando fabrican y venden $\overline{(a + b)c}$ relojes.

A) S/ 6500 B) S/ 3300 C) S/ 6000 D) S/ 4600 E) S/ 6600

Solución:

Sabemos que: $U(x) = I(x) - C(x) \rightarrow \underbrace{I(x)}_{x(ax+b)+c} = \underbrace{U(x)}_{x^2+2x-63} + \underbrace{C(x)}_{63+3x}$

$$\rightarrow x^2 + 5x + c = x^2 + 5x$$

Luego: $a=1$, $b=5$, $c=0$.

$\rightarrow$ Cantidad de relojes: $\overline{(a + b)c} = 60$, osea fabrican y venden 60 relojes.

Así: $x = 6$, $I(6) = 6^2 + 5(6) = 66$, como está dado en cientos de soles el ingreso semanal es de 6600 soles.

Rpta.: E

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

06

semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

Productos Notables

Son productos que tienen una forma determinada, cuyo desarrollo se puede recordar fácilmente sin necesidad de efectuar la operación de multiplicación término a término.

A continuación, se describen los más importantes

1. Binomio al cuadrado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo 1: Efectúe $(2x + 5y)^2$

Solución:

$$(2x + 5y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5y) + (5y)^2 = 4x^2 + 20xy + 25y^2$$

2. Identidades de Legendre

$$\begin{aligned}(a + b)^2 + (a - b)^2 &= 2(a^2 + b^2) \\ (a + b)^2 - (a - b)^2 &= 4ab\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

La media aritmética de dos números es 10 y su producto es 36. Calcule la diferencia positiva de dichos números.

Solución:

Sean a y b los números

$$\frac{a+b}{2} = 10 \quad \dots(1)$$

$$a \cdot b = 36 \quad \dots(2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \rightarrow (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = (20)^2 - 4(36)$$

$$\rightarrow (a-b)^2 = 256 \Rightarrow (a-b) = 16$$

$\therefore$ La diferencia de dichos números es 16.

Ejemplo 3:

Simplifique $K = \frac{(x\sqrt{y} - 2\sqrt{y})^2 + (x\sqrt{y} + 2\sqrt{y})^2}{(x-2)^2 + (x+2)^2}$.

Solución:

$$K = \frac{(x\sqrt{y} - 2\sqrt{y})^2 + (x\sqrt{y} + 2\sqrt{y})^2}{(x-2)^2 + (x+2)^2} = \frac{2(x^2y + 4y)}{2[x^2 + 4]} = \frac{2[x^2 + 4]y}{2[x^2 + 4]} = y.$$

3. Diferencia de cuadrados

$$(a^m + b^n)(a^m - b^n) = a^{2m} - b^{2n}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

4. Binomio al cubo

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

Ejemplo 4:

Si a y b verifican las ecuaciones $a-b=2 \wedge a^2b-ab^2=70$, calcule el valor de $K = a^3 - b^3 - a + b - 6$.

Solución:

$$a - b = 2$$

$$ab(a - b) = 70$$

De la primera igualdad

$$a^3 - 3ab(a - b) - b^3 = 2^3$$

$$a^3 - b^3 = 8 + 3ab(a - b) = 2^3 + 3(70) \rightarrow a^3 - b^3 = 218$$

$$K = a^3 - b^3 - a + b - 6 = 218 - 2 - 6 = 210$$

$\therefore$ El valor de K es 210.

5. Suma y diferencia de cubos

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Ejemplo 5:

Si $a^2 - a + 1 = 0$, calcule el valor de $T = (a^3 - 1)^2$.

Solución:

De $a^2 - a + 1 = 0$, multiplicamos por $(a + 1)$:

$$(a + 1)(a^2 - a + 1) = (a + 1) \cdot 0$$

$$a^3 + 1 = 0 \rightarrow a^3 = -1 \rightarrow a^3 - 1 = -2 \rightarrow (a^3 - 1)^2 = 4$$

$\therefore$ El valor de T es 4.

6. Multiplicación de binomios con un término común

$$\begin{aligned} (x + a)(x + b) &= x^2 + (a + b)x + ab \\ (x + a)(x + b)(x + c) &= x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x + abc \end{aligned}$$

7. Cuadrado de un trinomio

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

8. Cubo de un trinomio

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + c) \\ (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc \\ (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ac) - 3abc \end{aligned}$$

Observación: de la primera y tercera identidad se cumple:

$$(a + b)(b + c)(a + c) = (a + b + c)(ab + bc + ac) - abc$$

9. Identidades de Lagrange

$$\begin{aligned}(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 &= (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) \\ (ax + by + cz)^2 + (bx - ay)^2 + (cx - az)^2 + (cy - bz)^2 &= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)\end{aligned}$$

10. Identidades condicionales

Si $a + b + c = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\text{I) } a^2 + b^2 + c^2 &= -2(ab + bc + ac) \\ \text{II) } a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc \\ \text{III) } a^4 + b^4 + c^4 &= 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2} \\ \text{IV) } a^5 + b^5 + c^5 &= -5abc(ab + ac + bc)\end{aligned}$$

11. Otras identidades

$$\begin{aligned}a^4 + a^2 + 1 &= (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \frac{1}{2}(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)\end{aligned}$$

Ejemplo 6:

Si $a^2 + b + c^3 = 0$, halle el valor de $K = \frac{(a^2 + c^3)^3(a^6 + b^3 + c^9)}{4a^2b^4c^3}$, $abc \neq 0$.

Solución:

$$\begin{aligned}\text{Si } a^2 + b + c^3 &= 0 \rightarrow (a^2)^3 + (b)^3 + (c^3)^3 = 3a^2bc^3 \\ &\rightarrow a^6 + b^3 + c^9 = 3a^2bc^3 \\ K &= \frac{(a^2 + c^3)^3(a^6 + b^3 + c^9)}{4a^2b^4c^3} = \frac{(-b)^3 3a^2bc^3}{4a^2b^4c^3} = -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Álgebra

EJERCICIOS

1. En un terreno rectangular de dimensiones $(2m+n+3)$ y $(2m+n-3)$ metros, se reservó una porción de terreno y se sembró lechugas, de tal forma que esta porción también es rectangular y de dimensiones $(2m-n+3)$ y $(2m-n-3)$ metros; .
 $m, n \in \mathbb{R}^+$ Determine la expresión que representa, numéricamente el área de la región restante.

A) $8mn$ B) $4m^2 + n^2$ C) $2mn$ D) $4m + n$

Solución:

El área restante será

$$\begin{aligned} \text{área} &: (2m+n+3)(2m+n-3) - (2m-n+3)(2m-n-3) \\ \Rightarrow \text{área} &: (2m+n)^2 - 9 - [(2m-n)^2 - 9] = 4(2m)(n) = 8mn \end{aligned}$$

Rpta.: A

2. Si $x = \sqrt{17} + \sqrt{2}$ $\wedge$ $y = \sqrt{17} - \sqrt{2}$, halle el valor de
- $$M = \left[\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \right] \left[\frac{(x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2}{8xy} \right]$$

A) $-46\sqrt{17}$ B) $3\sqrt{17}$ C) $-23\sqrt{17}$ D) $56\sqrt{17}$

Solución:

$$I) x = \sqrt{17} + \sqrt{2} \quad \wedge \quad y = \sqrt{17} - \sqrt{2}$$

$$x+y=2\sqrt{17}$$

$$xy=15$$

$$\begin{aligned} II) M &= \left[\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \right] \left[\frac{(x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2}{8xy} \right] = - \left[\frac{x^3 + y^3}{xy} \right] \left[\frac{(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2}{8xy} \right] \\ &= - \left[\frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{xy} \right] \left[\frac{4x^2y^2}{8xy} \right] = - \left[\frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{2} \right] \\ &= - \left[\frac{(2\sqrt{17})^3 - 3(15)(2\sqrt{17})}{2} \right] = -23\sqrt{17} \end{aligned}$$

Rpta.: C

3. El señor Juan acude al odontólogo de un centro de salud, el odontólogo observa que el señor Juan tiene una dentadura completa como corresponde a un adulto y que solo un diente tiene caries.

Si $G = \sqrt{\frac{(d^2 - 3d - 1)(d^2 + 3d - 1) + (d^2 + 3)^2 - (d^2 - 3)^2}{(d^2 - d + 1)}} + d$; $d \in \mathbb{Z}^+$ representa el

número de dientes sanos, ¿cuánto pagará por la curación del diente cariado si el pagó es $(2d - 10)$ soles?

(Considere que un adulto tiene normalmente 32 dientes).

- A) 46 soles B) 40 soles C) 52 soles D) 50 soles

Solución:

$$G = \sqrt{\frac{(d^2 - 3d - 1)(d^2 + 3d - 1) + (d^2 + 3)^2 - (d^2 - 3)^2}{(d^2 - d + 1)}} + d$$

$$= \sqrt{\frac{((d^2 - 1) - 3d)((d^2 - 1) + 3d) + 4d^2(3)}{(d^2 - d + 1)}} + d$$

$$= \sqrt{\frac{(d^2 - 1)^2 - 9d^2 + 12d^2}{(d^2 - d + 1)}} + d = \sqrt{\frac{d^4 + d^2 + 1}{(d^2 - d + 1)}} + d$$

$$= \sqrt{d^2 + d + 1} + d = d + 1 = 31 \Rightarrow d = 30 \Rightarrow 2d - 10 = 50$$

$\therefore$ Pagará por la curación del diente cariado 50 soles

Rpta.: D

4. El área de un cuadrado, cuyo lado mide $(x+1)$ cm, es 2 cm^2 , entonces el área de un rectángulo cuyas dimensiones miden

$(x+3)(x+9)(7-x)$ y $\frac{(x-1)(x-2)(x+4)}{31}$ cm, será:

- A) 14 cm^2 B) 42 cm^2 C) 28 cm^2 D) 32 cm^2

Solución:

$$I) (x+1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x = 1$$

$$II) \text{Área del rectángulo} = (x+3)(x+9)(7-x) \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x+4)}{31}$$

$$= - \frac{[(x+3)(x-1)][(x+4)(x-2)][(x+9)(x-7)]}{31}$$

$$= - \frac{[(x^2 + 2x) - 3][(x^2 + 2x) - 8][(x^2 + 2x) - 63]}{31}$$

$$= - \frac{[-2][-7][-62]}{31} = 28$$

∴ El área del rectángulo es 28 cm²

Rpta.: C

5. Si $a+b=2-c$, halle el valor de $S = \frac{8-6abc}{a^3+b^3+c^3-3(a^2+b^2+c^2)} + \frac{a+c}{2-b}$.

A)

B) -3

C) -1

D) 0

Solución:

Si $a+b=2-c$

$$*) a+c=2-b \Rightarrow \frac{a+c}{2-b} = 1$$

$$**) a+b+c=2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=4..(i)$$

Por otro lado $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

$$a^3+b^3+c^3+2(ab+bc+ac)-2(a^2+b^2+c^2)=3abc...(ii)$$

$$(ii) - (i) a^3+b^3+c^3-3(a^2+b^2+c^2)=3abc-4$$

Luego

$$S = \frac{8 - 6abc}{a^3 + b^3 + c^3 - 3(a^2 + b^2 + c^2)} + \frac{a + c}{2 - b} = \frac{-2(3abc - 4)}{3abc - 4} + 1 = -1$$

Rpta.: C

6. Sean a , b y c números reales no nulos, de modo que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, halle el valor de

$$T = \frac{ab}{c^2} + \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right) + \frac{ac}{b^2} + \frac{bc}{a^2}.$$

- A) -2 B) 1 C) 5 D) 3

Solución:

$$\begin{aligned} \text{I) } T &= \left[\frac{ab}{c^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{bc}{a^2} \right] + \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right) \\ &= \left[\frac{a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3}{a^2b^2c^2} \right] + \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{abc} \right) \end{aligned}$$

Además

$$\text{I) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow ab + bc + ac = 0$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = -2abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3 = 3a^2b^2c^2$$

$$\text{I) } T = \left[\frac{3a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2} \right] + \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{-2abc(a+b+c)}{abc} \right) = 1$$

Rpta.: B

7. Sonia organiza una fiesta y cuenta con $(3a)$ soles inicialmente, de los cuales gasta b soles en chocolates y c soles en helados, quedándole 5 soles, monto equivalente al precio de un cupcake. Si N representa la cantidad de cupcakes que necesita comprar, determine el dinero que le falta a Sonia para comprar los N cupcakes, sabiendo que

$$N = \frac{50[27a^3 - b^3 - (c+5)^3]}{(3a-b)ab(3a-b-c)^2}$$

- A) 75 soles B) 90 soles C) 65 soles D) 85 soles

Solución:

$$3a - b - c = 5 \rightarrow 3a - b - (c+5) = 0$$

Por Identidades Condicionales

$$27a^3 - b^3 - (c+5)^3 = 3(3a)(-b)(-(c+5))$$

$$27a^3 - b^3 - (c+5)^3 = 9ab(c+5)$$

Luego

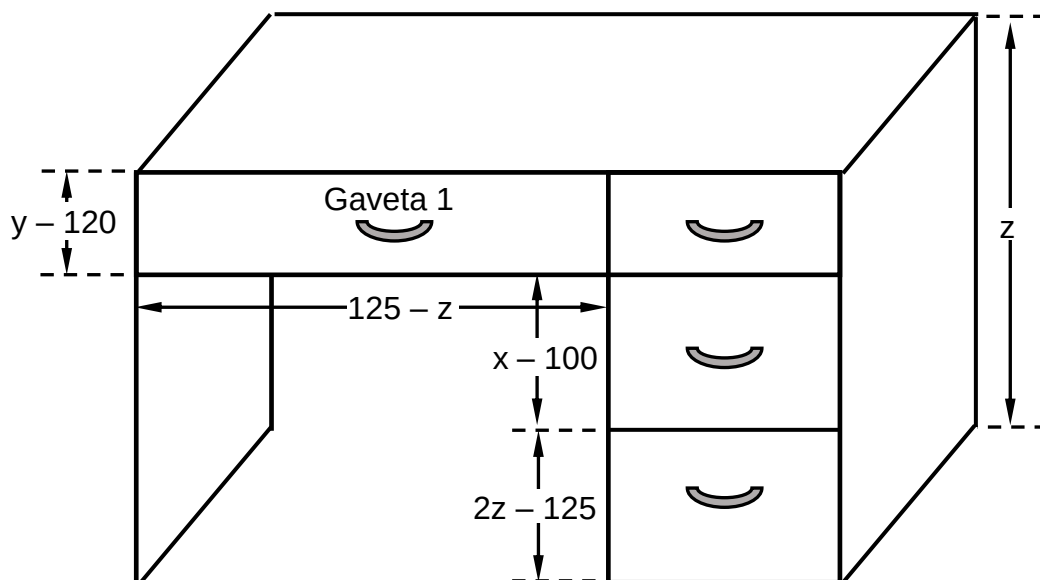
$$N = \frac{50[27a^3 - b^3 - (c+5)^3]}{(3a-b)ab(3a-b-c)^2} = \frac{50[9ab(c+5)]}{(c+5)ab5^2} = 18$$

Necesita comprar 18 cupcakes

Le falta: $18(5) - 5 = 85$ soles

Rpta.: D

8. Miguel contrata a un carpintero para que le fabrique un escritorio de madera con 4 gavetas, cuyas medidas (en cm) se puede observar en el dibujo



Si la otra medida de la gaveta 1 es $(x - 100)$ cm y el producto de los valores numéricos de las medidas de dicha gaveta es 26 620, determine cuánto pagó Miguel

por el escritorio, si el monto fue de $\left| \frac{(x-100)^3 + (y-120)^3 + (z-125)^3}{55} \right|$ soles.

- A) 1452 soles B) 1450 soles C) 1252 soles D) 1250 soles

Solución:

Del dibujo se tiene

$$(x-100) + (y-120) + (2z-125) = z$$

$$(x-100) + (y-120) + (z-125) = 0$$

$$\Rightarrow (x-100)^3 + (y-120)^3 + (z-125)^3 = 3(x-100)(y-120)(z-125)$$

$$= -3(x-100)(y-120)(125-z)$$

$$\text{Por dato: } (x-100)(y-120)(125-z) = 26\,620$$

$$\Rightarrow (x-100)^3 + (y-120)^3 + (z-125)^3 = -3(26\,620)$$

$$\left| \frac{(x-100)^3 + (y-120)^3 + (z-125)^3}{55} \right| = \left| \frac{-3(26\,620)}{55} \right| = 1452$$

Por lo tanto, el monto fue de 1452 soles.

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine la expresión que se obtiene al simplificar
- $$M = \left[(x+y)^2 - (x-y)^2 \right] \left[(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2 \right] \left[(x^3+y^3)^2 - (x^3-y^3)^2 \right] \dots \left[(x^n+y^n)^2 - (x^n-y^n)^2 \right]$$

A) $(4xy)^n$ B) $(4xy)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ C) $\left(4(xy)^{\frac{n+1}{2}} \right)^n$ D) $(4xy)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Solución:

$$\begin{aligned} M &= \left[(x+y)^2 - (x-y)^2 \right] \left[(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2 \right] \left[(x^3+y^3)^2 - (x^3-y^3)^2 \right] \dots \left[(x^n+y^n)^2 - (x^n-y^n)^2 \right] \\ &= (4xy)(4x^2y^2)(4x^3y^3) \dots (4x^ny^n) = \left(4(xy)^{\frac{(n+1)}{2}} \right)^n \end{aligned}$$

Rpta.: C

2. La empresa "Bebidas SAC" produce dos tipos de gaseosas: "Gaseosón" y "Gaseosín", cuyos costos de producción en soles son, respectivamente, $C_1(q) = 0.5q^3 - 2q^2 + 40q - 80$; $q > 3$ y $C_2(q) = 7q^2 - 14q + 28$, debe ser $-14q$ donde "q" representa la cantidad de gaseosas producidas en decenas de cada tipo. Determine el costo de producción de gaseosas "Gaseosón" cuando este es igual al costo de producción de "Gaseosín", para una cierta cantidad de producción de gaseosas de cada tipo.

A) 136 soles B) 242 soles C) 286 soles D) 196 soles

Solución:

Se tiene

$$C_1(q) = C_2(q) \Rightarrow 0.5q^3 - 2q^2 + 40q - 80 = 7q^2 - 14q + 28$$

$$\Rightarrow 0 \Rightarrow 0.5q^3 - 9q^2 + 54q - 108 \Rightarrow q^3 - 18q^2 + 108q - 216 = 0$$

$$\Rightarrow (q - 6)^3 = 0 \Rightarrow q = 6$$

$$C_1(6) = 0.5(6)^3 - 2(6)^2 + 40(6) - 80 = 196$$

∴ El costo de producción de gaseosas "Gaseosón" cuando los costos de producción de cada tipo son iguales es 196 soles

Rpta.: D

3. Jesús compró para su hijo una consola PlayStation 4, para pagarlo en tres meses a una tasa de interés del 2% mensual.

Si el precio al contado de la consola PlayStation 4 fue de (5S) cientos de soles,

donde $S = \frac{m^3 + n^3}{(m^2 + n^2)}$; $m + n = 4$ y $mn = 3$. ¿Cuánto pagó en total Jesús al cabo

de tres meses por la compra de la consola PlayStation 4?

- A) 1474 soles B) 1484 soles C) 1848 soles D) 1744 soles

Solución:

$$S = \frac{m^3 + n^3}{(m^2 + n^2)} = \frac{(m+n)^3 - 3mn(m+n)}{(m+n)^2 - 2mn} = \frac{4^3 - 3(3)(4)}{(4)^2 - 2(3)} = \frac{14}{5} \rightarrow 5S = 14$$

Luego el precio inicial era: 1400 soles

Interés del 2% mensual

$$2\%(1400) = 28 \text{ soles}$$

Interés del 2% por 3 meses: $3(28) = 84$ soles

Por lo tanto el precio final $1400 + 84 = 1484$ soles

Rpta.: B

4. Si los catetos de un triángulo rectángulo miden $(\sqrt[3]{100} + 1 - \sqrt[6]{100})$ cm y $(\sqrt[3]{640} + 4)$ cm, calcule el área de dicho triángulo.

- A) 22 cm² B) 20 cm² C) 11 cm² D) 44 cm²

Solución:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{(\sqrt[3]{100} + 1 - \sqrt[6]{100})(\sqrt[3]{640} + 4)}{2}$$

$$= \frac{4(\sqrt[3]{10} + 1)(\sqrt[3]{10}^2 - \sqrt[3]{10} + 1)}{2}$$

$$= \frac{4(\sqrt[3]{10}^3 + 1)}{2} = 22$$

$$\therefore \text{Área del triángulo} = 22\text{cm}^2$$

Rpta.: A

5. Si $x + y + z = 3k$, $k > 0$, simplifique

$$S = \frac{(k - z) \sqrt{3 \left[9(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y - 2z)^2 - (x - 2y + z)^2 - (y + z - 2x)^2 \right]}}{(x + y - 2k)}$$

A) 6k

B) 8k

C) 3k

D) 9k

Solución:

$$S = \frac{(k - z) \sqrt{3 \left[9(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y - 2z)^2 - (x - 2y + z)^2 - (y + z - 2x)^2 \right]}}{(x + y - 2k)}$$

$$\text{I) } x + y + z = 3k \Rightarrow x + y - 2k = k - z$$

$$S = \sqrt{3 \left[9(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y - 2z)^2 - (x - 2y + z)^2 - (y + z - 2x)^2 \right]}$$

$$\text{II) Además si } x + y + z = 3k$$

$$\Rightarrow x + y - 2z = 3(k - z) \Rightarrow (x + y - 2z)^2 = 9k^2 - 18kz + 9z^2$$

$$\Rightarrow x - 2y + z = 3(k - y) \Rightarrow (x - 2y + z)^2 = 9k^2 - 18ky + 9y^2$$

$$\Rightarrow y + z - 2x = 3(k - x) \Rightarrow (y + z - 2x)^2 = 9k^2 - 18kx + 9x^2$$

$$(x + y - 2z)^2 + (x - 2y + z)^2 + (y + z - 2x)^2 = 27k^2 - 18k(x + y + z) + 9(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$9(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y - 2z)^2 - (x - 2y + z)^2 - (y + z - 2x)^2 = 18k(3k) - 27k^2 = 27k^2$$

$$\text{II) } S = \sqrt{3 \left[27k^2 \right]} = 9k$$

Rpta.: D

6. Si la suma de las inversas de los números reales no nulos, (ab) , (bc) y (ac) es igual a la unidad, indique que enunciados son correctos:

- I) $a + b = c(ab - 1)$
 II) $a^3 + b^3 + c^3 - a^3b^3c^3 = -3(a+b)(b+c)(a+c)$.
 III) $a^2(1 - b^2c^2) + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$

A) Solo I B) Todos C) I y II D) Solo III

Solución:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = 1 \Rightarrow a + b + c = abc \dots (*)$$

I) $a + b = c(ab - 1) \dots$ correcto

II) De (*) $(a + b + c)^3 = a^3b^3c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c) = a^3b^3c^3$
 $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - a^3b^3c^3 = -3(a+b)(b+c)(a+c) \dots$ correcto

III) De (*) $(a + b + c)^2 = a^2b^2c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = a^2b^2c^2$
 $\Rightarrow a^2(1 - b^2c^2) + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac) \dots$ correcto

$\therefore$ Todos son correctos.

Rpta.: B

7. Si a, b y c reales diferentes de cero tal que $a + b + c = 0$, simplifique

$$T = \frac{\sqrt{\frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}{ab+ac+bc} + \left[\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right]^3 - 16}}{(a+b)(a^2+b^2-c^2) + (b+c)(b^2+c^2-a^2) + (c+a)(c^2+a^2-b^2) - (a^3+b^3+c^3)}.$$

A) $ab + ac + bc$ B) abc C) $a^2 + b^2 + c^2$ D) $\frac{1}{abc}$

Solución:

I) $a + b + c = 0$

$$\Rightarrow a + b = -c \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$$

$$\Rightarrow b + c = -a \Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = -2bc$$

$$\Rightarrow a + c = -b \Rightarrow a^2 + c^2 + 2ac = b^2 \Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = -2ac$$

$$\begin{aligned}
 \text{II) } T &= \frac{\sqrt{\frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}{ab+ac+bc}} + \left[\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \right]^3 - 16}{(a+b)(a^2+b^2-c^2) + (b+c)(b^2+c^2-a^2) + (c+a)(c^2+a^2-b^2) - (a^3+b^3+c^3)} \\
 &= \frac{\sqrt{\frac{(-c)^2 + (-a)^2 + (-b)^2}{ab+ac+bc}} + \left[\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \right]^3 - 16}{(-c)(-2ab) + (-a)(-2bc) + (-b)(-2ca) - (a^3+b^3+c^3)} \\
 &= \frac{\sqrt{\frac{-2(ab+ac+bc)}{ab+ac+bc}} + \left[\frac{3abc}{abc} \right]^3 - 16}{6abc - (3abc)} = \frac{3}{3abc} = \frac{1}{abc}
 \end{aligned}$$

Rpta.: D

8. Si $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, simplifique la expresión

$$M = \frac{(x^2-1)\left[(x^2-1)^2 - y^2z^2 + y^2 + z^2 - 1\right] + (y-1)^3(y+1)^3 + (z^2-1)^3}{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1} + 4; \quad x, y \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

A) $2(z^2 + 1)$

B) $2z^2 - 2$

C) $z^2 + 3$

D) $z^2 + 4$

Solución:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{(x^2-1)\left[(x^2-1)^2 - y^2z^2 + y^2 + z^2 - 1\right] + (y-1)^3(y+1)^3 + (z^2-1)^3}{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1} + 4 \\
 &= \frac{(x^2-1)\left[(x^2-1)^2 - (z^2-1)(y^2-1)\right] + (y^2-1)^3 + (z^2-1)^3}{(x^2-1)(y^2-1)} + 4 \\
 &= \frac{(x^2-1)^3 + (y^2-1)^3 + (z^2-1)^3 - (x^2-1)(z^2-1)(y^2-1)}{(x^2-1)(y^2-1)} + 4
 \end{aligned}$$

Además si

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \Rightarrow (x^2-1) + (y^2-1) + (z^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)^3 + (y^2-1)^3 + (z^2-1)^3 = 3(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)$$

$$M = \frac{3(x^2-1)(z^2-1)(y^2-1) - (x^2-1)(z^2-1)(y^2-1)}{(x^2-1)(y^2-1)} + 4 = 2(z^2-1) + 4 = 2(z^2+1)$$

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. La suma de los cuadrados de tres números reales positivos es 494 y uno de esos números es igual a la suma de los otros dos. Si la diferencia entre los dos menores números es 4, ¿cuál es la diferencia de los cubos de estos números?

A) 984 B) 944 C) 988 D) 980

Solución:

Sean a , b y c números reales positivos, de modo que $a < b < c$ y $c = a + b$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 494 \rightarrow a^2 + b^2 + (a+b)^2 = 494$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 = 494$$

$$\rightarrow 2(a^2 + ab + b^2) = 494$$

$$\rightarrow a^2 + ab + b^2 = 247$$

Luego,

$$b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2) = (4)(247) = 988.$$

$\therefore$ La diferencia de los cubos de los dos menores números es 988.

Rpta.: C

2. Marco desea calcular el área determinada por un cuadrado cuya medida de su lado, en cm, está dada por $(3a + 2b)^{\frac{3}{2}}$; sin embargo, al momento de realizar los cálculos, consideró que la medida del lado de dicho cuadrado era igual a $(3a - 2b)^{\frac{3}{2}}$ cm, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}^+$. Indique la expresión, en cm^2 , que representa el error cometido por Marco al calcular el área determinada por el cuadrado.

A) $4a(27b^2 + 4a^2)$ B) $4(16b^2 + 27a^2)$
 C) $4b(27a^2 + 4b^2)$ D) $4ab(b^2 + a^2)$

Solución:

$$\text{Error cometido} = E(a, b) = \left[(3a + 2b)^{\frac{3}{2}} \right]^2 - \left[(3a - 2b)^{\frac{3}{2}} \right]^2$$

$$\rightarrow \text{Error cometido} = (3a + 2b)^3 - (3a - 2b)^3$$

$$\rightarrow \text{Error cometido} = (3a + 2b)^3 - (3a - 2b)^3$$

$$\rightarrow \text{Error cometido} = \cancel{27a^3} + 54a^2b + \cancel{36ab^2} + 8b^3 - (\cancel{27a^3} - 54a^2b + \cancel{36ab^2} - 8b^3)$$

$$\rightarrow \text{Error cometido} = 108a^2b + 16b^3 = 4b(27a^2 + 4b^2)$$

∴ La expresión, en cm^2 , que representa dicho error es $4b(27a^2 + 4b^2)$.

Rpta.: C

3. Si $m = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1$ y $n = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$, calcule el valor de $K = \left(1 + \frac{2}{m}\right)^3 - \left(1 - \frac{3}{n}\right)^3$.

A) 5

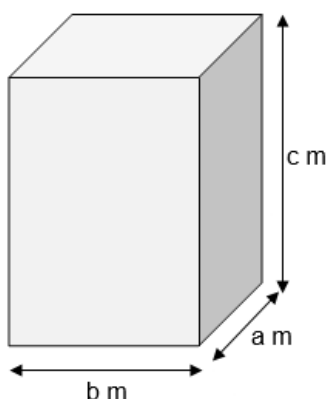
B) 1

C) 4

D) 6

Solución:

i) Multiplicando en



$$m = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1 \quad \dots(1)$$

$$n = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1 \quad \dots(2)$$

(1) por $(\sqrt[3]{3} - 1)$, se tiene

$$m(\sqrt[3]{3} - 1) = (\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) \rightarrow \frac{2}{m} + 1 = \sqrt[3]{3}$$

ii) Multiplicando en (2) por $(\sqrt[3]{2} + 1)$, se tiene

$$n(\sqrt[3]{2} + 1) = (\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1) \rightarrow \frac{3}{n} - 1 = \sqrt[3]{2}$$

$$\rightarrow K = \left(1 + \frac{2}{m}\right)^3 - \left(1 - \frac{3}{n}\right)^3 = (\sqrt[3]{3})^3 - (-\sqrt[3]{2})^3 = 3 + 2 = 5$$

∴ El valor de K es 5.

Rpta.: A

4. En la figura, se muestra una caja en forma de paralelepípedo rectangular. Si la medida de su diagonal, en metros, está representada por

$$d = \sqrt{2a^2 - 22c + 2b^2 - 10a + 2c^2 - 18b + 227},$$

calcule el valor de $K = \frac{S_T}{p}$, donde $\begin{cases} S_T : \text{Valor numérico del área total de la caja.} \\ p : \text{Valor numérico del perímetro de la base de la caja.} \end{cases}$

A) $\frac{199}{21}$

B) $\frac{199}{7}$

C) $\frac{189}{8}$

D) $\frac{199}{14}$

Solución:

Se sabe que la longitud de la diagonal del paralelepípedo está dada por

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Pero

$$d = \sqrt{2a^2 - 22c + 2b^2 - 10a + 2c^2 - 18b + 227}$$

$$\rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2a^2 - 22c + 2b^2 - 10a + 2c^2 - 18b + 227}$$

Ordenando y agrupando convenientemente

$$\rightarrow (a^2 - 10a + 25) + (b^2 - 18b + 81) + (c^2 - 22c + 121) = 0$$

$$\rightarrow (a - 5)^2 + (b - 9)^2 + (c - 11)^2 = 0$$

$$\rightarrow a = 5 \wedge b = 9 \wedge c = 11$$

Luego,

$$\text{Área de la caja} = 2(ab + bc + ac) = 2(5 \cdot 9 + 9 \cdot 11 + 5 \cdot 11) = 398 \text{ m}^2$$

$$\text{Perímetro} = 2(a + b) = 2(5 + 9) = 28 \text{ m}$$

$$K = \frac{S_T}{p} = \frac{398}{28} = \frac{199}{14}$$

$$\therefore \text{El valor de K es } \frac{199}{14}.$$

Rpta.: D

5. La empresa DLima fabrica cierto artículo exclusivo. El gerente de ventas de dicha empresa estima que el costo total, en dólares, de producir a artículos al mes está modelado por $C(a) = 245a$. Si el ingreso mensual, en dólares, por vender todos los artículos producidos mensualmente está dado por $I(a) = 75a^2 + 120a + a^4 - 15a^3$, ¿cuántos artículos se deben producir y vender para que DLima no gane ni pierda?

A) 3

B) 4

C) 6

D) 5

Solución:

Se sabe que

$$\boxed{\text{Utilidad} = \text{Ingreso} - \text{Costo total}}$$

$$\rightarrow U(a) = a^4 - 15a^3 + 75a^2 + 120a - 245a$$

$$\rightarrow U(a) = a^4 - 15a^3 + 75a^2 - 125a, \quad a \in \mathbb{Z}^+$$

Si $U(a) = 0$, entonces la fábrica no gana ni pierde

$$\rightarrow 0 = a(a^3 - 15a^2 + 75a - 125) \rightarrow (a-5)^3 = 0$$

$$\rightarrow a = 5$$

$\therefore$ Para que la empresa no gane ni pierda debe producir y vender 5 artículos.

Rpta.: D

6. Sean a , b y c números reales, de modo que $a+b+c=1$ y $ab+bc+ac=\frac{1}{3}$. Halle el

$$\text{valor de } T = \frac{6a+6b+6c-27abc(9a^2+9b^2+9c^2)}{\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}\right)^3}.$$

A) $\frac{1}{3}$

B) 1

C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{1}{27}$

Solución:

Sean $\{a,b,c\} \subset \mathbb{R}^+$

$$a+b+c=1 \rightarrow (a+b+c)^2=1$$

$$\rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=1$$

Pero

$$3(ab+bc+ac)=1 \rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=3(ab+bc+ac)$$

$$\rightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac \rightarrow a=b=c$$

$$\rightarrow T = \frac{6a+6b+6c-27abc(9a^2+9b^2+9c^2)}{\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}\right)^3} = \frac{1}{9}$$

$\therefore$ El valor de T es $\frac{1}{9}$.

Rpta.: C

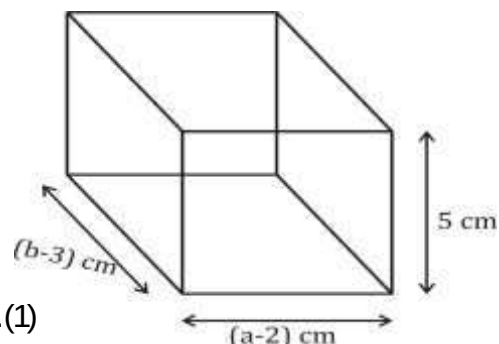
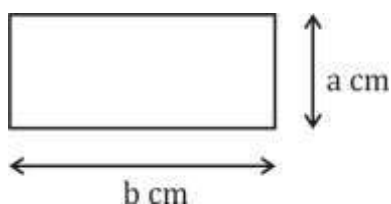
7. Kittzay, con una cuerda, delimita una región rectangular, cuyas medidas, en centímetros, están dadas por a y b ($a < b$). Luego, con un pedazo de alambre ella construye un paralelepípedo rectangular de 5 cm de altura, cuyas longitudes de sus aristas básicas miden dos y tres centímetros menos, respectivamente, de las dimensiones a y b de la región rectangular. Si el volumen de dicho paralelepípedo es 25 cm^3 y el perímetro de la región rectangular es 20 cm, ¿cuál es el valor numérico de $(a-2)^2 + (b-3)^2$?

A) 20

B) 15

C) 25

D) 35

Solución:

$$\text{Perímetro}_{\square} = 2a + 2b = 20 \rightarrow a + b = 10 \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} \text{Volumen}_{\text{Paralelepípedo}} &= (a-2)(b-3)(5) = 25 \\ &\rightarrow (a-2)(b-3) = 5 \quad \dots(2) \end{aligned}$$

De (1):

$$\begin{aligned} (a-2) + (b-3) + (-5) &= 0 \\ \rightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 + (-5)^2 &= -2[(a-2)(b-3) + (a-2)(-5) + (b-3)(-5)] \\ \rightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 + (-5)^2 &= -2[(5) + (-5)(a-2+b-3)] \\ \rightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 + (-5)^2 &= -2[(5) + (-5)(5)] \\ \rightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 &= 15. \\ \therefore \text{El valor numérico de } (a-2)^2 + (b-3)^2 &\text{ es } 15. \end{aligned}$$

Rpta.: B

8. Si $x - y = z$, calcule el valor de $T = \frac{75(x^2 + y^2 + z^2)(y + z)y(x - y)}{(x^2 - yz)(x^3 - y^3 - z^3)}$, $xyz \neq 0$.

A) 20

B) 50

C) 25

D) 40

Solución:

$$\text{De } x - y = z \rightarrow x + (-y) + (-z) = 0 \rightarrow x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz$$

$$\text{También } x^2 + y^2 + z^2 = -2(-xy - xz + yz)$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2[-x(y + z) + yz], \text{ Pero } x = y + z$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2[-x(x) + yz] = -2(-x^2 + yz)$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2(x^2 - yz)$$

Luego,

$$T = \frac{75.2 \cancel{(x^2 - yz)} (y+z)y(x-y)}{\cancel{(x^2 - yz)} (x^3 - y^3 - z^3)} = \frac{50xyz}{xyz} = 50$$

∴ El valor de T es 50.

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $\frac{[(a+1)^2 - (a-1)^2][(a+1)^4 - (a-1)^4]}{a(a+2)(a-2)(a^2+1)} = 8$, calcule el valor de $W = a^4 + 256a^{-4} - 32$.

- A) 2^5 B) 2^7 C) 2^8 D) 2^9

Solución:

$$\text{Como } (a+1)^4 - (a-1)^4 = 8a(a^2+1) \rightarrow \frac{[(a+1)^2 - (a-1)^2] \cancel{[(a+1)^4 - (a-1)^4]}}{(a+2)(a-2) \cancel{8a(a^2+1)}} = 1$$

$$\rightarrow \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2}{(a+2)(a-2)} = 1 \rightarrow \frac{4a}{a^2 - 4} = 1 \rightarrow a^2 - 4 = 4a \rightarrow a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(\div a) \rightarrow a - \frac{4}{a} = 4$$

$$\text{Al cuadrado} \rightarrow \left(a - \frac{4}{a}\right)^2 = (4)^2 \rightarrow a^2 - 2\left(\cancel{a}\right)\left(\frac{4}{\cancel{a}}\right) + \frac{16}{a^2} = 16 \rightarrow a^2 + \frac{16}{a^2} = 24$$

$$\text{Al cuadrado} \rightarrow \left(a^2 + \frac{16}{a^2}\right)^2 = (24)^2 \rightarrow a^4 + \frac{16}{a^4} = 544$$

∴ El valor de W es 2^9 .

Rpta.: D

2. Si $a + \sqrt[3]{3} = 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{3}}$, entonces el valor de $L = a^3 - 3a^2 + 12a - 16$ es

- A) $\sqrt[3]{3}$. B) 1. C) 2. D) 0.

Solución:

$$\text{De } a + \sqrt[3]{3} = 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{3}} \rightarrow a - 1 = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt[3]{3}$$

Elevando al cubo, se tiene

$$\rightarrow (a-1)^3 = \left(\frac{3}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt[3]{3} \right)^3$$

$$\rightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 9 - 3 - 3(3)(a-1)$$

$$\rightarrow a^3 - 3a^2 + 12a - 16 = 0$$

$\therefore$ El valor de L es 0.

Rpta.: D

3. Para todo número entero positivo w se define la expresión

$$p(w) = \frac{4w + \sqrt{4w^2 - 1}}{\sqrt{2w+1} + \sqrt{2w-1}}.$$

Calcule el valor de $K = p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(12)$.

A) 124

B) 68

C) 62

D) 72

Solución:

$$p(w) = \frac{4w + \sqrt{4w^2 - 1}}{\sqrt{2w+1} + \sqrt{2w-1}}$$

Racionalizando el denominador

$$p(w) = \left(\frac{4w + \sqrt{4w^2 - 1}}{\sqrt{2w+1} + \sqrt{2w-1}} \right) \left(\frac{\sqrt{2w+1} - \sqrt{2w-1}}{\sqrt{2w+1} - \sqrt{2w-1}} \right)$$

$$p(w) = \frac{\left[(\sqrt{2w+1})^2 + (\sqrt{2w-1})^2 + \sqrt{(2w+1)(2w-1)} \right] (\sqrt{2w+1} - \sqrt{2w-1})}{(2w+1) - (2w-1)}$$

Sean $a = \sqrt{2w+1}$, $b = \sqrt{2w-1}$

$$\rightarrow p(w) = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 - b^2} = \frac{a^3 - b^3}{2}$$

$$\rightarrow p(w) = \frac{(\sqrt{2w+1})^3 - (\sqrt{2w-1})^3}{2}$$

Luego, $K = p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(12)$

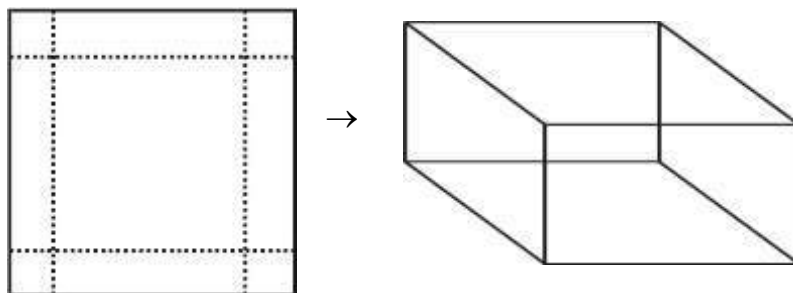
$$\rightarrow K = \frac{\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{1} \right) + \left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3} \right) + \dots + \left(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{23} \right)}{2} = \frac{125 - 1}{2} = 62$$

$\therefore$ El valor de K es 62.

Rpta.: C

4. Con una pieza cuadrada de metal de x cm de lado, se requiere construir una caja de base cuadrada sin tapa, cortando en cada esquina un cuadrado de 4 cm de lado y doblando por las líneas puntuadas hacia arriba. Si el volumen de la caja, en cm^3 , está representado por $(x^3 - 23x^2 + 179x - 473)$, calcule la medida del lado de la pieza cuadrada de metal original.

- A) 8 cm
B) 9,6 cm
C) 8,2 cm
D) 9 cm



Solución:

De la figura

$$V_{\text{caja}} = 4(x-8)^2$$

Pero

$$V_{\text{caja}} = x^3 - 23x^2 + 179x - 473$$

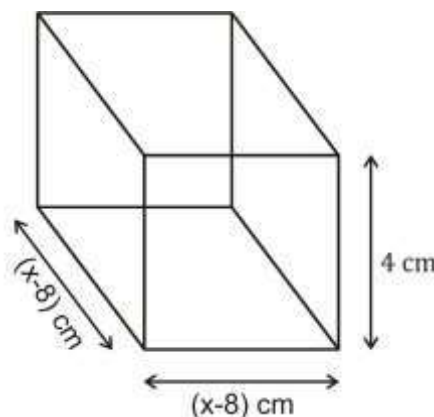
Luego,

$$4(x-8)^2 = x^3 - 23x^2 + 179x - 473$$

$$\rightarrow 4x^2 - 64x + 256 = x^3 - 23x^2 + 179x - 473$$

$$\rightarrow 0 = x^3 - 27x^2 + 243x - 729 \rightarrow 0 = (x-9)^3 \rightarrow x = 9$$

$\therefore$ El lado de la pieza cuadrada de metal original es 9 cm.



Rpta. D

5. Sean a , b y c números reales no nulos, de modo que $(ab)^{-1} + (bc)^{-1} + (ac)^{-1} = 1$.

Determine el valor de $K = \frac{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}}{a(bc)^{-1} + b(ac)^{-1} + c(ab)^{-1} - abc}$.

- A) 0,25 B) - 0,5 C) 1 D) - 0,25

Solución:

$$\text{De } (ab)^{-1} + (bc)^{-1} + (ac)^{-1} = 1 \rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = 1 \rightarrow a + b + c = abc \quad \dots(1)$$

Elevando al cuadrado en (1), se tiene

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = a^2b^2c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - a^2b^2c^2 = -2(ab + bc + ac) \quad \dots(2)$$

Luego,

$$K = \frac{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}}{a(bc)^{-1} + b(ac)^{-1} + c(ab)^{-1} - abc} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} - abc} = \frac{ab + bc + ac}{a^2 + b^2 + c^2 - a^2b^2c^2}$$

Reemplazando (2) en K, se tiene

$$K = \frac{ab + bc + ac}{a^2 + b^2 + c^2 - a^2b^2c^2} = \frac{\cancel{ab + bc + ac}}{-2(\cancel{ab + bc + ac})} = -0,5.$$

∴ El valor de K es $-0,5$.

Rpta.: B

6. La cantidad de aulas que se disponía para una olimpiada de matemática estaba representada por $(x+y)$, de modo que por cada aula había y filas de x asientos individuales. Además, se sabe que la cantidad total de estudiantes que participaron en dicha olimpiada estaba representada por $(x^3 + y^3)$, ocupando el total de asientos disponibles por cada aula. Si, en total, se ocuparon todas las $(x+y)$ aulas y hubo 25 asientos individuales por aula, ¿cuántos estudiantes participaron en dicha olimpiada?

- A) 450 B) 325 C) 500 D) 250

Solución:

Nº de asientos por aula = $xy = 25$

Nº de aula = $x + y$

Luego, el total de asientos de las $(x+y)$ aulas es $(x^3 + y^3) = xy(x+y)$

$$\text{De } (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) \rightarrow (x+y)^3 = xy(x+y) + 3xy(x+y) = 4xy(x+y)$$

$$\rightarrow (x+y)^2 = 4(25) \rightarrow x+y = 10$$

∴ Participaron 250 estudiantes en dicha olimpiada.

Rpta.: D

7. Si $a + b^2 + c = 8(b-2) + 5$, determine el valor de

$$T = \left(\frac{(a-5)^3 + (b-4)^6 + c^3}{(ac-5c)(b-4)} \right) - 3b, \quad a \neq 5, b \neq 4, c \neq 0.$$

- A) -12 B) 7 C) 5 D) -9

Solución:

$$\text{De } a+b^2+c=8(b-2)+5 \rightarrow (a-5)+(b^2-8b+16)+(c)=0$$

$$\rightarrow (a-5)+(b-4)^2+(c)=0$$

$$\rightarrow (a-5)^3+(b-4)^6+(c)^3=3(a-5)(b-4)^2(c)$$

Luego,

$$T = \left(\frac{3(a-5)(b-4)^2(c)}{(c)(a-5)(b-4)} \right) - 3b$$

$$T = 3(b-4) - 3b = -12.$$

∴ El valor de T es -12.

Rpta.: A

8. Sean a, b y c números reales, de modo que $a^3=1-4b-4c$, $b^3=1-4c-4a$ y $c^3=1-4a-4b$, con $a \neq b \neq c$. Halle el valor de $(a^5+b^5+c^5)$.

A) 20

B) 15

C) 10

D) 25

Solución:

$$\text{De } a^3=1-4b-4c \text{ y } b^3=1-4c-4a \rightarrow a^3-b^3=4(a-b), a \neq b$$

$$\rightarrow a^2+ab+b^2=4 \quad \dots(1)$$

Análogamente

$$\rightarrow b^2+bc+c^2=4 \quad \dots(2)$$

$$\rightarrow c^2+ac+a^2=4 \quad \dots(3)$$

De (1) - (2):

$$\rightarrow (a-c)(a+b+c)=0 \rightarrow a+b+c=0$$

$$\text{Haciendo } (1)+(2)+(3): 2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ac)=12 \rightarrow ab+bc+ac=-4$$

$$\text{También } a^3+b^3+c^3=3-8(a+b+c)=3=3abc \rightarrow abc=1$$

$$\text{Luego, como } a+b+c=0 \text{ entonces } a^5+b^5+c^5=-5abc(ab+bc+ac)$$

$$\rightarrow a^5+b^5+c^5=-5abc(ab+bc+ac)=-5(1)(-4)=20.$$

∴ El valor de $(a^5+b^5+c^5)$ es 20.

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si $p(x) = 2x^2 + 4x + 10$ es idéntico a $q(x) = (x+m)^2 + (x+n)^2$, halle el menor valor de $(m-n)$.

A) 4 B) -3 C) 2 D) -4 E) 6

Solución:

$$\begin{aligned} p(x) = 2x^2 + 4x + 10 &= (x+m)^2 + (x+n)^2 = q(x) \\ &= 2x^2 + 2(m+n)x + (m^2 + n^2) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} m+n=2 & \dots(1) \\ m^2+n^2=10 & \dots(2) \end{cases}$$

$$\text{De (1): } 4 = (m+n)^2 = \underbrace{m^2+n^2}_{10} + 2mn, \text{ entonces } mn = -3$$

$$\text{Luego } (m-n)^2 = m^2 + n^2 - 2mn = 10 - 2(-3) = 16$$

$$\rightarrow m-n=4 \quad \vee \quad m-n=-4$$

$\therefore$ El menor valor de $(m-n)$ es -4 .

Rpta.: D

2. Sean a , b y c números reales. Si $a+b+c=3$, $a^2-b^2=p+c^2+2cb$; con $p \neq 0$, simplifique $T = \frac{6a-9}{3p}$.

A) -3 B) $3p$ C) $-\frac{1}{3p}$ D) 3 E) $\frac{1}{3}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Se tiene } p &= a^2 - (b^2 + c^2 + 2cb) = a^2 - (b+c)^2 \\ &= (a+b+c)(a-(b+c)) = 3(a-(3-a)) \end{aligned}$$

$$p = 3(2a-3)$$

$$\therefore T = \frac{6a-9}{3p} = \frac{p}{3p} = \frac{1}{3}$$

Rpta.: E

3. En un cuadrado, la longitud de su lado es de $(2a+3b)$ metros. Si en un segundo cuadrado su lado mide $(6b)$ metros menos que la longitud del lado del primer cuadrado, se puede afirmar que la diferencia positiva de ambas áreas es mayor a 48 metros cuadrados cuando,

A) $ab > \frac{1}{2}$. B) $a > b$. C) $2a > 3b$. D) $ab > 2$. E) $a > 3b$.

Solución:

i) Longitud del lado del primer cuadrado es $(2a+3b)$ metros

Longitud del lado del segundo cuadrado es $(2a+3b-6b)$ metros

ii) diferencia positiva de áreas: $(2a+3b)^2 - (2a-3b)^2 = 4(2a)(3b) = 24ab$
 $\therefore 24ab > 48$, si $ab > 2$.

Rpta.: D

4. Si $a^2 - 3a + 1 = 0$, halle el valor de $J = \frac{a^{-3} + a^9}{1 + a^6}$.

A) $\frac{161}{9}$ B) $\frac{106}{9}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{116}{3}$ E) $\frac{109}{6}$

Solución:

$$i) J = \frac{a^{-3} + a^9}{1 + a^6} = \frac{1 + a^{12}}{a^3(1 + a^6)}$$

ii) $a^2 - 3a + 1 = 0 \rightarrow a^2 + 1 = 3a$, elevamos al cubo:

$$\rightarrow (a^2 + 1)^3 = (3a)^3$$

$$\rightarrow a^6 + 1 + 3(a^2) \underbrace{(a^2 + 1)}_{3a} = 27a^3$$

$$\rightarrow a^6 + 1 = 18a^3$$

Elevando esta última igualdad al cuadrado: $a^{12} + 2a^6 + 1 = 324a^6$

$$a^{12} + 1 = 322a^6$$

$$\therefore J = \frac{1 + a^{12}}{a^3(1 + a^6)} = \frac{322a^6}{a^3(18a^3)} = \frac{161}{9}.$$

Rpta.: A

5. Por motivos de una actividad escolar los estudiantes Franco, Matías y Brianna han construido, cada uno, un paralelepípedo rectangular recto, cuyas dimensiones, en metros, de cada uno de sus lados están registrada en la siguiente tabla:

	Paralelepípedo construido por :		
	Franco	Matías	Brianna
Largo	7	3	$(a-1)$
Ancho	a	a	1
Altura	a^2	$(a+1)$	b

Si el exceso de los volúmenes de los paralelepípedos construidos por Franco y Matías, en ese orden, disminuido en un metro cúbico resultó ser igual al volumen del paralelepípedo construido por Brianna, halle la medida, en metros, de la altura de éste último sólido.

- A) $(4a+1)$ B) $(3a^2)$ C) $(7a^2+4a+1)$
 D) $(4a+3)$ E) $(3a^2+4a+1)$

Solución:

El exceso del primer volumen con respecto al segundo volumen está dado por:
 $7a^3 - 3a(a+1)$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow (a-1)(b)(1) &= 7a^3 - 3a(a+1) - 1 \\
 &= 7a^3 - 3a^2 - 3a - 1 + a^3 - a^3 \\
 &= 8a^3 - (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) \\
 &= (2a)^3 - (a+1)^3 = (2a - a - 1)((2a)^2 + (2a)(a+1) + (a+1)^2) \\
 &= (a-1)(7a^2 + 4a + 1)
 \end{aligned}$$

$\therefore$ La medida del ancho del paralelepípedo es de $b = (7a^2 + 4a + 1)$ metros.

Rpta.: C

6. Sean a , b y c números reales positivos. Si $a^4 + b^4 + c^4 = 83$, $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 19$ y $ab + bc + ac = 7$, halle el valor de

$$M = \left[\frac{(a^3 + b^3 + c^3 - 11)}{(3 + abc)} + 13 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

- A) 3 B) 1 C) $\frac{1}{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) 4

Solución:

$$\begin{aligned} \text{i) } (a^2 + b^2 + c^2)^2 &= a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 83 + 38 = 121 \\ &\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 25 \\ &\rightarrow a + b + c = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) De la identidad : } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) \\ &\rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 20 \end{aligned}$$

$$M = \left[\frac{(a^3 + b^3 + c^3 - 11)}{(3 + abc)} + 13 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{9 + 3abc}{(3 + abc)} + 13 \right]^{\frac{1}{2}} = 4.$$

Rpta.: E

7. En el ciclo anterior, la CEPREUNMSM otorgó vacantes en la modalidad de ingreso directo a las carreras profesionales de Antropología, Toxicología e Ingeniería civil. Si la suma de los cubos de cada una de la cantidad de vacantes de las dichas carreras fue de 99 y del total de vacantes de las tres carreras profesionales, 6 vacantes no fueron para Ingeniería Civil y 7 vacantes no fueron para Toxicología, ¿cuántas vacantes hubo entre las tres carreras profesionales?

- A) 6 B) 8 C) 7 D) 10 E) 9

Solución:

Sean la cantidad de vacantes para:

Antropología : a

Toxicología: b

Ingeniería Civil: c

i) De los datos se tiene:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 99, \quad a + b = 6, \quad a + c = 7$$

Sea $b + c = m$, sumando estas tres últimas igualdades resulta: $2(a + b + c) = 13 + m$

$$\rightarrow a + b + c = \frac{13 + m}{2}$$

ii) Usando la identidad: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + c)$

$$\rightarrow \left(\frac{13 + m}{2}\right)^3 = 99 + 3(6)(7)(m) ; m \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow m = 5$$

$$\therefore \text{El total de vacantes es } a + b + c = \frac{13 + m}{2} = 9.$$

Rpta.: E

8. La relación de precios (en soles) de dos celulares de marcas distintas está representado por la expresión $\frac{(m-0,5)^3 + (n-0,5)^3 + (1-(m+n))^3}{[p(4mn-2(m+n)+1)]}$ cuando $m+n+p=1$; $m \neq 0,5$, $n \neq 0,5$, $p \neq 0$. Si el precio del celular más caro es de 2000 soles, halle el precio del otro celular.

- A) 1500 soles
D) 500 soles

- B) 1000 soles
E) 1200 soles

- C) 400 soles

Solución:

i) Como: $(m-0,5) + (n-0,5) + (1-(m+n)) = 0$

$$\begin{aligned} \rightarrow (m-0,5)^3 + (n-0,5)^3 + (1-(m+n))^3 &= 3(m-0,5)(n-0,5)(1-(m+n)) \\ &= 3(m-0,5)(n-0,5)p ; \text{ pues } 1 = m + n + p \end{aligned}$$

ii) $[p(4mn-2(m+n)+1)] = p(2m-1)(2n-1)$ (por aspa simple)

$$= \frac{4p}{4}(2m-1)(2n-1) = 4p(m-0,5)(n-0,5)$$

$$\rightarrow \frac{(m-0,5)^3 + (n-0,5)^3 + (1-(m+n))^3}{[p(4mn-2(m+n)+1)]} = \frac{3(m-0,5)(n-0,5)p}{4p(m-0,5)(n-0,5)} = \frac{3}{4}$$

Luego el precio del celular más caro es $4k = 2000$. Por tanto el costo del otro celular es $3k = 1500$ soles.

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la tabla adjunta se ha registrado la siguiente información:

Colegio	Cantidad de alumnos matriculados	Cantidad de alumnos que asistieron el primer día de clase
P	$x(x - 2y) + 1$	$z(z + 2y)$
Q	$(x - y)^2$	m

Si el primer día de clase faltaron la misma cantidad de estudiantes en ambos colegios, ¿cuántos estudiantes asistieron el primer día de clase en el colegio Q?

- A) $(y - z)^2 - 1$ B) $(y + z)^2$ C) $(x - z)^2 + 1$
 D) $(y + z)^2 - 1$ E) $(x - z)^2$

Solución:

i) Sea R el total de alumnos que faltaron en el colegio P:

$$\rightarrow R = x(x - 2y) + 1 - z(z + 2y)$$

$$\rightarrow R = x^2 - 2xy - z^2 - 2yz = x^2 - 2xy + y^2 - y^2 - z^2 - 2yz + 1$$

$$= (x - y)^2 - (y + z)^2 + 1$$

ii) Sea T el total de alumnos que faltaron en el colegio Q:

$$\rightarrow T = (x - y)^2 - m$$

$$\text{Luego } (x - y)^2 - (y + z)^2 + 1 = (x - y)^2 - m$$

$$\therefore m = (y + z)^2 - 1.$$

Rpta.: D

2. Si $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ac} = \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{b^2}$; donde $a \neq b$ y $c \neq 0$, simplifique $F = \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}}$.

- A) 1 B) -3 C) 2 D) 3 E) -1

Solución:

$$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ac}$$

$$\rightarrow (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) = -\sqrt[3]{c}(\underbrace{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}_{\neq 0})$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = -\sqrt[3]{c}$$

$$\therefore F = \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}} = -1.$$

Rpta.: E

3. Teresa trabaja haciendo tortas, en el siguiente cuadro se muestra la cantidad de tortas (no necesariamente cantidades consecutivas) y el tiempo que emplea Teresa en hacerlas.

Cantidad de Tortas	1	2	$(a + 2m + b)$	4	n
Tiempo	30 min	60 min	p min	120 min	$\frac{900(a-b)^2}{(a-2m+b)} \text{ min}$

De dicho cuadro se observó que el valor de p coincidió con la cantidad de tortas n y que en 120 min hizo $\frac{(a-b)}{6}$ tortas. Si en estas tres últimas semanas ha preparado en total 75 tortas, habiendo preparado m^2 tortas por semana ¿en cuántos minutos prepara $(a + 2m + b - 10)$ tortas, siendo a, b y m valores enteros positivos?

A) 540 min
D) 760 min

B) 780 min
E) 580 min

C) 900 min

Solución:

i) De la tabla $p = 30(a + 2m + b)$ y $\frac{900(a-b)^2}{(a-2m+b)} \left(\frac{1}{30} \right) = n$

Como $p = n \rightarrow 30(a + 2m + b) = \frac{30(a-b)^2}{(a-2m+b)}$

Entonces $(a + 2m + b) = \frac{(a-b)^2}{(a-2m+b)} \rightarrow (a + 2m + b)(a - 2m + b) = (a-b)^2$

$\rightarrow (a-b)^2 = (a+b+2m)(a+b-2m) = (a+b)^2 - 4m^2$

$\rightarrow 4m^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$\rightarrow m^2 = ab$

ii) En 120 min preparó $\frac{(a-b)}{6} = 4$ tortas, entonces $(a-b) = 24$

iii) En 3 semanas preparó $3m^2 = 75$ tortas, entonces $25 = m^2 = ab$
y desde que $(a - b) = 24$ se tiene que: $a = 25$, $b = 1$, $m = 5$

$$\therefore (a + 2m + b - 10) = 26 \text{ tortas lo prepara en } (26)(30) = 780 \text{ min.}$$

Rpta.: B

4. Jahir ha coleccionado $(27b^3 + 54b^2)$ figuritas de su superhéroe favorito, cada una de ellas distinta entre sí, y su papá Carlos le ha regalado $(8 + 18pb)$ figuritas distintas a las que ya tiene con lo que resulta que ahora Jahir tiene en total $(p + 3b)^3$ figuritas; $p \in \mathbb{Z}^+$. Determine una expresión, en términos de b , que representa a la cantidad de figuritas que regaló Carlos a su hijo Jahir, sabiendo que estas figuritas son cada una distinta a las que coleccionó Jahir al inicio.

- A) $(8 + 18b)$ B) $(8 + 32b)$ C) $(8 + 36b)$
D) $(8 + 54b)$ E) $(8 + 72b)$

Solución:

$$\begin{aligned} 27b^3 + 54b^2 + 8 + 18pb &= (p + 3b)^3 \\ &= p^3 + 27b^3 + 3p(3b)(p + 3b) \end{aligned}$$

$$\rightarrow 27b^3 + 54b^2 + 8 + 18pb = p^3 + 27b^3 + 9p^2b + 27pb^2$$

$$\rightarrow 54b^2 + 8 + 18pb = p^3 + 9p^2b + 27pb^2$$

y desde que $p \in \mathbb{Z}^+$, esta última igualdad se verifica para $p = 2$

$\therefore$ El papá de Jahir le regaló $(8 + 18pb) = (8 + 36b)$ figuritas.

Rpta.: C

5. Si $a + b + c = 8$, $a^2 + b^2 + c^2 = 30$ y $abc = 10$, simplifique

$$M = (a + b + 2c)(c + b + 2a)(c + 2b + a).$$

- A) 970 B) 1070 C) 710 D) 1170 E) 870

Solución:

i) Sea $p = a + b + c$

$$\rightarrow M = (p + c)(p + a)(p + b)$$

$$= p^3 + (a + b + c)p^2 + (ab + bc + ac)p + abc$$

ii) $a + b + c = 8$, elevamos al cuadrado:

$$\rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{30} + 2(ab + bc + ac) = 64 \rightarrow ab + bc + ac = 17$$

$$\therefore M = 8^3 + (8)8^2 + (17)8 + 10 = 1170.$$

Rpta.: D

6. Si $(a+b)(b+c)(a+c) = -1$ y $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, simplifique $M = \frac{(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})}{(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1})^2}$.

- A) abc B) 1 C) 3 D) $\frac{1}{abc}$ E) $\frac{1}{3}$

Solución:

De la identidad: $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c) = 0$

$$\rightarrow a + b + c = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (ab + bc + ac)^2 &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2[(ab)(bc) + (ab)(ac) + (bc)(ac)] \\ &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + \underbrace{2abc(a+b+c)}_{\text{cero}} \end{aligned}$$

Luego $(ab + bc + ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2$

$$\therefore M = \frac{(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})}{(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1})^2} = \frac{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}{(bc + ac + ab)^2} = 1.$$

Rpta.: B

7. Si $a = \sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{3-\sqrt{2}}$ y $c = -2\sqrt{3+\sqrt{2}}$, simplifique $T = a^2(2b^2 - a^2) + b^2(2c^2 - b^2) + c^2(2a^2 - c^2)$.

- A) ab B) 0 C) abc D) 2 E) -2

Solución:

$$\begin{aligned} \text{i) } T &= a^2(2b^2 - a^2) + b^2(2c^2 - b^2) + c^2(2a^2 - c^2) \\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \end{aligned}$$

ii) Del dato : $a + b + c = 0$, elevamos al cuadrado :

$$\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$$

$$\rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = [-2(ab + bc + ac)]^2$$

$$\rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) = 4 \left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc \underbrace{(a+b+c)}_0 \right)$$

$$\rightarrow 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4 = 0.$$

Rpta.: B

8. Karem tenía un ahorro de m cientos de soles con lo que compró una cámara fotográfica, cuyo costo fue de $(n+p)$ cientos de soles, quedándole 100 soles; donde $\{m, n, p\} \subset \mathbb{Z}^+$. Actualmente, tiene en total un ahorro de $\left[(n-4)^3 + (p-3)^3 \right]$ cientos de soles, y para pagar un curso de actualización docente, cuyo costo es de $(m-8)^3$ cientos de soles le falta 600 soles. ¿Cuánto es el costo de dicho curso de actualización docente?

A) 800 soles

B) 600 soles

C) 900 soles

D) 700 soles

E) 500 soles

Solución:

i) Del primer dato se tiene: $m - (n+p) = 1$

$$\rightarrow n + p - m + 1 = 0$$

$$\rightarrow (n-4) + (p-3) + (8-m) = 0$$

$$\rightarrow (n-4) + (p-3) - (m-8) = 0$$

$$\rightarrow (n-4)^3 + (p-3)^3 + [-(m-8)]^3 = 3(n-4)(p-3)[-(m-8)]$$

$$\rightarrow \underbrace{(n-4)^3 + (p-3)^3 - (m-8)^3}_{\text{cantidad que le falta para pagar el curso}} = 3(n-4)(p-3)[-(m-8)] = -6$$

$$\rightarrow (n-4)(p-3)(m-8) = 2$$

Como m , n y p son enteros positivos y desde que $m - (n+p) = 1$, entonces la última igualdad obtenida se verifica para $n = 5$, $p = 4$, $m = 10$.

$\therefore$ El costo de dicho curso es $(m-8)^3 = 8$ cientos de soles = 800 soles.

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. Al cumpleaños número $(b + 8)$ de Jahír asistieron en total $(a^2 + c^2)$ niños. Sobre el total de personas adultas que asistieron al cumpleaños, el tío de Jahír observa lo siguiente:
- La fiesta empezó con $(a + 2c)$ adultos.
 - Al cabo de una hora, la cantidad de personas adultas se cuadruplicó.
 - A las dos horas de empezada la reunión se retiraron $(20 + b^2)$ personas adultas, con lo que resultó que la cantidad de adultos presentes coincidió con el total de niños que asistieron.

Si ya no asistieron más personas a la fiesta infantil, determine el total de personas (entre niños y adultos) que asistieron al cumpleaños.

- A) 50 B) 80 C) 60 D) 40 E) 70

Solución:

De los datos:

Al cabo de una hora el total de adultos es: $4(a + 2c)$

A las dos horas habían: $4(a + 2c) - (20 + b^2)$ adultos

$$\text{Luego } 4(a + 2c) - (20 + b^2) = a^2 + c^2$$

$$4(a + 2c) - (20 + b^2) = a^2 + c^2$$

$$\rightarrow (a^2 - 4a + 4) + (c^2 - 8c + 16) + b^2 = 0$$

$$\rightarrow (a - 2)^2 + (c - 4)^2 + b^2 = 0$$

$$\rightarrow a = 2, c = 4, b = 0.$$

Luego, asistieron 20 niños y 40 adultos.

Por tanto en total asistieron 60 personas.

Rpta.: C

2. Según la ley de formación que se verifica para los valores de a y b en la siguiente tabla,

a	2	3	$\sqrt[12]{3+\sqrt{5}}$	n
b	2^6	3^6	m	$\sqrt{3-\sqrt{5}}$

Halle el valor de $(m+n^6)^6 - (m-n^6)^6$.

- A) 898 B) 982 C) 782 D) 892 E) 992

Solución:

Se tiene que $m = \sqrt{3+\sqrt{5}}$ y $n^6 = \sqrt{3-\sqrt{5}}$

De $(m+n^6)^2 - (m-n^6)^2 = 4mn^6 = 4(2)$, elevamos al cubo

$$\rightarrow (m+n^6)^6 - (m-n^6)^6 - 3(m+n^6)^2(m-n^6)^2[(m+n^6)^2 - (m-n^6)^2] = 8^3$$

$$\rightarrow (m+n^6)^6 - (m-n^6)^6 - 3(m^2 - n^{12})^2[4mn^6] = 8^3$$

$$\rightarrow (m+n^6)^6 - (m-n^6)^6 = 3(m^2 - n^{12})^2[4mn^6] + 8^3 = 3(20)(8) + 8^3 = 512 + 480 = 992.$$

Rpta.: E

3. Si $\frac{1}{a}(b+c) + \frac{1}{b}(c+a) + \frac{1}{c}(a+b) = 6$; $\{a,b,c\} \subset \mathbb{R}^+$, halle el valor de $T = \frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+abc}$.

- A) 7 B) 3 C) 5 D) 9 E) 1

Solución:

$$\text{Del dato se tiene: } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 2\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} - 2\right) = 0$$

$$\rightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{a}} - \sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{b}} - \sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 = 0$$

$$\rightarrow a = b = c$$

$$\therefore T = \frac{(3a)^3}{3a^3} = 9.$$

Rpta.: D

4. Carmen vende polos al precio de $(x^2 + y^2)$ soles cada uno; donde $x \neq y$. La siguiente tabla muestra la cantidad de polos vendidos durante los tres primeros días de la semana.

	Lunes	Martes	Miércoles
Cantidad (unidades)	$\frac{96}{x} + x^2$	xy	$(y + 37)$

De dicha información se pudo observar que las ventas del primer día coincidieron con las del tercer día y que el segundo día vendió 12 polos. Si el primer día hubiera vendido $\left(\frac{96}{y} + y^2\right)$ polos, dicha cantidad hubiera coincidido con el valor de $(x + 37)$.

¿Cuánto fue su ingreso el segundo día de venta?

- A) 240 soles B) 420 soles C) 300 soles
D) 264 soles E) 312 soles

Solución:

$$i) \frac{96}{x} + x^2 = y + 37 \quad \wedge \quad \frac{96}{y} + y^2 = x + 37$$

$$\rightarrow 96 + x^3 = xy + 37x \quad \wedge \quad 96 + y^3 = xy + 37y$$

Restando las dos últimas identidades se tiene: $x^3 - y^3 = 37(x - y)$

Luego $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 37(x - y)$, donde $(x - y) \neq 0$

$$\rightarrow x^2 + xy + y^2 = 37 \quad ; \quad xy = 12$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Por tanto su ingreso del segundo día fue: $(xy)(x^2 + y^2) = 12(25) = 300$ soles.

Rpta.: C

5. La fórmula de Herón, cuyo resultado se le atribuye al matemático griego Herón de Alejandría, nos permite calcular el área de un triángulo sabiendo que las longitudes de sus lados son a , b y c . Dicha fórmula es dada por:

$$\text{ÁREA} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad ; \quad \text{donde } p \text{ es el semiperímetro del triángulo.}$$

Con la ayuda de la fórmula anterior, Juan quiere hallar el área de tres cuadrados, cada uno de ellos formados con uno de los lados de un triángulo de área $12\sqrt{5} \text{ m}^2$, y cuyo perímetro es de 24 m. Si el producto de las medidas de los lados es 504, ¿cuál es el valor del área que debería encontrar Juan?

- A) 182 m^2 B) 194 m^2 C) 154 m^2 D) 178 m^2 E) 192 m^2

Solución:

Siendo el semiperímetro del triángulo 12 m, se tiene de la fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{12(12-a)(12-b)(12-c)}$$

$$\rightarrow 12\sqrt{5} = \sqrt{12(12^3 - (a+b+c)12^2 + (ab+bc+ac)12 - abc)}$$

$$\rightarrow (12\sqrt{5})^2 = 12(12^3 - (24)12^2 + (ab+bc+ac)12 - 504)$$

$$\rightarrow 60 = -2232 + 12(ab+bc+ac)$$

$$\rightarrow 191 = ab+bc+ac.$$

Por otro lado, del trinomio al cuadrado:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$$

$$\rightarrow 24^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(191)$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 194\text{m}^2.$$

Rpta.: B

6. Halle el valor numérico de $M = \frac{(a^2 - 12a + 35)^2 (a^2 - 1)(a^6 - 1)}{(a^4 + a^2 + 1)}$, cuando $a = 3 + \sqrt{2}$.

A) 872

B) 878

C) 982

D) 784

E) 762

Solución:

1) El numerador de M es:

$$N = (a^2 - 12a + 35)^2 (a^2 - 1)(a^6 - 1)$$

$$= (a^2 - 12a + 35)^2 (a+1)(a-1)(a+1)(a^2 - a + 1)(a-1)(a^2 + a + 1)$$

$$= (a^2 - 12a + 35)^2 (a^2 - 1)^2 \underbrace{\left((a^2 + 1)^2 - a^2 \right)}_{(a^4 + a^2 + 1)}$$

$$\text{ii) } M = (a^2 - 12a + 35)^2 (a^2 - 1)^2$$

$$= (10 - 6\sqrt{2})^2 (10 + 6\sqrt{2})^2 = 28^2 = 784.$$

Rpta.: D

7. Si $x^3 + y^3 + z^3 = 33$ y $J = 363 + (x^3 + y^3 + z^3)(x+y)(y+z)(x+z)$, halle el valor de $N = \frac{11(x+y+z)^3}{J}$.

A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) 6 D) 3 E) $\frac{1}{6}$

Solución:

De la identidad: $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(x+z)$

$$\rightarrow (x+y+z)^3 = 33 + 3a \quad ; \quad a = (x+y)(y+z)(x+z)$$

$$\rightarrow N = \frac{11(3)(11+a)}{363 + 33(x+y)(y+z)(x+z)} = \frac{11(3)(11+a)}{33(11+a)} = 1.$$

Rpta.: B

8. Si $M = (a-b+c)^3 + (a+b-c)^3 - 8a^3$ y $J = (c-a)(c+a) + b(b-2c)$, donde $\{a,b,c\} \subset \mathbb{R}^+$, simplifique $\frac{M}{J}$.

A) 6a B) 2abc C) 3a D) 3abc E) $\frac{3}{abc}$

Solución:

Se observa que: $(a-b+c) + (a+b-c) + (-2a) = 0$

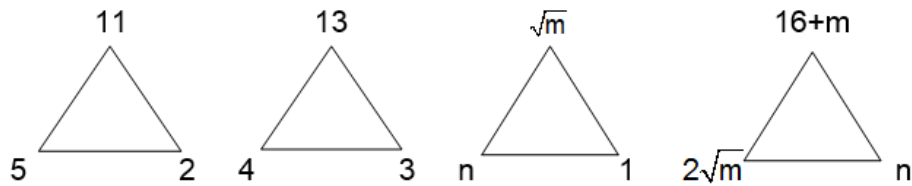
$$\begin{aligned} \rightarrow (a-b+c)^3 + (a+b-c)^3 + (-2a)^3 &= 3(a-b+c)(a+b-c)(-2a) \\ &= -6a(a-(b-c))(a+(b-c)) \\ &= -6a(a^2 - (b-c)^2) = 6a((b-c)^2 - a^2) \\ &= 6a(b^2 + c^2 - 2bc - a^2) \\ &= 6a(b(b-2c) + (c+a)(c-a)) \rightarrow M = 6aJ \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{M}{J} = 6a$$

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si m y n definidos en los reales positivos verifican la ley de formación en la siguiente secuencia gráfica,



halle el valor de $(m+n)$.

- A) 26 B) 25 C) 29 D) 28 E) 27

Solución:

En la secuencia se cumple:

$$11 = 2(5) + 1 \quad ; \quad 13 = 4(3) + 1 \quad ;$$

Luego:

$$\sqrt{m} = n(1) + 1 \quad \text{y} \quad 2\sqrt{m}(n) + 1 = 16 + m$$

$$\rightarrow m - (2\sqrt{m})n = -15$$

$$\rightarrow m - (2\sqrt{m})n + n^2 - n^2 = -15$$

$$\rightarrow (\sqrt{m} - n)^2 - n^2 = -15$$

$$\rightarrow 1^2 - n^2 = -15$$

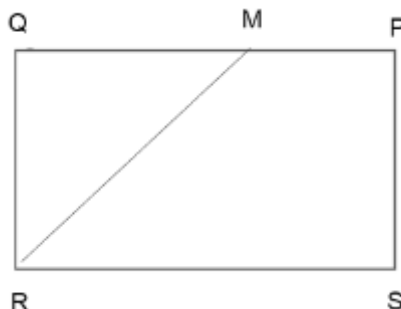
$$\rightarrow n = 4 \quad \text{y} \quad m = 25$$

$$\therefore m + n = 29.$$

Rpta.: C

2. Brianna se encuentra ubicada en el punto P (vértice de un patio de forma rectangular, cuyo perímetro es de 28 metros), tal como se muestra en la figura. A partir de ese punto, avanza 2 metros siguiendo el lado PQ, y se ubica ahora en el punto M, y a partir de allí camina hacia el punto R, siguiendo el camino MR. Si al final Brianna recorrió $(b\sqrt{2} + 2)$ metros, halle la longitud de la diagonal de dicho patio, sabiendo que los lados QR y PQ miden b y a metros, respectivamente.

- A) 10 metros
B) 8 metros
C) 7 metros
D) 5 metros
E) 12 metros



Solución:

Consideremos la medida de la diagonal $PR = d$

De los datos:

- i) $PM + MR = b\sqrt{2} + 2$, desde que $PM = 2$, entonces $MR = b\sqrt{2}$

Luego en el triángulo rectángulo MQR:

Como $QR = b$ y $MR = b\sqrt{2}$, entonces $QM = b$, por tanto $PM = a - b = 2$

- ii) Perímetro $p = 2(a + b) = 28$ entonces, $a + b = 14$

- iii) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) = 2d^2$

Luego $196 + 4 = 2d^2$ entonces $d = 10$ m.

Rpta.: A

3. Una empresa elabora un cierto tipo de condimento en sobres. En la siguiente tabla, se muestran dos lotes de producción ordenados según fecha de elaboración.

	Fecha(día/Mes/ Año)	Cantidad elaborada (en cientos)	Peso por sobre (en gramos)
Lote 1	$(13 - c)/02/18$	$(54 - bc)$	$a(b + c)$
Lote 2	$(a + b)/08/18$	$(a^2 + b^2 + c^2)$	40

En dicha tabla se observó que la cantidad elaborada (en cientos) del primer lote coincidió con el peso de cada sobre del mismo lote, y las fechas de elaboración de ambos lotes coincidieron en el día de sus respectivos meses. Sabiendo que en el segundo lote hubo un incremento en el peso de cada sobre, ¿cuánto fue el peso total en el segundo lote?

- A) 244 kg B) 248 kg C) 232 kg D) 288 kg E) 240 kg

Solución:

$$i) a(b+c) = 54 - bc \rightarrow ab + bc + ac = 54$$

$$ii) 13 - c = a + b$$

$$\rightarrow a + b + c = 13$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 169$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 169 - 2(54) = 61$$

Por tanto el peso del 2do lote es: $(a^2 + b^2 + c^2)(100)(40) = 244000 \text{ gr} = 244 \text{ kg}$.

Rpta.: A

4. Actualmente los ahorros de Dennisse, Anny y Martha son m , n y 7 mil soles, respectivamente. La suma de los cubos de dichos ahorros es 495 mil soles y la suma de los tres ahorros es 15 mil soles. Si Martha se proyecta a incrementar sus ahorros en (mn) miles de soles en cinco años, halle el ahorro proyectado de Martha.

A) 18 mil soles

B) 22 mil soles

C) 25 mil soles

D) 28 mil soles

E) 20 mil soles

Solución:

$$i) m+n+7=15 \rightarrow m+n=8$$

$$ii) m^3 + n^3 + 7^3 = 495 \rightarrow m^3 + n^3 = 152$$

$$\text{De i): } (m+n)^3 = 8^3 \rightarrow m^3 + n^3 + 3mn(m+n) = 512$$

$$\text{Entonces } 152 + 3mn(8) = 512$$

$$\rightarrow mn = 15$$

$\therefore$ Ahorro de Martha en cinco años será 22 mil soles.

Rpta.: B

5. Sea $\{a,b,c\} \subset \mathbb{R}^+$ tales que $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 0$, halle el valor de

$$J = \frac{a^2(a+b) + b^2(b+c)}{c^2(a+c)}.$$

A) 1

B) 3

C) $\frac{1}{3}$

D) 2

E) $\frac{1}{2}$

Solución:

$$i) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = 3 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

$$\rightarrow 2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{b} \right) + 2 \left(\frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} \right) + 2 \left(\frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{c} \right) = 0$$

$$\text{Entonces } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0, \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0, \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = 0$$

$$\rightarrow a = b = c$$

$$ii) J = \frac{a^2(a+b) + b^2(b+c)}{c^2(a+c)} = \frac{a^2(2a) + a^2(2a)}{a^2(2a)} = 2.$$

Rpta.: D

6. Si $a^2 = 15ab - b^2$, halle el valor de

$$J = \frac{1}{14} \left[\left(\frac{a}{b} + 1 \right)^3 + \left(\frac{b}{a} + 1 \right)^3 \right]; ab \neq 0.$$

A) 256

B) 228

C) 189

D) 184

E) 289

Solución:

$$\text{De } a^2 = 15ab - b^2 \rightarrow a^2 + b^2 = 15ab$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 15$$

$$\rightarrow \left(\frac{a}{b} + 1 \right) + \left(\frac{b}{a} + 1 \right) = 17$$

$$\text{Entonces } \left(\frac{a}{b} + 1 \right)^3 + \left(\frac{b}{a} + 1 \right)^3 + 3 \left(\frac{a}{b} + 1 \right) \left(\frac{b}{a} + 1 \right) (17) = 17^3$$

$$\text{Luego } J = \frac{1}{14} [17^3 - 3(17)(17)] = 289.$$

Rpta.: E

7. Si $(a+b)(b+c)(a+c)=60$, $ab+bc+ac=11$ y $abc=6$ ¿en cuánto excede $(a^3+b^3+c^3)$ al valor de $(a^2+b^2+c^2)$?
- A) 12 B) 20 C) 22 D) 18 E) 14

Solución:

i) De la identidad (8) (observación):

$$(a+b)(b+c)(a+c)=(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc$$

$$\rightarrow 60=(a+b+c)(11)-6$$

$$\rightarrow a+b+c=6$$

$$\text{Elevando al cuadrado: } a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=36$$

$$\text{Entonces } a^2+b^2+c^2=14$$

ii) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

$$\rightarrow a^3+b^3+c^3-18=6(14-11)$$

$$\rightarrow a^3+b^3+c^3=36$$

$$\therefore (a^3+b^3+c^3)-(a^2+b^2+c^2)=22$$

Rpta.: C

8. Halle el valor de M que verifica la igualdad

$$(2-a)(2-b)(2-c)^M = \frac{(a+b-2c)^5 + (b+c-2a)^5 + (a+c-2b)^5}{(2-a)(2-b) + (2-b)(2-c) + (2-a)(2-c)}, \text{ si } a+b+c=6; \{a,b,c\} \subset \mathbb{R} - \{2\}.$$

- A) $-5(3)^5$ B) $3(5)^3$ C) 3^5 D) -5^3 E) -3^5

Solución:

$$\text{Sea } T = (2-a)(2-b) + (2-b)(2-c) + (2-a)(2-c)$$

$$\text{i) } a+b=6-c$$

$$\rightarrow a+b-2c=3(2-c)$$

$$\text{Análogamente } a+c-2b=3(2-b) \text{ y } b+c-2a=3(2-a)$$

$$\text{Luego } (a+b-2c)^5 + (b+c-2a)^5 + (a+c-2b)^5 = 3^5 [(2-a)^5 + (2-b)^5 + (2-c)^5]$$

$$\text{Además de } a+b+c=6$$

$$\rightarrow (2-a) + (2-b) + (2-c) = 0$$

$$\rightarrow (2-a)^5 + (2-b)^5 + (2-c)^5 = -5(2-a)(2-b)(2-c)(T)$$

Reemplazando en la igualdad:

$$(2-a)(2-b)(2-c)M = \frac{(a+b-2c)^5 + (b+c-2a)^5 + (a+c-2b)^5}{T}$$

$$\rightarrow (2-a)(2-b)(2-c)M = \frac{3^5[(2-a)^5 + (2-b)^5 + (2-c)^5]}{T}$$

$$\rightarrow M = \frac{3^5[(2-a)^5 + (2-b)^5 + (2-c)^5]}{(2-a)(2-b)(2-c)T} = -5(3)^5.$$

Rpta.: A

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

07

semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

1. **DEFINICIÓN:** es la operación cuya finalidad es obtener los polinomios llamados cociente $q(x)$ y resto $r(x)$ dados otros dos polinomios denominados dividendo $D(x)$ y divisor $d(x)$.

Esquema:

$$\begin{array}{rcl} \text{dividendo} \nearrow & D(x) & \left| \begin{array}{l} d(x) \\ \hline q(x) \end{array} \right. \begin{array}{l} \nwarrow \text{divisor} \\ \nwarrow \text{cociente} \end{array} \\ \text{resto} \searrow & r(x) & \end{array}$$

2. **ALGORITMO DE LA DIVISIÓN:** dados $D(x), d(x) \in \mathbb{K}[x]$; $d(x) \neq 0$, existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ únicos, tales que:

$$\boxed{D(x) = d(x) q(x) + r(x)} \quad \dots(1)$$

donde $r(x) = 0$ ó $\text{grad } [r(x)] < \text{grad } [d(x)]$. Los polinomios $q(x)$ y $r(x)$, se denominan cociente y residuo, respectivamente.

Ejemplo 1:
$$\underbrace{x^5 - 8x - 11}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{\text{Divisor}} \underbrace{(x^3 + x^2 + 3x + 5)}_{\text{cociente}} + \underbrace{3x - 1}_{\text{Resto}}$$

Propiedades

- $\text{grad } [D(x)] \geq \text{grad } [d(x)]$
- $\text{grad } [q(x)] = \text{grad } [D(x)] - \text{grad } [d(x)]$
- $\text{grad } [r(x)]_{\max} = \text{grad } [d(x)] - 1$

CLASES DE DIVISIÓN

EXACTA: Si $r(x) = 0$	INEXACTA: Si $r(x) \neq 0$
De (1): $D(x) = d(x) q(x)$ i) $D(x)$ es divisible por $d(x)$. ii) $d(x)$ es un divisor ó es un factor de $D(x)$.	De (1): $D(x) = d(x) q(x) + r(x)$ donde: $0 \leq \text{grad } [r(x)] < \text{grad } [d(x)]$

2.1. Criterios para dividir polinomios:**2.1.1. Métodos de división de polinomios:**

Dos de los métodos de división son:

A) *Método de Horner*: aplicable a polinomios de cualquier grado.

- El dividendo y el divisor deben ser polinomios ordenados generalmente ordenados en forma decreciente y completos, respecto a una misma variable.
- Se completará con ceros los términos faltantes en el dividendo y divisor.
- La línea vertical que separa el cociente del residuo se obtiene contando de derecha a izquierda tantas columnas como nos indica el grado del divisor.
- El resultado de cada columna se divide por el coeficiente principal del $d(x)$, y este nuevo resultado se multiplica por los demás coeficientes del $d(x)$, colocándose los resultados en la siguiente columna y hacia la derecha.

Ejemplo 2: dividir $D(x) = 8x^5 + 16x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 3$ entre $d(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 2$.

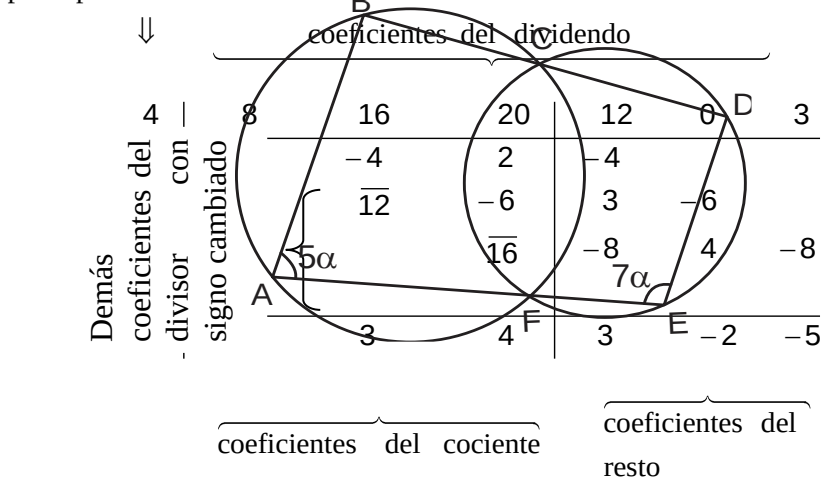
Solución:

Ordenando y completando los términos del dividendo y divisor, se tiene:

$$D(x) = 8x^5 + 16x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 0x + 3, \quad d(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 2$$

coeficiente

principal del divisor

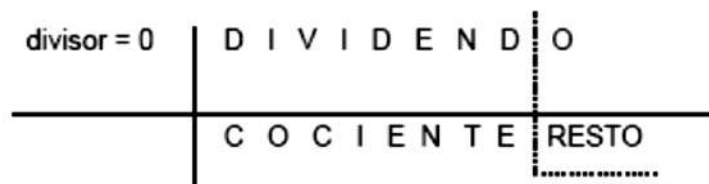


Cociente $q(x) = 2x^2 + 3x + 4$

Resto $r(x) = 3x^2 - 2x - 5$

B) *Método de Ruffini*: es un caso particular del método de Horner aplicable sólo a divisores binómicos de la forma $(ax \pm b)$, o transformables a binomios.

El esquema de Ruffini consiste en dos líneas, una horizontal y la otra vertical, tal como se muestra en la figura.



Observación : Para encontrar los coeficientes correctos del cociente se divide a todos los coeficientes obtenidos en el espacio correspondiente al cociente por el coeficiente principal “a” del divisor.

Ejemplo 3: dividir $\frac{3x^5 - 3x^4 - 18x^3 - 7x + 26}{x - 3}$

Solución:

$x = 3$	3	-3	-18	0	-7	26
		9	18	0	0	-21
	3	6	0	0	-7	5
						RESTO

Cociente $q(x) = 3x^4 + 6x^3 - 7$

Ejemplo 4: dividir $\frac{8x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 3}{2x - 1}$

Solución:

Igualamos el divisor a cero $2x - 1 = 0$ entonces $x = \frac{1}{2}$

Resolviendo, tenemos el siguiente esquema:

$x = \frac{1}{2}$	8	2	-1	1	3
		4	3	1	1
	8	6	2	2	4
					RESTO
$\div 2$					
	4	3	1	1	

Para encontrar el cociente correcto se divide a todos los coeficientes obtenidos del cociente por el coeficiente principal del divisor.

$$\text{Así } q(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 1.$$

El siguiente teorema nos permite encontrar el resto sin efectuar la división:

- 3. TEOREMA DEL RESTO:** el resto r de dividir un polinomio $p(x)$ por un binomio de la forma $ax \pm b$, es igual al valor numérico que se obtiene al reemplazar en el dividendo

$$x = \mp \frac{b}{a} ; a \neq 0.$$

$$\text{En conclusión: Si } p(x) \div (ax - b) \Rightarrow r = p\left(\frac{b}{a}\right).$$

Regla práctica:

- El divisor se iguala a cero.
- Se despeja una expresión conveniente
- La expresión obtenida en el paso anterior se reemplaza en el dividendo, obteniéndose así el resto.

Ejemplo 5: halle el resto al dividir $\frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{x - 3}$.

Solución:

$$1^\circ \quad d(x) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0$$

$$2^\circ \quad \text{Despeje conveniente: } x = 3$$

$$3^\circ \quad \text{resto} = 3(3)^4 - 5(3)^2 + 7 = 205$$

$$\Rightarrow \text{resto} = -5.$$

Ejemplo 6: determine el resto de la siguiente división: $\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)-6}{x(x-7)+8}$.

Solución:

$$\frac{(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x + 12) - 6}{x^2 - 7x + 8}$$

$$\text{Aplicando el Teorema del resto } x^2 - 7x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x = -8$$

Reemplazamos en el dividendo

$$r(x) = 2(4) - 6$$

$$\therefore r(x) = 2$$

4. **DEFINICIÓN:** diremos que r es raíz o cero de $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, si $p(r) = 0$.

Ejemplo 7: para el polinomio $p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Vemos que $x = 2$ es una raíz de $p(x)$; pues se tiene que

$$p(2) = (2)^3 + (2)^2 - 4(2) - 4 = 0$$

También vemos que $x = 3$ no es una raíz de $p(x)$; pues

$$p(3) = (3)^3 + (3)^2 - 4(3) - 4 = 20 \neq 0.$$

5. **TEOREMA DEL FACTOR:** si “a” es un cero de $p(x)$, entonces $(x - a)$ es un factor de $p(x)$.

$$p(x) = (x - a) q(x)$$

5.1. Propiedades

1° $p(x)$ es divisible separadamente por $(x - a)$, $(x - b)$ y $(x - c)$ con $a \neq b \neq c \Leftrightarrow p(x)$ es divisible por $(x - a)(x - b)(x - c)$.

2°

$$\begin{array}{c} p(x) \\ r(x) \end{array} \left| \begin{array}{c} d(x) \\ q(x) \end{array} \right. \begin{array}{l} \nearrow p(x) \cdot m \\ \searrow r(x) \cdot m \end{array} \left| \begin{array}{c} d(x)m \\ q(x) \end{array} \right. \Rightarrow \text{resto verdadero} = \frac{r(x) \cdot m}{m}$$

$$\begin{array}{c} p(x) \div m \\ r(x) \div m \end{array} \left| \begin{array}{c} d(x) \div m \\ q(x) \end{array} \right. \Rightarrow \text{resto verdadero} = \frac{r(x)}{m} \cdot m$$

Ejemplo 8:

Sea $p(x)$ un polinomio de tercer grado que es divisible separadamente por $(x - 5)$ y $(x + 2)$. Si la suma de coeficientes de $p(x)$ es 24 y su término independiente es -30 , halle el valor de $p(2)$.

Solución:

$$p(x) = \underbrace{(x - 5)(x + 2)}_{\text{divisor}} \underbrace{(ax + b)}_{\text{cociente}}$$

i) Suma de coeficientes: $p(1)$

$$\rightarrow 24 = p(1) = (1 - 5)(1 + 2)(a + b) = -12(a + b)$$

$$\rightarrow -2 = a + b$$

ii) Término Independiente: $p(0)$

$$\rightarrow -30 = p(0) = (-5)(2)(b) = -10(b)$$

Luego, $b = 3$ y $a = -5$.

EJERCICIOS DE CLASE

1. Luisa y sus $(x+5)$ amigos donan en un acto benéfico $(x-3)^{4n}$ regalos cada uno; los beneficiarios son $(x^2 - 6x + 8)$ niños de un Asentamiento Humano, y cada uno de ellos recibió, en forma equitativa, la mayor cantidad de regalos posible. Si la cantidad de regalos que ha sobrado está representado por el polinomio $R(x)$, ¿cuántos son los amigos de Luisa, si x asume el valor de $R(8)$ y n es un entero positivo?
- A) 18 B) 19 C) 20 D) 21
2. Un partido político tiene $p(x) = x^4 - 5x^3 + 3ax^2 - 5ax - 200$ decenas de polos para $x > 5$ y al repartirlos entre sus supuestos votantes en su local partidario le quedó $(a+12)$ decenas de polos; pero si la misma cantidad de polos $p(x)$ en decenas, los hubiera repartido equitativamente a un grupo de $(x-5)$ decenas de miembros de su partido, no le habría quedado polo alguno. Halle el número de polos que le sobró al partido político en su local partidario.
- A) 170 B) 150 C) 140 D) 160
3. Si los coeficientes del cociente de dividir el polinomio $p(x) = 8x^4 + 18x^3 + ax^2 + bx + c$ por $d(x) = 2x + 3$ son números enteros consecutivos en forma decreciente; y el residuo de dicha división es 6, halle $a+b+c$.
- A) 50 B) 40 C) 30 D) 20
4. Don Ricardo vendió $p(x) = x^2 + 3x + 4$ gallinas, con $x \geq 2$, y cada gallina la vendió a un precio de oferta de 12 soles, obteniendo por la venta de todas las gallinas $q(x) = x^4 - 3x^2 - 6x + 8$ soles. Si por cada gallina ganó 7 soles, determine la ganancia total por la venta de las gallinas.
- A) 308 soles B) 224 soles C) 416 soles D) 528 soles
5. Halle el resto de la división $\frac{x^7(x+1)^7 + x^5(x+1)^5 + (x+1)^2 + 7}{x^2 + x + 2}$.
- A) $x - 164$ B) $x - 154$ C) $x - 144$ D) $x - 134$

6. Un profesor del curso de Matemática Básica le dice a José que la nota que ha obtenido es el cuádruplo del resto de dividir $q(x)$ por $((6-n)x+n-4)$, donde $q(x)$ es el cociente que se obtuvo al dividir $D(x) = -x^4 + (4-n)x^3 + 2x^2 - 2x + 4 - n$ por $(x^2 - x + 2)$; siendo el resto $(4x - n)$. Además le dice el profesor que le aumentará n puntos si encuentra correctamente el valor de n . Si José resuelve todo correctamente, ¿cuál es su nota final?
- A) 14 B) 15 C) 17 D) 16
7. Si el resto de dividir el polinomio $p(x) = x^{32} - 7x^{27} + 3x^{22} - 4x^{18} + 2x^{13} - x^7 - 6$ por $(x^3 + 1)$ se divide por $(x - 3)$; se obtiene el polinomio $h(x)$, halle la suma de los coeficientes de $h(x)$.
- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2
8. El polinomio mónico $p(x)$ de tercer grado, tiene el mismo valor numérico para $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$ y la suma de coeficientes de $p(x)$ es 135. Halle el resto de dividir $p(x)$ por $(x - 2)$.
- A) 179 B) 172 C) 171 D) 164

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si la suma de coeficientes del resto que se obtiene al dividir el polinomio $p(x) = (x - 2)^4 - (x + 2)^3$ por $d(x) = x^2 - 4$ representa el precio en decenas de soles de un celular, ¿cuánto se pagará por el celular si hacen un descuento del 5%?
- A) 152 soles B) 144 soles C) 218 soles D) 260 soles
2. En la siguiente tabla de Ruffini:

	A	L	G	E	B	R	A
$x = -2$		-6	-2	6	2	-2	0
	A	1					A
							RESTO

Halle la suma de coeficientes del polinomio dividendo.

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10

3. La edad actual de Catalina en años es igual a la diferencia de los residuos que se obtienen al dividir el polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ por $d(x) = x^2 + x - 2$ y por $t(x) = x^2 - x + 2$, en ese orden. ¿Hace cuánto tiempo Catalina cumplió 7 años?
- A) 6 años B) 3 años C) 8 años D) 1 año
4. Si la siguiente división
$$\frac{(x^2 - x + 2)^5 - m(x - 2)^4(x + 1)^4 + nx^3(x - 1)^3}{x^2 - x + 1}$$
 es exacta, halle el valor de $(81m + n + 7)$.
- A) 7 B) 8 C) 12 D) 5
5. Halle el resto de dividir el polinomio $p(x)$ de grado 5 por $(x + 2)$, sabiendo que es divisible por $x^3 + 2$, además $p(x)$ se anula para $x = 3$, $x = -1$, y la suma de coeficientes de $p(x)$ es -36 .
- A) 100 B) -20 C) 90 D) -90
6. El día de hoy una avícola ha vendido $p(3)$ pollos al precio de $p(2)$ soles cada pollo. Si $p(2)$ y $p(3)$ son los valores obtenidos del polinomio $p(x) = x^5 + ax + b$; siendo $p(x)$ divisible por $(x^2 + x - 1)$, ¿cuánto obtuvo hoy la avícola por la venta total de dicha cantidad de pollos?
- A) 5775 soles B) 5700 soles C) 3750 soles D) 3800 soles
7. Halle el valor de m , si $(-x^2 + y^2 + z^2)(x^2 - y^2 + z^2)(x^2 + y^2 - z^2) + mx^2y^2z^2$ es divisible por $(x + y + z)$.
- A) 0 B) 2 C) 5 D) 8
8. Calcule el resto de dividir un polinomio $p(x)$ por $(x - 10)$, si se sabe que el término independiente del cociente es 5 y el término independiente del polinomio $p(x)$ es 2.
- A) 58 B) 52 C) 56 D) 50

Álgebra

EJERCICIOS DE CLASE

1. Luisa y sus $(x+5)$ amigos donan en un acto benéfico $(x-3)^{4n}$ regalos cada uno; los beneficiarios son $(x^2 - 6x + 8)$ niños de un Asentamiento Humano, y cada uno de ellos recibió, en forma equitativa, la mayor cantidad de regalos posible. Si la cantidad de regalos que ha sobrado está representado por el polinomio $R(x)$, ¿cuántos son los amigos de Luisa, si x asume el valor de $R(8)$ y n es un entero positivo?

A) 18

B) 19

C) 20

D) 21

Solución:

Del algoritmo de la división:

$$(x+6)(x-3)^{4n} = (x^2 - 6x + 8)q(x) + R(x); R(x) = ax + b$$

$$(x+6)(x-3)^{4n} = (x-2)(x-4)q(x) + ax + b$$

$$\text{Para } x = 2: 8 = 2a + b$$

$$\text{Para } x = 4: 10 = 4a + b$$

$$\rightarrow (a = 1 \wedge b = 6) \rightarrow R(x) = ax + b = x + 6$$

$$\text{Si } x = R(8) = 8 + 6 = 14$$

$$\therefore \text{El número de amigos de Luisa es } x + 5 = 14 + 5 = 19.$$

Rpta.: B

2. Un partido político tiene $p(x) = x^4 - 5x^3 + 3ax^2 - 5ax - 200$ decenas de polos para $x > 5$ y al repartirlos entre sus supuestos votantes en su local partidario le quedó $(a+12)$ decenas de polos; pero si la misma cantidad de polos $p(x)$ en decenas, los hubiera repartido equitativamente a un grupo de $(x-5)$ decenas de miembros de su partido, no le habría quedado polo alguno. Halle el número de polos que le sobró al partido político en su local partidario.

A) 170

B) 150

C) 140

D) 160

Solución:

División exacta:

$$p(x) = (x-5)q(x) + 0$$

$$x^4 - 5x^3 + 3ax^2 - 5ax - 200 = (x-5)q(x)$$

$$\text{Si } x = 5 \rightarrow 75a - 25a - 200 = 0 \rightarrow a = 4$$

$$\rightarrow 4 + 12 = 16 \text{ decenas de polos}$$

$\therefore$ Número de polos que le sobro al partido político en su local: 160.

Rpta.: D

3. Si los coeficientes del cociente de dividir el polinomio $p(x) = 8x^4 + 18x^3 + ax^2 + bx + c$ por $d(x) = 2x + 3$ son números enteros consecutivos en forma decreciente; y el residuo de dicha división es 6, halle $a+b+c$.

A) 50

B) 40

C) 30

D) 20

Solución:

Usando el método de Ruffini

	8	18	a	b	c
$x = -\frac{3}{2}$		-12	-9	-6	-3
	8	6	4	2	6
					resto
$\div 2$					
Coef. del cociente $\rightarrow$	4	3	2	1	

$$\rightarrow a - 9 = 4, \quad b - 6 = 2, \quad c - 3 = 6$$

$$\rightarrow a = 13, \quad b = 8, \quad c = 9$$

$$\therefore a + b + c = 13 + 8 + 9 = 30.$$

Rpta.: C

4. Don Ricardo vendió $p(x) = x^2 + 3x + 4$ gallinas, con $x \geq 2$, y cada gallina la vendió a un precio de oferta de 12 soles, obteniendo por la venta de todas las gallinas $q(x) = x^4 - 3x^2 - 6x + 8$ soles. Si por cada gallina ganó 7 soles, determine la ganancia total por la venta de las gallinas.

- A) 308 soles B) 224 soles C) 416 soles D) 528 soles

Solución:

Usando el método de Horner

1	1	0	-3	-6	8
-3		-3	-4		
-4			9	12	
				-6	-8
	1	-3	2	0	0

$$\text{Precio de Venta de cada gallina} = x^2 - 3x + 2 = 12 \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$\text{Numero de gallinas: } p(5) = 44$$

$$\text{Gana por cada gallina: 7 soles}$$

$$\therefore \text{Ganancia total por las gallinas: } 44(7) = 308 \text{ soles.}$$

Rpta.: A

5. Halle el resto de la división $\frac{x^7(x+1)^7 + x^5(x+1)^5 + (x+1)^2 + 7}{x^2 + x + 2}$.

- A) $x - 164$ B) $x - 154$ C) $x - 144$ D) $x - 134$

Solución:

$$\text{Por el Teorema del Resto } x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + x = -2$$

En el dividendo

$$x^7(x+1)^7 + x^5(x+1)^5 + (x+1)^2 + 7 =$$

$$(x^2 + x)^7 + (x^2 + x)^5 + x^2 + x + x + 8$$

$$\rightarrow \text{resto} = (-2)^7 + (-2)^5 - 2 + x + 8$$

$$\therefore \text{resto} = x - 154.$$

Rpta.: B

6. Un profesor del curso de Matemática Básica le dice a José que la nota que ha obtenido es el cuádruplo del resto de dividir $q(x)$ por $((6-n)x+n-4)$, donde $q(x)$ es el cociente que se obtuvo al dividir $D(x) = -x^4 + (4-n)x^3 + 2x^2 - 2x + 4 - n$ por $(x^2 - x + 2)$; siendo el resto $(4x - n)$. Además le dice el profesor que le aumentará n puntos si encuentra correctamente el valor de n . Si José resuelve todo correctamente, ¿cuál es su nota final?

A) 14 B) 15 C) 17 D) 16

Solución:

Tenemos que

$$D(x) = (x^2 - x + 2)q(x) + 4x - n$$

$$-x^4 + (4-n)x^3 + 2x^2 - 2x + 4 - n = (x^2 - x + 2)q(x) + 4x - n$$

$$-x^4 + (4-n)x^3 + 2x^2 - 6x + 4 = (x^2 - x + 2)q(x)$$

División exacta, aplicaremos Horner Invertido

2	4	-6	2	4-n	-1	
1		2	-2			
-1			-2	2		→ n = 5
				-1	1	
	2	-2	-1	0	0	

→ $q(x) = -x^2 - 2x + 2$, se divide por $(x+1)$

Por el Teorema del Resto $x+1=0 \rightarrow x=-1$

→ Resto = $q(-1) = 3$

→ Nota que ha obtenido Jose = $4(3) = 12$

∴ Nota Final de Jose = $12 + 5 = 17$.

Rpta.: C

7. Si el resto de dividir el polinomio $p(x) = x^{32} - 7x^{27} + 3x^{22} - 4x^{18} + 2x^{13} - x^7 - 6$ por $(x^3 + 1)$ se divide por $(x-3)$; se obtiene el polinomio $h(x)$, halle la suma de los coeficientes de $h(x)$.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2

Solución:

Por el Teorema del resto

$$x^3 + 1 = 0 \rightarrow x^3 = -1$$

$$\rightarrow p(x) = x^{32} - 7x^{27} + 3x^{22} - 4x^{18} + 2x^{13} - x^7 - 6$$

$$\rightarrow p(x) = (x^3)^{10} x^2 - 7(x^3)^9 + 3(x^3)^7 x - 4(x^3)^6 + 2(x^3)^4 x - (x^3)^2 x - 6$$

$$\rightarrow \text{resto} = (-1)^{10} x^2 - 7(-1)^9 + 3(-1)^7 x - 4(-1)^6 + 2(-1)^4 x - (-1)^2 x - 6 ,$$

$$\rightarrow \text{resto} = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

$$\rightarrow \frac{\text{resto}}{x-3} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = h(x) = x+1$$

$$\therefore \text{Suma de coeficientes de } h(x): h(1) = 1+1 = 2.$$

Rpta.: D

8. El polinomio mónico $p(x)$ de tercer grado, tiene el mismo valor numérico para $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$ y la suma de coeficientes de $p(x)$ es 135. Halle el resto de dividir $p(x)$ por $(x-2)$.

A) 179

B) 172

C) 171

D) 164

Solución:

$$\text{Se obtiene } p(x) = (x+1)(x+2)(x+3) + r ,$$

$$p(1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 + r = 135 \rightarrow r = 111$$

$$p(x) = (x+1)(x+2)(x+3) + 111$$

Por el Teorema del Resto

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\therefore \text{Resto} = p(2) = 3 \cdot 4 \cdot 5 + 111 = 171.$$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si la suma de coeficientes del resto que se obtiene al dividir el polinomio $p(x) = (x-2)^4 - (x+2)^3$ por $d(x) = x^2 - 4$ representa el precio en decenas de soles de un celular, ¿cuánto se pagará por el celular si hacen un descuento del 5%?

A) 152 soles

B) 144 soles

C) 218 soles

D) 260 soles

Solución:

Por el algoritmo de la división:

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

$$\rightarrow (x-2)^4 - (x+2)^3 = (x^2-4)q(x) + ax + b$$

$$\rightarrow (x-2)^4 - (x+2)^3 = (x+2)(x-2)q(x) + ax + b$$

Para $x = 2$: $-64 = 2a + b$

Para $x = -2$: $256 = -2a + b$

$$\rightarrow b = 96 \wedge a = -80$$

$$\rightarrow r(x) = -80x + 96 \rightarrow r(1) = -80(1) + 96 = 16$$

$\rightarrow$ 160 soles cuesta el celular, descuento del 5%

$$\therefore \text{Pagara} = 160 - 160(5\%) = 152 \text{ soles.}$$

Rpta.: A

2. En la siguiente tabla de Ruffini:

	A	L	G	E	B	R	A
$x = -2$		-6	-2	6	2	-2	0
	A	1					A
							RESTO

Halle la suma de coeficientes del polinomio dividendo.

A) 4

B) 6

C) 8

D) 10

Solución:

De la tabla se tiene:

$$-2A = -6 \rightarrow A = 3$$

$$L - 6 = 1 \rightarrow L = 7$$

$$(G - 2)(-2) = 6 \rightarrow G = -1$$

$$(E + 6)(-2) = 2 \rightarrow E = -7$$

$$(B + 2)(-2) = -2 \rightarrow B = -1$$

$$(R - 2)(-2) = 0 \rightarrow R = 2$$

$$\therefore A + L + G + E + B + R + A = 6.$$

Rpta.: B

3. La edad actual de Catalina en años es igual a la diferencia de los residuos que se obtienen al dividir el polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ por $d(x) = x^2 + x - 2$ y por $t(x) = x^2 - x + 2$, en ese orden. ¿Hace cuánto tiempo Catalina cumplió 7 años?

A) 6 años

B) 3 años

C) 8 años

D) 1 año

Solución:

Usando el método de Horner para hallar los residuos:

$$p(x) \div d(x)$$

1	1	2	-3	5
-1		-1	2	
2		1	-1	2
	1	1	-2	7

$$p(x) \div t(x)$$

1	1	2	-3	5
1		1	-2	
-2		3	3	-6
	1	3	-2	-1

Tenemos los residuos residuo $d(x) = -2x + 7$ y residuo $t(x) = -2x - 1$,

→ la edad actual de Catalina $= (-2x + 7) - (-2x - 1) = 8$ años.

∴ Catalina cumplió 7 años hace un año.

Rpta.: D

4. Si la siguiente división $\frac{(x^2 - x + 2)^5 - m(x - 2)^4(x + 1)^4 + nx^3(x - 1)^3}{x^2 - x + 1}$ es exacta, halle el valor de $(81m + n + 7)$.

A) 7

B) 8

C) 12

D) 5

Solución:

Aplicamos Teorema de resto: $x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow x^2 - x = -1$

En el dividendo

$$(x^2 - x + 2)^5 - m(x - 2)^4(x + 1)^4 + nx^3(x - 1)^3 =$$

$$(x^2 - x + 2)^5 - m(x^2 - x - 2)^4 + n(x^2 - x)^3 =$$

$$\rightarrow \text{Resto} = (-1 + 2)^5 - m(-1 - 2)^4 + n(-1)^3 = 0$$

$$\rightarrow 1 - 81m - n = 0 \rightarrow 81m + n = 1$$

$$\therefore 81m + n + 7 = 8.$$

Rpta.: B

5. Halle el resto de dividir el polinomio $p(x)$ de grado 5 por $(x + 2)$, sabiendo que es divisible por $x^3 + 2$, además $p(x)$ se anula para $x = 3$, $x = -1$, y la suma de coeficientes de $p(x)$ es -36 .

A) 100

B) -20

C) 90

D) -90

Solución:

$$p(x) \div (x^3 + 2) \rightarrow \text{resto} = 0, p(x) \div (x - 3) \rightarrow \text{resto} = 0, p(x) \div (x + 1) \rightarrow \text{resto} = 0$$

$$\rightarrow p(x) \div (x^3 + 2)(x - 3)(x + 1) \rightarrow \text{resto} = 0$$

$p(x)$ de grado 5

$$\rightarrow p(x) = (x^3 + 2)(x - 3)(x + 1)a$$

$$\rightarrow p(1) = (1^3 + 2)(1 - 3)(1 + 1)a = -36 \rightarrow a = 3$$

$$\rightarrow p(x) = 3(x^3 + 2)(x - 3)(x + 1)$$

$$\rightarrow p(x) \div (x + 2) \rightarrow \text{resto} = p(-2) = -90$$

$$\therefore \text{resto} = p(-2) = -90.$$

Rpta.: D

6. El día de hoy una avícola ha vendido $p(3)$ pollos al precio de $p(2)$ soles cada pollo. Si $p(2)$ y $p(3)$ son los valores obtenidos del polinomio $p(x) = x^5 + ax + b$; siendo $p(x)$ divisible por $(x^2 + x - 1)$, ¿cuánto obtuvo hoy la avícola por la venta total de dicha cantidad de pollos?

A) 5775 soles B) 5700 soles C) 3750 soles D) 3800 soles

Solución:

$$\frac{p(x)}{(x^2 + x - 1)} = \frac{x^5 + ax + b}{x^2 + x - 1} \rightarrow \text{resto} = 0, \text{ por el Teorema del Resto } x^2 = 1 - x$$

$$\rightarrow p(x) = (x^2)^2 x + ax + b \rightarrow p(x) = (1 - x)^2 x + ax + b$$

$$\rightarrow p(x) = x - 2x^2 + x^3 + ax + b$$

$$\rightarrow p(x) = x - 2(1 - x) + (1 - x)x + ax + b$$

$$\rightarrow \text{resto} = 5x - 3 + ax + b$$

$$\rightarrow \text{resto} = (5 + a)x + b - 3 = 0 \rightarrow a = -5 \wedge b = 3$$

$$\rightarrow p(x) = x^5 - 5x + 3$$

$$\rightarrow p(2) = 25 \wedge p(3) = 231$$

$$\therefore \text{Venta Total} = (25)(231) = 5775 \text{ soles.}$$

Rpta.: A

7. Halle el valor de m , si $(-x^2 + y^2 + z^2)(x^2 - y^2 + z^2)(x^2 + y^2 - z^2) + mx^2y^2z^2$ es divisible por $(x + y + z)$.

A) 0 B) 2 C) 5 D) 8

Solución:

Por el Teorema del resto

$$x + y + z = 0 \rightarrow x = -(y + z), y = -(x + z), z = -(x + y)$$

$$\rightarrow \left(-(y + z)^2 + y^2 + z^2 \right) \left(x^2 - (x + z)^2 + z^2 \right) \left(x^2 + y^2 - (x + y)^2 \right) + mx^2y^2z^2$$

$$\rightarrow (-2yz)(-2xz)(-2xy) + mx^2y^2z^2 = 0$$

$$\therefore m = 8.$$

Rpta.: D

8. Calcule el resto de dividir un polinomio $p(x)$ por $(x - 10)$, si se sabe que el término independiente del cociente es 5 y el término independiente del polinomio $p(x)$ es 2.

A) 58 B) 52 C) 56 D) 50

Solución:

$$\text{Sabemos que } p(x) = (x - 10)q(x) + r(x)$$

$$p(x) = (x - 10)q(x) + \text{resto} \rightarrow \text{resto} = p(10)$$

$$\text{datos } q(0) = 5, p(0) = 2$$

$$\rightarrow p(0) = (0 - 10)q(0) + \text{resto}$$

$$\rightarrow 2 = (-10)5 + \text{resto}$$

$$\therefore \text{resto} = 52.$$

Rpta.: B

Álgebra

EJERCICIOS

1. José tiene un terreno de forma rectangular de $(6x^2 + bx + 4)$ metros cuadrados de área y ha dividido su terreno en “r” regiones de forma rectangular; tal que en cada una de dichas regiones la medida del ancho es de x metros y la medida del largo excede en dos metros a la medida del ancho. Después de que José ha dividido su terreno, aún le ha quedado una región, cuya área en metros cuadrados, está representada por $t(x)$. Si r es la mayor cantidad de regiones y la suma de los coeficientes de $t(x)$ es seis, halle el área de cada una de las “r” regiones cuando a x se le asigna el valor de $(b - 10)$.

A) $15m^2$

B) $24m^2$

C) $35m^2$

D) $48m^2$

Solución:

Del dato: el área de cada región r es $x(x + 2)$

Del algoritmo de la división:

$$6x^2 + bx + 4 = rx(x + 2) + (mx + n) ; \text{ donde } mx + n = t(x)$$

$$6x^2 + bx + 4 = rx(x + 2) + (mx + n)$$

$$\text{Para } x = 0 : 4 = n$$

$$\text{Para } x = -2: 28 - 2b = -2m + 4$$

$$\rightarrow m = b - 12$$

$$\text{Luego el resto : } t(x) = mx + n = (b - 12)x + 4$$

$$\text{Del dato: } 6 = t(1) = b - 12 + 4 = b - 8 \rightarrow b = 14$$

$$\text{De la condición del problema: } x = b - 10 = 4$$

$$\therefore \text{ El área de cada región r, cuando } x = 4, \text{ es } x(x + 2) = 24m^2.$$

Rpta.: B

2. Ricardo tiene en su casa un depósito con (x^3) litros de agua, del cual extrae dos litros de agua y luego agrega un litro. Si el total de litros de agua que hay ahora en el depósito, lo ha distribuido de forma exacta en $(x^2 + x + m)$ recipientes de siete litros cada uno, donde m es un valor entero positivo, ¿cuántos recipientes necesitó Ricardo, si cada uno de ellos estuvo totalmente lleno?
- A) 73 B) 51 C) 74 D) 57

Solución:

Al ser una división exacta:

$$x^3 - 2 + 1 = (x^2 + x + m) \underbrace{(ax + b)}_{\text{cociente}} = (x^2 + x + m)(x + b)$$

$$\rightarrow x^3 - 1 = (x^2 + x + m)(x + b)$$

Si $x = 0$: $-1 = bm$; donde $m \in \mathbb{Z}^+$

$$\rightarrow m = 1 \text{ y } b = -1$$

Luego, la capacidad de cada recipiente es: $(x + b) = x - 1 = 7$, entonces $x = 8$

Necesitó $x^2 + x + m = 73$ recipientes.

Rpta.: A

3. Sean los polinomios $p(x) = 2(x^3 + 6) - (3x^2 + 23x)$ y $d(x) = 2x - 1$, tales que al dividir $p(x)$ por $d(x)$ se obtiene como cociente $q(x)$. En la siguiente sucesión numérica,

$$\frac{q(6)}{3}, 10, q(6) - 4, q(-5), \frac{q(7)}{2} + 7, m, n, \dots$$

halle la suma de m y n .

- A) 46 B) 50 C) 48 D) 56

Solución:

$$\begin{array}{r|rrrr} x = \frac{1}{2} & 2 & -3 & -23 & 12 \\ & & 1 & -1 & -12 \\ \hline \therefore & 2 & -2 & -24 & 0 \end{array}$$

$$\text{Luego } p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 2x - 24) = (2x - 1)(x^2 - x - 12)$$

$$\text{Entonces: } q(x) = x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

$$\rightarrow q(6) = 18, q(-5) = 18, q(7) = 30$$

Luego la sucesión numérica es: 6, 10, 14, 18, 22, m , n

Entonces, $m = 26$ y $n = 30$

$$m + n = 56.$$

Rpta.: D

4. Elizabeth confecciona bolsas de material reciclado. En la tabla adjunta, se muestra la ganancia, en soles, que ha obtenido al vender dichas bolsas, durante los tres primeros días de la semana,

	Lunes	Martes	Miércoles
Ganancia	mx^4	$(nx^3 + 10)$	$(14x^2 + 5x)$

Con el total de su ganancia obtenida, durante dichos días, ha comprado la mayor cantidad de polos posibles al precio de $(2x^2 + x + 3)$ soles cada uno, con lo que le ha sobrado 4 soles. Si la compra de Elizabeth fue de 16 polos, ¿cuánto le costó cada polo?

- A) 24 soles B) 14 soles C) 13 soles D) 39 soles

Solución:

Ganancia total: $mx^4 + nx^3 + 14x^2 + 5x + 10$

Luego: $mx^4 + nx^3 + 14x^2 + 5x + 10 = (2x^2 + x + 3)q(x) + 4$

$\rightarrow mx^4 + nx^3 + 14x^2 + 5x + 6 = (2x^2 + x + 3)q(x)$

Aplicamos Horner en: $\frac{6 + 5x + 14x^2 + nx^3 + mx^4}{3 + x + 2x^2}$

3	6	5	14	n	m
-1		-2	-4		
-2		$\bar{3}$	-1	-2	
		$\bar{9}$		-3	-6
	2	1	3	$n-5$	$m-6$

Luego: $n = 5$ y $m = 6$

El número de polos es: $2 + x + 3x^2 = 16$, entonces: $x = 2$

Por tanto el precio de cada polo es: $2x^2 + x + 3 = 13$ soles.

Rpta.: C

5. Carlos tiene $(ax^4 - 3x^3 + ax^2 - ax - 6)$ canicas y al repartirlas a sus hermanos le ha sobrado $(a + 4)$ canicas; pero si hubiese repartido equitativamente el total de canicas que tenía a sus $(x - 3)$ primos, no le habría quedado canica alguna. Halle la cantidad de canicas que le sobró a Carlos cuando las repartió entre sus hermanos.

- A) 4 B) 5 C) 3 D) 1

Solución:

Aplicando el teorema del resto en : $\frac{ax^4 - 3x^3 + ax^2 - ax - 6}{x - 3}$

i) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

ii) El resto es : $ax^4 - 3x^3 + ax^2 - ax - 6$, cuando $x = 3$

entonces el resto es : $a(3)^4 - 3(3)^3 + a(3)^2 - a(3) - 6 = 0$

$\rightarrow a = 1$

Por tanto, al repartir las canicas entre sus hermanos, le sobró 5 canicas.

Rpta.: B

6. La Biblioteca Ricardo Palma cuenta con $(x^3 + 8)(x - 6)(x^2 - 16)$ unidades de libros, de los cuales $(4x^3(x - 2)^3 + 20)$ libros van a ser donados a una biblioteca al interior del país. El total de libros que queden serán distribuidos en $(x^2 - 2x + 6)$ estantes. Si en cada estante se distribuirá la mayor y la misma cantidad de libros, ¿cuántos libros quedarán sin ser colocados en algún estante?

A) 3

B) 5

C) 4

D) 6

Solución:

En $\frac{(x^3 + 8)(x - 6)(x^2 - 16) - 4x^3(x - 2)^3 - 20}{(x^2 - 2x + 6)}$, aplicamos el teorema del resto:

i) $x^2 - 2x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - 2x = -6$

ii) El resto es : $r(x) = (x^3 + 8)(x - 6)(x^2 - 16) - 4x^3(x - 2)^3 - 20$, cuando

$x^2 - 2x = -6$

$$r(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 6)(x + 4)(x - 4) - 4(x^2 - 2x)^3 - 20$$

$$= (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x - 24) - 4(x^2 - 2x)^3 - 20$$

Reemplazando $x^2 - 2x = -6$ en $r(x)$, entonces el resto es:

$$(-6 + 4)(-6 - 8)(-6 - 24) - 4(-6)^3 - 20 = 4$$

Por tanto, sobran 4 libros.

Rpta.: C

7. El número de socios que actualmente tiene un Club Departamental está representado por el valor numérico de un polinomio $p(t)$ cuando a t se le asigna el valor de tres. Si $p(t)$ es de grado tres, y es tal que al dividirlo, separadamente, por $(t + 1)$, $(t + 2)$ y $(t + 3)$, siempre se obtiene como resto 7, halle el número de socios que tiene dicho Club Departamental, si el término independiente de $p(t)$ es 67.

A) 1127

B) 1214

C) 1321

D) 1207

Solución:

i) $p(t) \div (t+1) \rightarrow p(t) = (t+1)q(t) + 7$, luego $p(t) - 7$ es divisible por $(t+1)$

Análogamente, $(p(t) - 7)$ es divisible por $(t+2)$ y $(t+3)$

Luego $(p(t) - 7)$ es divisible por $(t+1)(t+2)(t+3)$

ii) $p(t) - 7 = M(t+1)(t+2)(t+3)$; donde M es una constante, desde que $p(t)$ es de grado 3.

$$67 = p(0) \rightarrow 67 - 7 = M(1)(2)(3); \text{ así } M = 10$$

entonces, $p(t) = 10(t+1)(t+2)(t+3) + 7$

iii) $\therefore p(3) = 10(4)(5)(6) + 7 = 1207$.

Rpta.: D

8. **Hotel Marriot:** Es considerado por algunos turistas como la primera opción entre los principales hoteles. El polinomio que permite aproximar el porcentaje de turistas que escogieron el hotel Marriot para hospedarse es $(R(t+4) - 3)$; donde t es el número de años transcurridos a partir del 2014 y $0 \leq t \leq 2$.

Si $R(t)$ es el resto que se obtiene de dividir $(2t^{28} + 6t^{27} - 3t^{19} - 9t^{18} + t^2 - 3t - 18)$ por $(t^3 + 3t^2 - t - 3)$, halle aproximadamente el porcentaje de turistas que escogieron el hotel Marriot para hospedarse en el 2015.

A) 38%

B) 54%

C) 45%

D) 41%

Solución:

i) $p(t) = 2t^{28} + 6t^{27} - 3t^{19} - 9t^{18} + t^2 - 3t - 18$

$$\begin{aligned} \rightarrow p(t) &= (2t^{28} + 6t^{27}) - (3t^{19} + 9t^{18}) + (t^2 + 3t) - (6t + 18) \\ &= (t+3)(2t^{27} - 3t^{18} + t - 6) \end{aligned}$$

ii) $q(t) = t^3 + 3t^2 - t - 3 = (t+3)(t^2 - 1)$

iii) Aplicamos teorema del resto en:
$$\frac{(t+3)(2t^{27} - 3t^{18} + t - 6)}{(t+3)(t^2 - 1)} = \frac{(2t^{27} - 3t^{18} + t - 6)}{(t^2 - 1)}$$

- Dividendo: $2(t^2)^{13}t - 3(t^2)^9 + t - 6$

- $t^2 = 1$, luego el resto es: $2(1)^{13}t - 3(1)^9 + t - 6 = 3t - 9$

Entonces el resto original es: $R(t) = (3t - 9)(t+3) = 3t^2 - 27$

iv) Para el año 2015: $t = 1$ y $(R(t+4) - 3) = R(5) - 3 = 45\%$

En el 2015 se hospedaron 45% turistas.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Karem ha ahorrado diariamente $(x+4)^{2n}$ soles durante $(x+6)$ días, y con dicho ahorro le ha alcanzado para pagar mensualmente el estudio de su hijo en un taller de música, pagando mensualmente $(x^2 + 8x + 15)$ soles. Si después de dichos pagos, le ha sobrado 10 soles, que es la menor cantidad posible de dinero, ¿cuánto fue el ahorro total de Karem, inicialmente, sabiendo que no superó los 700 soles, y n es un valor entero positivo?

A) 640 soles B) 441 soles C) 288 soles D) 460 soles

Solución:

Por el algoritmo de la división:

$$(x+4)^{2n}(x+6) = (x^2 + 8x + 15)q(x) + ax + b$$

$$= (x+3)(x+5)q(x) + ax + b$$

Para $x = -3$: $3 = -3a + b$

Para $x = -5$: $1 = -5a + b$

Entonces, $a = 1$, $b = 6$.

Luego el resto: $x + 6 = 10 \rightarrow x = 4$

El ahorro inicial fue: $(x+4)^{2n}(x+6) = 8^{2n}(10) < 700 \rightarrow n = 1$

$\therefore$ El ahorro inicial: $(x+4)^2(x+6) = 640$ soles.

Rpta.: A

2. El administrador de una academia de natación dispone de $p(x)$ soles para comprar $\left[4 + p\left(\frac{m-n}{4}\right)\right]$ docenas de implementos necesarios para el programa de "aqua bebe". Si con dicha cantidad de dinero compra una cantidad de implementos (la mayor posible) al precio de $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$ soles cada uno, le sobrará $(mx + n)$ soles; y si compra a $(x^2 - 4x + 3)$ soles cada implemento, entonces la menor cantidad posible que le podría sobrar de la cantidad de dinero que dispone es $(2x - 6)$ soles, ¿cuántas unidades de implementos se necesita comprar en dicha academia de natación?

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48

Solución:

Aplicando el Algoritmo de la División:

i) $p(x) = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)q_1(x) + (mx + n)$

ii) $p(x) = (x^2 - 4x + 3)q_2(x) + (2x - 6) = (x - 3)(x - 1)q_2(x) + (2x - 6)$

$$\text{Para } x = 1 : p(1) = -4$$

$$\text{Para } x = 3 : p(3) = 0$$

$$\text{De (i): } -4 = p(1) = m + n$$

$$0 = p(3) = 3m + n$$

$$\rightarrow m = 2 \wedge n = -6$$

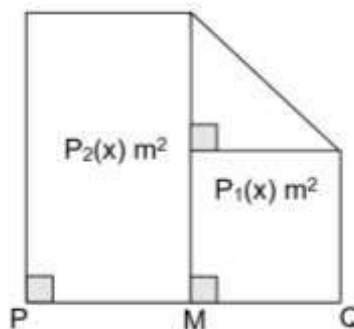
$$\text{Luego } p\left(\frac{m-n}{4}\right) = p(2) = \left(2^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6\right)q_1(2) + (m(2) + n) = 2m + n = -2$$

$$\therefore \text{Se necesita comprar : } 4 + p\left(\frac{m-n}{4}\right) = 2 \text{ docenas de implementos.}$$

Rpta.: B

3. Olga tiene un terreno dividido en tres parcelas, como se muestra en la figura adjunta. El área de dos de las parcelas están representadas por $p_1(x)$ y $p_2(x)$ en metros cuadrados, donde $p_1(x) = 2x^3 - x^2 - 3x - 6$ y $p_2(x) = 2p_1(x)$. Si el área de la tercera parcela es de 47 metros cuadrados, y M es punto medio de $\overline{PQ}$, siendo $MQ = (x - 2)$ metros; donde x es entero positivo, halle la medida de $\overline{PQ}$.

- A) 6 metros
B) 4 metros
C) 8 metros
D) 10 metros



Solución:

De los datos se tiene: $PM = (x - 2)$

i) $(2x^3 - x^2 - 3x - 6) = p_1(x) = a(x - 2)$, donde a es la medida de un lado de la parcela correspondiente a $p_1(x)$.

Aplicando Ruffini en: $(2x^3 - x^2 - 3x - 6) \div (x - 2)$

2	-1	-3	-6
x = 2	4	6	6
2	3	3	0

Luego, $a = 2x^2 + 3x + 3$

ii) $p_2(x) = (x - 2)b$; donde b es la medida de un lado de la parcela correspondiente a $p_2(x)$

$$\rightarrow (x - 2)b = p_2(x) = 2p_1(x) = 2(x - 2)(2x^2 + 3x + 3)$$

$$\rightarrow b = 4x^2 + 6x + 6$$

iii) En la parcela de forma triangular:

$$47 = \frac{(x-2)h}{2} \quad ; \text{ siendo } h = b - a = 2x^2 + 3x + 3$$

$$\rightarrow 47 = \frac{(x-2)(2x^2 + 3x + 3)}{2} \rightarrow (x-2)(2x^2 + 3x + 3) = (2)(47) \rightarrow x = 4$$

$$\therefore PQ = 2(x-2) = 4m$$

Rpta.: B

4. El capital, en soles, de una compañía petrolera está representado por el resto que se obtiene al dividir $(x^4 - 9x^2)^3 + (9 - x^2)^6$ por $(x^2 - 1)$. Si dicha compañía invirtió dicho capital en siete proyectos, invirtiendo en cada proyecto la misma cantidad de dinero, pero la mayor posible, ¿cuánto invirtió en cada proyecto?

A) 37 376 soles B) 35 726 soles C) 37 267 soles D) 39 547 soles

Solución:

Aplicamos teorema de resto en: $\frac{(x^4 - 9x^2)^3 + (9 - x^2)^6}{x^2 - 1}$

i) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1$

ii) Resto : $(x^4 - 9x^2)^3 + (9 - x^2)^6$, cuando $x^2 = 1$

$$\rightarrow \text{El resto es: } (1-9)^3 + (9-1)^6 = (-8)^3 + (8)^6 = (8)^3((8)^3 - 1) = 512(511) = 261\,632$$

iii) Capital: 261 632 soles lo reparte en 7 proyectos.

$\therefore$ En cada proyecto invirtió 37 376 soles.

Rpta.: A

Lea la siguiente información, y en base a ello, responda las preguntas 5 y 6.

Calculadora científica: Los botones FSP y JPM de la calculadora científica ISJA, permiten hallar, respectivamente, el resto $R(x)$ y el cociente $Q(x)$, que se obtiene al ingresar los polinomios dividendo y divisor, en ese orden, y luego presionar el botón correspondiente.

5. Jahir, un estudiante de medicina, realizó en la calculadora ISJA, las siguientes operaciones (1) y (2), en el orden dado :

Operación (1) : $12x^6 - x^5 + 3x^3 - 12x + 5$; $3x^4 + 2x^3 - x + 1$; FSP

Operación (2) : $R(x)$; $3x - 1$; FSP

¿Cuál fue el resultado final obtenido por Jahir, después de realizar ambas operaciones?

A) 1 B) -2 C) 0 D) -3

Solución:

Para la operación (1)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3 & 12 & -1 & 0 & 3 & 0 & -12 & 5 \\
 -2 & & -8 & 0 & 4 & -4 & & \\
 0 & & \overline{-9} & 6 & 0 & -3 & 3 & \\
 1 & & & \overline{6} & -4 & 0 & 2 & -2 \\
 -1 & & & & & & & \\
 \hline
 \therefore & 4 & -3 & 2 & 3 & -7 & -7 & 3
 \end{array}
 \quad ; \quad R(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$$

Para la operación (2) :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -7 & -7 & 3 \\
 \frac{1}{3} & \downarrow & 1 & -2 & -3 \\
 \hline
 & 3 & -6 & -9 & 0
 \end{array}
 \quad Q(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 6x - 9) = x^2 - 2x - 3$$

Al finalizar la segunda operación, el resultado fue cero.

Rpta.: C

6. Con los polinomios dividendo y divisor de la operación (2) anterior, Jahir ahora presionó el botón JPM y obtuvo el polinomio $Q(x)$. Finalmente, Jahir realizó la siguiente operación:

$$x^n(x-3)^n + (3x^2 - 9x - 8)^{n-1} + x - 3^n ; Q(x) - x ; \quad \text{FSP}$$

¿Qué resultado obtuvo Jahir?

- A) $x-1$ B) $3x$ C) $x+1$ D) x

Solución:

- i) Realizando la operación con JPM en : $R(x)$; $3x-1$; donde $R(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$: se obtuvo $Q(x) = x^2 - 2x - 3$

- ii) Operación FSP con : $x^n(x-3)^n + (3x^2 - 9x - 8)^{n-1} + x - 3^n$ y $x^2 - 3x - 3$

Aplicamos el teorema del resto en $\frac{x^n(x-3)^n + (3x^2 - 9x - 8)^{n-1} + x - 3^n}{x^2 - 3x - 3}$

- Dividendo: $(x^2 - 3x)^n + (3(x^2 - 3x) - 8)^{n-1} + x - 3^n$

- $x^2 - 3x = 3$, luego el resto es $(3)^n + (3(3) - 8)^{n-1} + x - 3^n = x + 1$

El resultado obtenido fue $x + 1$.

Rpta.: C

7. En un experimento se observa que el crecimiento de una población de bacterias en una colonia, está determinada por el polinomio $p(x) = -r(x) + 3$, donde $p(x)$ indica el número de bacterias (en millones) luego de transcurridas “x” horas desde el inicio del experimento. Si $r(x)$ es el residuo de dividir $(2x^{42} + 2 + 2x^{41} + x^{21} + x^{22} + 2x)$ por $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$, ¿cuántas bacterias había al inicio del experimento en dicha colonia?

- A) 2 millones B) 1 millón C) 0 D) 3 millones

Solución:

$$\frac{2x^{42} + 2 + 2x^{41} + x^{21} + x^{22} + 2x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{(2x^{41} + x^{21} + 2)(x + 1)}{(x^2 + x + 1)(x + 1)}$$

- i) Aplicamos la propiedad (5.1.2), la división modificada es: $\frac{(2x^{41} + x^{21} + 2)}{(x^2 + x + 1)}$

- ii) Nuevamente aplicamos propiedad (5.1.2), y la división modificada es:

$$\frac{(2x^{41} + x^{21} + 2)(x - 1)}{(x^2 + x + 1)(x - 1)}$$

- iii) Por el teorema del resto: $0 = (x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 - 1 \rightarrow x^3 = 1$

Luego el resto es : $(2x^{41} + x^{21} + 2)(x - 1)$, cuando $x^3 = 1$

$$\rightarrow \left(2(x^3)^{13} x^2 + (x^3)^7 + 2 \right) (x - 1) = (2x^2 + 3)(x - 1) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3$$

$$= -2x^2 + 3x - 1 = (-2x + 1)(x - 1)$$

Entonces en la división (ii) el resto verdadero es: $\frac{(-2x + 1)(x - 1)}{x - 1} = -2x + 1$

Por tanto en la división inicial se tiene que el resto verdadero es $r(x) = (-2x + 1)(x + 1)$

Entonces $p(x) = -r(x) + 3 = -(-2x + 1)(x + 1) + 3$

Al inicio había $p(0) = -r(0) + 3 = -(-2(0) + 1)(1) + 3 = 2$ millones de bacterias

Rpta.: A

8. Observe los polinomios en cada uno de los casilleros y encuentre la relación que hay entre ellos,

8
5
3

$x^2 - x + 3$
$x - 1$
3

$x^2 + 2x$
$x + 1$
-1

$P(x)$
$Q(x)$
$-3x + 1$

$P^4(x)$
$Q(x)$
$H(x)$

Si $Q(x) = (x+1)x + 1$, halle el valor de $H(1)$.

A) 138

B) -146

C) 116

D) -164

Solución:

De la ley de formación:

- i) Al dividir $P(x)$ por $Q(x)$ se obtiene como resto $(-3x+1)$

$$\text{Luego: } P(x) = [(x+1)x + 1]q_1(x) + 1 - 3x$$

- ii) ∴ Al dividir: $\frac{P^4(x)}{Q(x)} = \frac{[[[(x+1)x + 1]q_1(x) + 1 - 3x]^4]}{(x+1)x + 1}$, aplicamos el teorema del resto

$$\bullet (x+1)x + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -x - 1$$

$$\bullet \text{Resto} = [[0]q_1(x) + 1 - 3x]^4 = (1 - 3x)^4 = ((3x - 1)^2)^2 = (9x^2 - 6x + 1)^2$$

$$= (9(-x - 1) - 6x + 1)^2 = (-15x - 8)^2 = 225x^2 + 240x + 64 = 225(-x - 1) + 240x + 64$$

Luego el resto es: $H(x) = 15x - 161$

$$H(1) = -146.$$

Rpta.: B

Álgebra

EJERCICIOS

1. Determine el producto de coeficientes del resto que se obtiene al dividir entre , donde el término independiente del cociente es 3.

A) 935 B) - 935 C) 187 D) - 187 E) 1020

Solución:

Por el algoritmo de la división

$$x^{n+1} - 2x^n + x + 1 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$x = 2 \rightarrow 2^{n+1} - 2(2^n) + 2 + 1 = 4a + 2b + c$$

$$3 = 4a + 2b + c \dots\dots\dots(1)$$

$$x = 1 \rightarrow 1 - 2 + 1 + 1 = a + b + c$$

$$1 = a + b + c \dots\dots\dots(2)$$

$$x = 0 \rightarrow 1 = (-1)(-2)(2)q(0) + c$$

$$c = -11$$

de (1) y (2)

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ 4a + 2b = 14 \end{cases}$$

$$a = -5$$

$$b = 17$$

$$\therefore \text{producto de coeficientes del resto} = (-11)(-5)(17) = 935$$

Rpta.: A

2. Al dividir $p(x) = 3x^{30} + mx + n$ entre $d(x) = x + 1$ se obtiene como resto 2 y la suma de coeficientes del cociente es 5, halle el valor de $(mn + 1)$.

A) 18 B) 21 C) 25 D) 7 E) 37

Solución:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrrrrr}
 x = -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 & m & n \\
 & & -3 & 3 & -3 & & & \dots\dots\dots & -3 & 3 & -3 & -m + 3 \\
 \hline
 & 3 & -3 & 3 & -3 & & & \dots\dots\dots & -3 & 3 & m - 3 & n - m + 3
 \end{array}$$

1) Suma de coeficientes del cociente $= 3 - 3 + 3 - 3 + \dots\dots - 3 + 3 + m - 3$

$$5 = m$$

2) Resto $= 2$

$$n - m + 3 = 2$$

$$n = 4$$

$$\therefore mn + 1 = 21$$

Rpta.: B

3. Al dividir $p(x) = 6x^6 + 4x^5 + x^4 + 5x^2 - 2$ por $d(x) = 2x^3 + x + 2$, determine el valor de verdad en cada una de las proposiciones

- I) El cociente es $3x^3 + 2x^2 - x + 4$
 II) El resto es $x^2 + 3x + 3$
 III) El término independiente del cociente es -4
 IV) EL coeficiente principal del resto es 2

A) FFVV B) FFFV C) FVVV D) FVVF E) VFVV

Solución:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 2 & 6 & 4 & 1 & 0 & 5 & 0 & -2 \\
 0 & & 0 & -3 & -6 & & & \\
 -1 & & \overline{4} & 0 & -2 & -4 & & \\
 -2 & & & \overline{-2} & 0 & 1 & 2 & \\
 & & & & \overline{-8} & 0 & 4 & 8 \\
 \hline
 & 3 & 2 & -1 & -4 & 2 & 6 & 6
 \end{array}$$

$$q(x) = 3x^3 + 2x^2 - x - 4$$

$$r(x) = 2x^2 + 6x + 6$$

Rpta.: A

4. Si $p(x) = ax^5 + (b+a)x^4 + cx^3 + x^2 + 4$ es divisible por $d(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 2$ y $q(x)$ es el cociente, halle el valor de $a+b+c+q(0)$.

A) 5 B) 9 C) 19 D) 9 E) 7

Solución:

2	4	0	1	c	b+a	a
3		6	-2	-4		
-1		6	9	-3	-6	
-2			8	12	-4	-8
	2	3	4	0	0	0

1) $a - 8 = 0$

$a = 8$

2) $c - 4 - 3 + 12 = 0$

$c = -5$

3) $b + a - 6 - 4 = 0$

$b = 2$

4) $q(x) = 4x^2 + 3x + 2$

$q(0) = 2$

$\therefore q(0) + a + b + c = 7$

Rpta.: E

5. El $\overline{(a+6)a}$ % del número de hombres es igual al $\overline{(a+4)a}$ % del número de mujeres en el CEPREUNMSM, ¿Qué tanto por ciento del total representa el número de mujeres?. Siendo "a+1" el resto de dividir $\frac{x^5 + x^2 + 1}{(x-1)^2 + x}$.

A) 25% B) 40% C) 15% D) 60% E) 45%

Solución:

$$\frac{x^5 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$$

$$\frac{(x^5 + x^2 + 1)(x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x + 1)}$$

$$\frac{(x^3)^2 + x^3x^2 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + 1}$$

Por el teorema del resto

$$1) x^3 + 1 = 0 \rightarrow x^3 = -1$$

$$2) \text{resto}(x + 1) = (-1)^2 + (-1)x^2 + (-1) + x^2 + x + 1$$

$$\text{resto}(x + 1) = 1(x + 1)$$

$$\text{resto} = 1$$

$$3) \text{Por dato } a + 1 = 1$$

$$a = 0$$

$$4) 60\% \text{Número de Hombres} = 40\% \text{Número de Mujeres}$$

$$\frac{\text{Número de Hombres}}{\text{Número de Mujeres}} = \frac{2k}{3k}$$

Por regla de tres

$$100\% \dots\dots\dots 5k$$

$$y \dots\dots\dots 3k$$

$$\therefore y = 60\%$$

Rpta.: D

6. En un examen de admisión se propuso la siguiente pregunta

“Al dividir $p(x)$ por $d(x) = x^2 - 1$ se obtiene un residuo igual a $x + 2$, determine el resto que se obtiene al dividir $p^3(x)$ por $d(x) = x^2 - 1$ ”

Los postulantes Ana, Lucia y Carla respondieron que el resto es $13x + 14$; $14x + 13$ y $13x - 14$ respectivamente.

Determine el valor de verdad de las proposiciones

- I) Ana obtuvo el residuo correcto
- II) Lucia obtuvo el residuo correcto
- III) Carla no obtuvo el residuo correcto

- A) VFF B) FVF C) VFV D) FFV E) FVV

Solución:

$$p(x) = (x^2 - 1)q(x) + x + 2$$

$$i) \quad p(1) = 3$$

$$ii) \quad p(-1) = 1$$

$$p^3(x) = (x^2 - 1)q(x) + ax + b$$

$$iii) \quad p^3(1) = a + b$$

$$27 = a + b$$

$$iv) \quad p^3(-1) = -a + b$$

$$1 = -a + b$$

$$\begin{cases} a + b = 27 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 27 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

$$a = 13$$

$$b = 14$$

$$\therefore \text{resto} = 13x + 14$$

Rpta.: C

7. Si $p(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 + ax + b$ se divide entre $(x + 2)$ y $(x - 2)$ se obtienen como restos $r_1(x)$ y $r_2(x)$ respectivamente los cuales suman 6, además la suma de coeficientes de $p(x)$ es 20, halle el resto de dividir $p(x)$ entre $x^2 + 1$.

- A) $12x - 6$ B) $13x + 5$ C) $15x - 2$ D) $17x + 8$ E) $14x + 8$

Solución:

1) Por el teorema del resto

$$p(-2) = r_1(x)$$

$$-24 - 2a + b = r_1(x)$$

2) Por el teorema del resto

$$p(2) = r_2(x)$$

$$24 + 2a + b = r_2(x)$$

De 1) y 2)

$$+ \begin{cases} -24 - 2a + b = r_1(x) \\ 24 + 2a + b = r_2(x) \end{cases}$$

$$2b = 6$$

$$b = 3$$

3) Suma de coeficientes de $p(x) = 20$

$$p(1) = 20$$

$$a + b = 20$$

$$a = 17$$

4) Hallando el resto al dividir

$$\frac{(x^2)^2 + 3x^2x - 4x^2 + 17x + 3}{x^2 + 1}$$

Por el teorema del resto

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$\therefore \text{resto} = (-1)^2 + 3(-1)x - 4(-1) + 17x + 3 = 14x + 8$$

Rpta.: E

8. Sea $p(x)$ un polinomio de tercer grado y mónico tal que es divisible separadamente por $(x-2)$ y $(x+3)$. Si 24 es el resto que se obtiene de dividir $p(x)$ entre $x+2$, halle el resto de dividir $(x+5)p(x)$ entre (x^2+x+2) .

A) 150 B) 162 C) 184 D) 176 E) 144

Solución:

$$1) \frac{p(x)}{(x-2)(x+3)} ; \text{resto} = 0$$

$$p(x) = (x-2)(x+3)q(x) + 0$$

$$2) p(x) = (x-2)(x+3)\underbrace{(x+a)}_{\text{cociente}}$$

3) Por el teorema del resto

$$p(-2) = 24$$

$$(-4)(-2+a)(1) = 24$$

$$a = -4$$

$$4) \text{ hallando el resto al dividir } \frac{(x+5)p(x)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{(x+5)(x-2)(x+3)(x-4)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{(x^2+x-20)(x^2+x-6)}{x^2+x+2}$$

Por el teorema del resto

$$x^2+x+2=0$$

$$x^2+x=-2$$

$$\therefore \text{resto} = (-2-20)(-2-6) = 176$$

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si al dividir $p(x) = nx^4 + (n^2-1)x^3 - n^2x - x + n^2 - n + 3$ entre $d(x) = nx - 1$ se obtiene como resto 3 ($n \neq 0$), halle el producto de coeficientes del cociente.

A) 4 B) - 8 C) - 4 D) - 64 E) 64

Solución:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & n & n^2 - 1 & 0 & -n^2 - 1 & n^2 - n + 3 \\
 x = \frac{1}{n} & & 1 & n & 1 & -n \\
 \hline
 & n & n^2 & n & -n^2 & n^2 - 2n + 3 = 3 \\
 \div n & & & & & \\
 \hline
 & 1 & n & 1 & -n &
 \end{array}$$

$$n(n-2) = 0$$

$$n = 2$$

$$\therefore \text{Producto de coeficientes del cociente} = 1(n)(1)(-n) = -4$$

Rpta.: C

2. $p(x)$ es un polinomio de segundo grado mónico. Al dividir $p(x)$ entre $(x-3)$ el resto es 30 y al dividir $p(x)$ entre $(x+1)$ el resto es 2. Halle el resto al dividir el polinomio $h(x) = (x+3)^n + 1$ entre $p(x)$.

- A) $x-4$ B) $x-2$ C) $x+2$ D) $x+1$ E) $x+4$

Solución:

$$p(x) = x^2 + ax + b$$

$$1) \quad p(3) = 9 + 3a + b \quad p(-1) = 1 - a + b$$

$$30 = 9 + 3a + b \quad 2 = 1 - a + b$$

$$\begin{cases} 3a + b = 21 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

$$a = 5 ; \quad b = 6$$

$$p(x) = x^2 + 5x + 6$$

$$2) \quad \frac{(x+3)^n + 1}{x^2 + 5x + 6}$$

por Algoritmo de la división

$$(x+3)^n + 1 = (x^2 + 5x + 6)q(x) + \underbrace{cx + d}_{\text{RESTO}}$$

$$x = -2 \rightarrow 2 = -2c + d$$

$$x = -3 \rightarrow 1 = -3c + d$$

$$\begin{cases} -2c + d = 2 \\ -3c + d = 1 \end{cases}$$

$$c = 1 ; \quad d = 4$$

$$\therefore \text{resto} = x + 4$$

Rpta.: E

3. Al dividir $p(x) = 4x^8 + 2x^6 + 6x^4 + 1$ entre $d(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ se obtiene por cociente $q(x)$ y como resto $r(x)$.

Si Carlos tiene $q(1)$ hermanos varones y $(4 + r(1))$ hermanas, ¿Cuántos hermanos tiene Carlos en total?

- A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) 11

Solución:

Haciendo un cambio de variable $x^2 = y$

2	4	2	6	0	1
1		2	-2		
-1		$\bar{4}$	2	-2	
			$\bar{6}$	3	-3
	2	2	3	1	-2

$$1) q(x) = 2x^4 + 2x^2 + 3$$

$$q(1) = 7$$

$$2) r(x) = x^2 - 2$$

$$r(1) + 4 = -1 + 4 = 3$$

$\therefore$ 10 hermanos

Rpta.: C

4. Si $p(x)$ es divisible separadamente por $(x-2)^2$; $(x+3)^2$ y $(x-4)^2$; además $p(x)$ es mónico y de grado 8, determine el resto de dividir $p(x)$ entre $(x-3)$; sabiendo que la suma de coeficientes y el término independiente de $p(x)$ son 432 y 48^2 respectivamente.

A) 360 B) 240 C) 150 D) 180 E) 252

Solución:

$$p(x) = (x-2)^2(x+3)^2(x-4)^2(x^2 + bx + c)$$

$$1) p(0) = 4(9)(16)c$$

$$48(48) = 4(9)(16)c$$

$$c = 4$$

$$2) p(1) = 16(9)(16)(1+b+c)$$

$$432 = 144(1+b+c)$$

$$b = -2$$

$$3) p(x) = (x-2)^2(x+3)^2(x-4)^2(x^2 - 2x + 4)$$

Por el teorema del resto

$$\therefore \text{resto} = p(3) = 36(7) = 252$$

Rpta.: E

5. La empresa Fotomagic reparte sus utilidades de $(a^{12} - a^{11} - 1)$ soles entre sus $(a^2 + a + 1)$ accionistas en forma equitativa. Si la empresa luego de repartir sus utilidades se quedo con 4 soles, determine el número de accionistas.

A) 7 B) 13 C) 31 D) 43 E) 91

Solución:

$$\frac{a^{12} - a^{11} - 1}{a^2 + a + 1}$$

$$\frac{(a^{12} - a^{11} - 1)(a - 1)}{(a^2 + a + 1)(a - 1)}$$

$$\frac{(a^3)^4 a - 2(a^3)^4 + (a^3)^3 a^2 - a + 1}{a^3 - 1}$$

Por el teorema del resto

$$1) a^3 - 1 = 0$$

$$a^3 = 1$$

$$2) \text{ resto } (a - 1) = (1)^4 a - 2(1)^4 + (1)^3 a^2 - a + 1 \\ = a^2 - 1$$

$$\text{resto} = a + 1$$

$$3) \text{ por dato el resto} = 4$$

$$a + 1 = 4$$

$$a = 3$$

$\therefore$ Número de accionistas = 13

Rpta.: B

6. Si se divide el polinomio $p(x)$ por $(x - 1)$, se obtiene como resto 3, al dividir el cociente por $(x + 1)$ el resto es 5; de la última división el cociente se divide por $(x + 2)$ y su resto es 8. Halle la suma de coeficientes del resto de dividir $p(x)$ entre $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

- A) 9 B) 6 C) 3 D) 1 E) 0

Solución:

Por el algoritmo de la división

$$1) p(x) = (x-1)q(x) + 3$$

$$2) q(x) = (x+1)q_1(x) + 5$$

$$3) q_1(x) = (x+2)q_2(x) + 8$$

$$p(x) = (x-1)q(x) + 3$$

$$= (x-1)[(x+1)q_1(x) + 5] + 3$$

$$= (x-1)(x+1)q_1(x) + 5(x-1) + 3$$

$$= (x-1)(x+1)[(x+2)q_2(x) + 8] + 5(x-1) + 3$$

$$= (x-1)(x+1)(x+2)q_2(x) + 8(x^2-1) + 5(x-1) + 3$$

$$= (x-1)(x+1)(x+2)q_2(x) + 8x^2 + 5x - 10$$

$$\therefore \text{Suma de coeficientes del resto} = 8 + 5 - 10 = 3$$

Rpta.: C

7. Si $p(x) = (b^2 - 1)x^4 - (8 + a)x^3 + 2ax^2 + 4x - 8$ es divisible entre $d(x) = ax^2 - x + 2$; ($b < 1$) donde $q(x)$ es el cociente, determine el resto de dividir $q(x)$ entre $(2x + 2a + b)$.

- A) 1 B) -1 C) 11 D) 2 E) -11

Solución:

$$\begin{array}{r|rrrr|rr}
 2 & -8 & 4 & 2a & -8-a & b^2-1 \\
 1 & & -4 & 4a & & \\
 & & \overline{0} & & & \\
 -a & & & 0 & 0 & \\
 & & & \overline{6a} & 3a & -3a^2 \\
 \hline
 & -4 & 0 & 3a & 0 & 0
 \end{array}$$

1) $2a - 8 = 0$

$a = 4$

2) $b^2 - 1 - 3a^2 = 0$

$b^2 - 1 = 48$

$b = -7$

3) $\frac{12x^2 - 4}{2x + 1}$

Por el teorema del resto

$$\therefore \text{resto} = 12 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 4 = -1$$

Rpta.: B

8. Sea $p(x)$ un polinomio mónico de cuarto grado con coeficientes enteros; tal que $p(x) - 2$ es divisible separadamente entre $(x-1)$ y $(x+3)$. Al dividir $p(x)$ entre $(x-2)$ el resto obtenido es 7 y además $p^2(x) - 4$ es divisible entre $(x+1)$, halle $p(-2)$.

A) 13

B) -13

C) 17

D) -19

E) -16

Solución:

$p(x) - 2 = (x-1)(x+3) \underset{\text{cociente}}{q(x)}$

$$p(x) = (x-1)(x+3) \underbrace{(x^2 + ax + b)}_{\text{cociente}} + 2$$

1) $p(2) = 7$

$p(2) = (2-1)(2+3)(4+2a+b) + 2$

$7 = (1)(5)(4+2a+b) + 2$

$2a+b = -3$

$$2) \quad p^2(-1) = 4$$

$$p(-1) = (-1-1)(-1+3)(1-1a+b) + 2$$

$$[p(-1)]^2 = [(-2)(2)(1-1a+b) + 2]^2$$

$$4 = [(-2)(2)(1-1a+b) + 2]^2$$

$$(-2)(2)(1-1a+b) + 2 = 2 \quad \vee \quad (-2)(2)(1-1a+b) + 2 = -2$$

$$-4(1-1a+b) = 0$$

$$b - a = 0$$

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ -a + b = -1 \end{cases}$$

$$a = -\frac{2}{3}$$

por dato a es entero

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ -a + b = 0 \end{cases}$$

$$a = -1 ; b = -1$$

$$p(x) = (x-1)(x+3)(x^2 - x - 1) + 2$$

$$p(-2) = -3(1)(5) + 2 = -13$$

Rpta.: B

Álgebra

EJERCICIOS

1. Los restos de dividir el polinomio $p(x) = ax^6 - bx^3 + 6c$ separadamente por $(x-2)$, $(x-1)$ y $(x+1)$ son -31 , 4 y -4 respectivamente. Halle el valor de $2ab + 12c$.
- A) -4 B) 9 C) 6 D) 4 E) 10

Solución:

Por dato: $p(2) = -31 \wedge p(1) = 4 \wedge p(-1) = -4 \rightarrow 64a - 8b + 6c = -31$

$$\begin{cases} 64a - 8b + 6c = -31 \\ a - b + 6c = 4 \\ a + b + 6c = -4 \end{cases} \rightarrow a = -1 \wedge b = -4 \wedge c = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 2ab + 12c = 2(-1)(-4) + 12\left(\frac{1}{6}\right) = 10$$

Rpta.: E

2. Carmen y Juan gastan diariamente por movilidad $(n+2)^2$ soles y $(m+n+3)$ soles respectivamente, donde m y n son valores que se obtienen, sabiendo que $[x^4 - (n-2)x^2 - 1]$ es un factor del polinomio $p(x) = cx^5 - 8x^4 - cx^3 + mx^2 - cx + 8$, $c \neq 0$.
- ¿Cuánto será el gasto total por movilidad de Carmen y Juan, en 5 días?

- A) S/ 195 B) S/ 185 C) S/ 210 D) S/ 200 E) S/ 190

Solución:

i) Por dato: $cx^5 - 8x^4 - cx^3 + mx^2 - cx + 8 = [x^4 - (n-2)x^2 - 1](cx - 8) \rightarrow$
 $cx^5 - 8x^4 - cx^3 + mx^2 - cx + 8 = cx^5 - 8x^4 - (n-2)cx^3 + 8(n-2)x^2 - cx + 8$
 $\rightarrow -cx^3 = -(n-2)cx^3 \wedge +mx^2 = 8(n-2)x^2 \rightarrow n = 3 \wedge m = 8$

- ii) Gasto diario por movilidad de Carmen: $(n+2)^2 = 25$ soles
 Gasto diario por movilidad de Juan: $(m+n+3) = 14$ soles
 Gasto total diario de ambos es 39 soles

$$\therefore \text{Gasto total por movilidad de ambos, en 5 días será: } 5(39) = 195 \text{ soles}$$

Rpta.: A

3. La suma de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir el polinomio $p(x) = 3x^{15} - 5x^{12} - 4x^6 + x^3 + 8$ entre $d(x) = x^3 - 2$, representa los días que trabajó Luis en un proyecto de construcción. Si Luis inició su trabajo el día jueves, en qué día lo terminó, si se sabe que trabajó los días domingos y feriados.

A) Martes B) Jueves C) Miércoles D) Lunes E) Sábado

Solución:

i) Dado $p(x) = 3x^{15} - 5x^{12} - 4x^6 + x^3 + 8$ y $d(x) = x^3 - 2$.

Por cambio de variable: $x^3 = a$, entonces;

$$p(a) = 3a^5 - 5a^4 - 4a^2 + a + 8 \text{ y } d(a) = a - 2$$

ii) Por el método de Ruffini;

2	3	-5	0	-4	1	8
		6	2	4	0	2
	3	1	2	0	1	10

$$\text{El cociente } q(a) = 3a^4 + a^3 + 2a^2 + 1 \rightarrow q(x) = 3x^{12} + x^9 + 2x^6 + 1$$

$$\text{La suma de coeficientes de } q(x) = 3 + 1 + 2 + 1 = 7$$

$\therefore$ Luis terminó su trabajo el día miércoles.

Rpta.: C

4. Mario es un empresario textil que dispone de $(x^4 - 2x^2 + 3x - 2)$ dólares para repartir como un bono extra por su desempeño, entre sus $(x^2 + x - 2)$ empleados que tienen más de un año de servicios. Si x representa los años de servicios de un empleado, ¿cuánto recibirá un empleado que tiene 10 años laborando en la empresa de Mario?

A) \$ 86 B) \$ 76 C) \$ 56 D) \$ 91 E) \$ 24

Solución:

i) Dinero que dispone Mario: $(x^4 - 2x^2 + 3x - 2)$ dólares.

Número de empleados: $(x^2 + x - 2)$

Años de servicios de un empleado: $x > 1$

De los datos se tiene una división exacta; $\frac{x^4 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 + x - 2}$

ii) Usando el método de Horner;

$$\begin{array}{c|ccc|cc}
 1 & 1 & 0 & -2 & 3 & -2 \\
 -1 & & -1 & 2 & & \\
 2 & & & 1 & -2 & \\
 & & & & -1 & 2 \\
 \hline
 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0
 \end{array}$$

El bono extra de cada empleado es: $q(x) = x^2 - x + 1$

El bono que recibirá un empleado con $x=10$ años de trabajo es:

$$q(10) = 10^2 - 10 + 1 = 91 \text{ dólares.}$$

Rpta.: D

5. La gigantesca isla de basura en el océano Pacífico está creciendo a gran velocidad, según una nueva investigación publicada en la revista Nature. A tal punto que dicha Isla de basura del océano Pacífico ya es más grande que Perú y Ecuador. De acuerdo al estudio, esta área de residuos que se expande por un $\left(\frac{R-23}{100}\right)$ millones de Km^2 , contiene grandes toneladas de plástico. Halle el área de residuo de basura que hay en el Pacífico sabiendo que R es la suma de coeficientes del resto de dividir: $(x^{182} + 182)$ entre $(x^3 + x^2 + x + 1)$.

A) 1,6 millones Km^2 .

B) 2,4 millones Km^2 .

C) 5,2 millones Km^2 .

D) 4,8 millones Km^2 .

E) 2,5 millones Km^2 .

Solución:

i) Por el algoritmo de la división:

$$x^{182} + 182 = (x + 1)(x^2 + 1)q(x) + r(x)$$

$$(x^{182} + 182)(x - 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)q(x) + (x - 1)r(x)$$

$$x^{183} - x^{182} + 182(x - 1) = (x^4 - 1)q(x) + (x - 1)r(x)$$

ii) De: $x^4 - 1 = 0 \rightarrow x^4 = 1$

$$(x^4)^{45} \cdot x^3 - (x^4)^{45} \cdot x^2 + 182(x - 1) = (x^4 - 1)q(x) + (x - 1)r(x)$$

$$x^3 - x^2 + 182(x - 1) = (x - 1)r(x) \rightarrow (x - 1)r(x) = (x - 1)(x^2 + 182)$$

$$r(x) = x^2 + 182 \rightarrow r(1) = R = 183$$

$\therefore$ El área de residuo de basura que hay en el Océano Pacífico es:

$$\left(\frac{R-23}{100}\right) = 1,6 \text{ millones de } \text{km}^2.$$

Rpta.: A

6. Un alumno al dividir el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 10x - 13$ entre un polinomio $d(x)$, lineal y mónico cometió cierto error y cambio a 10 y -13 por 5 y -3 respectivamente, resultando un cociente menor en 5 unidades del cociente correcto y el resto no se alteró. Determine el cociente correcto.

- A) $x^2 + x - 8$ B) $x^2 - x + 1$ C) $x^2 - x + 8$
 D) $x^2 - x + 3$ E) $x^2 + x + 1$

Solución:

i) División correcta: $x^3 - 3x^2 + 10x - 13 = (x + a)q(x) + r(x)$

ii) División incorrecta: $x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = (x + a)[q(x) - 5] + r(x)$

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = (x + a)q(x) - 5x - 5a + r(x)$$

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = x^3 - 3x^2 + 10x - 13 - 5x - 5a$$

$$\rightarrow -5a = 10 \rightarrow a = -2 \rightarrow d(x) = x - 2$$

iii) La división correcta es:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 10 & -13 \\ 2 & & 2 & -2 & 16 \\ \hline & 1 & -1 & 8 & 3 \end{array}$$

El cociente correcto es $q(x) = x^2 - x + 8$.

Rpta.: C

7. Sea $p(x)$ un polinomio de sexto grado, que tiene raíz cuadrada exacta y es divisible separadamente por $(x^2 + 2)$ y $(x + 4)$. Además, si $p(x)$ se divide entre $(x + 3)$ su resto es 1936. Halle el término independiente de $p(x)$.

- A) 900 B) 256 C) 1600 D) 576 E) 1024

Solución:

i) $p(x) = a(x^2 + 2)^2(x + 4)^2 \wedge d(x) = x + 3$

$$p(-3) = 1936 \rightarrow a(11)^2(1)^2 = 1936 \rightarrow a = 16$$

$$p(x) = 16(x^2 + 2)^2(x + 4)^2$$

ii) El término independiente es:

$$p(0) = 16(2)^2(4)^2 = 1024$$

Rpta.: E

8. El precio de un libro preuniversitario de Algebra es $[r(5)+9]$ soles, donde $r(x)$ es el resto que se obtiene al dividir el polinomio $p(x) = 6(x+5)^{2n} + 4(x+5)^{2n-1} - 2(x+5)^3 - 3$ por $d(x) = x^2 + 10x + 24$. ¿Cuánto se tendrá que pagar por la compra de cuatro libros?

A) S/ 120 B) S/ 128 C) S/ 140 D) S/ 160 E) S/ 112

Solución:

- i) Por el algoritmo de la división;

$$6(x+5)^{2n} + 4(x+5)^{2n-1} - 2(x+5)^3 - 3 = (x^2 + 10x + 24)q(x) + r(x)$$

$$6(x+5)^{2n} + 4(x+5)^{2n-1} - 2(x+5)^3 - 3 = (x+4)(x+6)q(x) + ax + b$$

- ii) Usando el teorema del resto en:

$$\text{Si } x = -4 \rightarrow -4a + b = 5 \dots\dots(\alpha)$$

$$\text{Si } x = -6 \rightarrow -6a + b = 1 \dots\dots(\beta)$$

$$\begin{cases} -4a + b = 5 \\ -6a + b = 1 \end{cases} \rightarrow a = 2 \wedge b = 13$$

$$r(x) = 2x + 13 \rightarrow r(5) = 2(5) + 13 = 23$$

- iii) Precio de un libro preuniversitario de Algebra es: $r(5) + 9 = 23 + 9 = 32$ soles.

$\therefore$ Por 4 libros se pagará $4(32) = 128$ soles.

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $p(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ se divide separadamente por $(x-2)$ y $(x-3)$ se obtienen los residuos 4 y 2 respectivamente. ¿Qué constante habrá que sumarle a $p(x)$ para que sea divisible entre $x + 4a + b - 1$?

A) -20 B) -30 C) -35 D) -40 E) -25

Solución:

- i) Por teorema del resto;

$$p(2) = 4 \rightarrow 8 - 12 + 2a + b = 4 \rightarrow 2a + b = 8$$

$$p(3) = 2 \rightarrow 27 - 27 + 3a + b = 2 \rightarrow 3a + b = 2$$

$$\begin{cases} 2a + b = 8 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \rightarrow a = -6 \wedge b = 20$$

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 20$$

- ii) Sea $n \in \mathbb{R}$, la constante

$$\rightarrow d(x) = x + 4a + b - 1 \rightarrow d(x) = x - 24 + 20 - 1 \rightarrow d(x) = x - 5$$

$$\rightarrow p(5) = 0 \rightarrow 125 - 75 - 30 + 20 + n = 0 \rightarrow n = -40$$

Rpta.: D

2. Si $d(x) = x - 3$ es un factor común de los polinomios $p(x) = x^4 - (2a - 1)x - (7b + 1)$ y $q(x) = x^3 - (2a - 3b)x + 8 - 4a$, halle la suma de las cifras del valor $a^2 - b^2$.
- A) 11 B) 6 C) 10 D) 12 E) 9

Solución:

i) $p(x)$ es divisible por $d(x)$;

3	1	0	0	$-2a + 1$	$-7b - 1$
		3	9	27	$84 - 6a$
	1	3	9	$28 - 2a$	$83 - 6a - 7b$

$$r(x) = 83 - 6a - 7b = 0 \rightarrow 6a + 7b = 83$$

ii) $q(x)$ es divisible por $d(x)$;

3	1	0	$-2a + 3b$	$8 - 4a$
		3	9	$-6a + 9b + 27$
	1	3	$-2a + 3b + 9$	$-10a + 9b + 35$

$$r(x) = -10a + 9b + 35 = 0 \rightarrow 10a - 9b = 35$$

iii) Resolviendo:

$$\begin{cases} 6a + 7b = 83 \\ 10a - 9b = 35 \end{cases} \rightarrow a = 8, b = 5 \rightarrow a^2 - b^2 = 64 - 25 = 39$$

Suma de las cifras de 39 es 12.

Rpta.: D

3. La doctora Grace, el día martes atendió un número de pacientes que es la suma de coeficiente del resto de dividir $p(x) = (x^2 + 1)^{150} + 5x^{160} + x^{175} + 14(x^2 + 2)^{180}$ por $d(x) = x^2 + 1$. Si el día miércoles atendió cinco pacientes más, halle el total de pacientes que atendió la doctora Grace, en ambos días.

- A) 41 B) 45 C) 37 D) 40 E) 44

Solución:

Por el teorema del resto: $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$

$$p(x) = (x^2 + 1)^{150} + 5(x^2)^{80} + (x^2)^{87}x + 14(x^2 + 1 + 1)^{180}$$

$$\rightarrow r(x) = (0)^{150} + 5(-1)^{80} + (-1)^{87}x + 14(0 + 1)^{180}$$

$$\rightarrow r(x) = -x + 19$$

La suma de coeficiente del resto es 18 = Número de pacientes atendidos día martes.

Número de pacientes que atendidos el día miércoles = 18 + 5 = 23

Total de pacientes que atendidos = 23 + 18 = 41

Rpta.: A

4. Al dividir el polinomio $p(x) = cx^4 + bx^3 + cx^2 - 4x + 5$ entre $d(x) = x^2 + 2$, se obtiene el cociente $q(x) = dx^2 + ex + f$ y el residuo $r(x) = -2x + 1$. Halle el valor de $M = ed + f$.

- A) -1 B) -4 C) 4 D) 0 E) -5

Solución:

- i) Por el algoritmo de la división:

$$cx^4 + bx^3 + cx^2 - 4x + 5 = (x^2 + 2)q(x) - 2x + 1$$

$$\rightarrow cx^4 + bx^3 + cx^2 - 2x + 4 = (x^2 + 2)q(x) + 0$$

- ii) Por el método de Horner y ordenando el dividendo y divisor en forma creciente:

2	4	-2	c		b	c
0		0	-2			
-1		-2	0		1	
			$\overline{c-2}$		0	$\frac{2-c}{2}$
	2	-1	$\frac{c-2}{2}$		$b+1$	$\frac{c+2}{2}$

De (i), se tiene que el resto es cero, entonces: $b = -1$ y $c = -2$

$$\text{iii) } q(x) = dx^2 + ex + f \rightarrow q(x) = -2x^2 - x + 2$$

$$\therefore M = ed + f = (-1)(-2) + 2 = 4$$

Rpta.: C

5. Carlos tiene $p(x)$ dólares para la compra de un terreno. Si Carlos compra el terreno a $(x^4 - x - 78)$ dólares el metro cuadrado, le sobra de dinero $(x+15)$ dólares. ¿Cuánto de dinero le hubiese sobrado a Carlos, si el metro cuadrado de dicho terreno lo compra a $(x-3)$ dólares?

- A) \$16 B) \$20 C) \$32 D) \$14 E) \$18

Solución:i) Cantidad total de dinero: $p(x)$ dólaresÁrea total del terreno: $q(x)$ m²Si el precio de un m² es \$ $(x^4 - x - 78)$ $\rightarrow p(x) = (x^4 - x - 78)q(x) + x + 15$ ii) Si el precio de un m² es \$ $(x - 3)$ $\rightarrow p(x) = (x - 3)q(x) + r(x)$ Por teorema del resto: $r(x) = p(3) \rightarrow p(3) = (3^4 - 3 - 78)q(3) + 3 + 15 \rightarrow p(3) = 18$ $\therefore$ A Carlos le hubiese sobrado \$ 18.**Rpta.: E**

6. Si $p(x)$ es un polinomio de cuarto grado, cuyo coeficiente principal es 6, tiene como término independiente -4 , es divisible separadamente entre $(x+1)$ y $(x+2)$; y al dividirlo entre $(x-2)$, el residuo es 240. Halle la suma de coeficientes de $p(x)$.

A) 36

B) -18

C) 15

D) -2

E) 18

Solución:i) $p(x) = 6x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $p(0) = e = -4 \rightarrow p(x) = 6x^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 4$ ii) $p(-1) = 0 \rightarrow 6 - b + c - d - 4 = 0 \rightarrow -b + c - d = -2 \quad (\alpha)$ $p(-2) = 0 \rightarrow 96 - 8b + 4c - 2d - 4 = 0 \rightarrow -8b + 4c - 2d = -92 \quad (\beta)$ $p(2) = 240 \rightarrow 96 + 8b + 4c + 2d - 4 = 240 \rightarrow 4b + 2c + d = 74 \quad (\gamma)$

iii) Resolviendo;

$$\begin{cases} -b + c - d = -2 & (\alpha) \\ -8b + 4c - 2d = -92 & (\beta) \\ 4b + 2c + d = 74 & (\gamma) \end{cases} \rightarrow b = 17, c = 7, d = -8$$

 $p(x) = 6x^4 + 17x^3 + 7x^2 - 8x - 4$ $\therefore p(1) = 6 + 17 + 7 - 8 - 4 = 18$ **Rpta.: E**

7. El cuadro adjunto, muestra los ingresos obtenidos por una empresa en el primer trimestre del año en curso, por la venta de zapatillas (tipo I) para niños.

	Enero	Febrero	Marzo
Ingresos (soles)	$60\,000 - 8x^3$	$360x^2 - 2400x$	$120x^2$

En el segundo trimestre el total de los ingresos ha sido de $(7000x)$ soles. Si la diferencia de los ingresos de ambos trimestres, en ese orden, ha coincidido con el total de los ingresos obtenidos por la venta de $(x^2 - 35x + 300)$ zapatillas (tipo II) al precio de S/ 120 cada uno, halle el ingreso obtenido por la empresa en el mes de febrero por la venta de zapatillas tipo I.

A) S/ 12 000

B) S/ 15 000

C) S/ 9 000

D) S/ 7 000

E) S/ 21 000

Solución:

Sea $p(x)$ la diferencia de ambos ingresos trimestrales

$$p(x) = 60\,000 - 8x^3 + 360x^2 - 2400x + 120x^2 - 7000x$$

$$= -8x^3 + 480x^2 - 9400x + 60\,000$$

De los datos $p(x) = 120(x^2 - 35x + 300)$

$$\rightarrow 120 = \frac{-8x^3 + 480x^2 - 9400x + 60\,000}{x^2 - 35x + 300}$$

Dividiendo con el método de Horner, se obtiene: $120 = 8(25 - x)$

Luego $x=10$ (si $x=15$, $x=20$, no cumple)

Por tanto ingreso en febrero: 12 000 soles.

Rpta.: A

8. Si $r(x)$, es el resto que se obtiene al dividir el polinomio $p(x) = 5x^{136} - 12x^{27} + 2x^2 + 1$ entre $d(x) = x^2 + x + 1$, halle $r(8)$.

- A) 14 B) 11 C) 37 D) 9 E) 29

Solución:

i) Por el algoritmo de la división:

$$5x^{136} - 12x^{27} + 2x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)q(x) + r(x)$$

$$(5x^{136} - 12x^{27} + 2x^2 + 1)(x - 1) = (x^2 + x + 1)(x - 1)q(x) + (x - 1)r(x)$$

$$5x^{137} - 12x^{28} + 2x^3 + x - 5x^{136} + 12x^{27} - 2x^2 - 1 = (x^3 - 1)q(x) + (x - 1)r(x)$$

$$5(x^3)^{45}x^2 - 12(x^3)^9x + 2x^3 + x - 5(x^3)^{45}x + 12(x^3)^9 - 2x^2 - 1$$

$$= (x^3 - 1)q(x) + (x - 1)r(x)$$

ii) De: $x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1$

$$5x^2 - 12x + 2 + x - 5x + 12 - 2x^2 - 1 = (x - 1)r(x)$$

$$(x - 1)r(x) = 3x^2 - 16x + 13 \rightarrow (x - 1)r(x) = (3x - 13)(x - 1)$$

$$r(x) = 3x - 13 \rightarrow r(8) = 24 - 13 = 11$$

Rpta.: B

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

08

semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

Binomio de Newton

El binomio de Newton es una fórmula que se utiliza para hacer el desarrollo de una potencia n -ésima de un binomio; es decir se trata de expandir el desarrollo de $(a+b)^n$.

El teorema de Newton establece el desarrollo de $(a+b)^n$ como:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$\text{Es decir : } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Cálculo de un término cualquiera: T_{k+1} , en el desarrollo del binomio $(a+b)^n$ es:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$0 \leq k \leq n, \quad k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Ejemplo:

Calcule el término central en el desarrollo de $\left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

Solución:

En este caso $a = 3x^2 \wedge b = -\frac{1}{\sqrt{x}}$

Número de términos en el desarrollo igual a 11 $\rightarrow T_{k+1} = \binom{10}{k} (3x^2)^{10-k} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$
término central

El término central ocupa el lugar 6

$$\begin{aligned} T_{5+1} &= \binom{10}{5} (3x^2)^{10-5} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 \\ \text{término central} \\ &= \binom{10}{5} 3^5 x^{10} (-1)^5 x^{-\frac{5}{2}} \\ &= \underbrace{\binom{10}{5} 3^5 (-1)^5}_{\text{coeficiente del término central}} x^{\frac{15}{2}} \end{aligned}$$

Observaciones:

1. El desarrollo del binomio tiene $(n + 1)$ términos.

2. Si $a = b = 1 \Rightarrow (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, además se tiene:

$$\text{i) } \underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \binom{n}{8} + \dots}_{\text{Suma de términos de lugar impar}} = 2^{n-1}$$

$$\text{ii) } \underbrace{\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \binom{n}{9} + \dots}_{\text{Suma de términos de lugar par}} = 2^{n-1}.$$

3. T_C : término central

a) Si n es par, se tiene un único término central $\Rightarrow T_C = T_{\frac{n}{2} + 1}$

b) Si n es impar, se tiene dos términos centrales $\Rightarrow T_C = T_{\frac{n+1}{2}}$ y $T_C = T_{\frac{n+1}{2} + 1}$

Cocientes Notables

Son aquellos cocientes que provienen de divisiones exactas entre binomios que adoptan

la forma general: $\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$

El desarrollo de un cociente notable es:

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a} = x^{n-1} \pm x^{n-2} a + x^{n-3} a^2 \pm x^{n-4} a^3 + \dots \pm a^{n-1}, \text{ con } n \in \mathbb{Z}^+$$

Observación: En el desarrollo anterior se tiene n términos.

Propiedad

Si $\frac{x^p \pm y^r}{x^q \pm y^s}$ es un cociente notable, entonces el número de términos es $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$,

$q \neq 0, s \neq 0$.

Caso	División Indicada	Cociente Notable	Residuo: R
1	$\frac{x^n - a^n}{x - a}$	$x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + x^{n-4}a^3 + \dots + a^{n-1}$	$R = 0, n \in \mathbb{Z}^+$
2	$\frac{x^n - a^n}{x + a}$	$x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - x^{n-4}a^3 + \dots - a^{n-1}$	$R = 0, n \in \mathbb{Z}^+, \text{ par}$
3	$\frac{x^n + a^n}{x + a}$	$x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - x^{n-4}a^3 + \dots + a^{n-1}$	$R = 0, n \in \mathbb{Z}^+, \text{ impar}$
4	$\frac{x^n + a^n}{x - a}$	No es cociente notable	$R \neq 0, n \in \mathbb{Z}^+$

Cálculo de un término cualquiera: T_k , de un cociente notable.

1. Para el caso 1:

$$T_k = x^{n-k} a^{k-1} ; \quad 1 \leq k \leq n$$

2. Para los casos 2 y 3:

$$T_k = (-1)^{k-1} x^{n-k} a^{k-1} ; \quad 1 \leq k \leq n$$

El término central (T_C):

a) Si n es impar, se tiene un único término central $\Rightarrow T_C = T_{\frac{n+1}{2}}$

b) Si n es par, se tiene dos términos centrales $\Rightarrow T_C = T_{\frac{n}{2}}$ y $T'_C = T_{\frac{n}{2}+1}$

Ejemplo:

En el desarrollo del cociente notable $\frac{x^{m+3} - y^{3m+4}}{x^{m-5} - y^5}$, determine el tercer término.

Solución:

En este caso por ser Cociente Notable:

i) Número de términos $= \frac{m+3}{m-5} = \frac{3m+4}{5}$

calculando el valor de m

$$\frac{m+3}{m-5} = \frac{3m+4}{5}$$

$$5(m+3) = (3m+4)(m-5)$$

$$5m+15 = 3m^2 - 11m - 20$$

$$3m^2 - 16m - 35 = 0$$

$$(3m+5)(m-7) = 0$$

$$m = 7$$

Reemplazando:

$$\text{Número de términos} = \frac{7+3}{7-5} = 5$$

$$t_3 = (x^2)^{5-3} (y^5)^{3-1}$$

$$t_3 = x^4 y^{10}$$

EJERCICIOS

1. El club deportivo "San Sebastián" compró m camisetas deportivas de fútbol al precio unitario de $\overline{ab}$ soles ($a > b$), donde a y b son la solución de la ecuación $(n-1)! + n! = 1 + n$ y m es la solución de la ecuación $C_0^m + C_3^m = 221$. ¿Cuánto pagó el tesorero del club "San Sebastián" por la compra de las camisetas?

A) 252 soles B) 220 soles C) 320 soles D) 144 soles

2. En el desarrollo de la potencia $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^8$, el término independiente representa el número de animales de corral de Pedro y el coeficiente del tercer término representa el número de sus reses. Determine el número total de animales que tiene Pedro.

A) 2910 B) 2912 C) 2914 D) 2913

3. Los grados absolutos de los términos del desarrollo de la potencia $(x^4 + yz^5)^n$ representan los ahorros (en soles) de Pedrito, de cada uno de los meses del año 2019. Determine a cuánto ascienden los ahorros de Pedrito al finalizar el año 2019.

A) 616 soles B) 684 soles C) 660 soles D) 176 soles

4. Lunié quiere comprar en una tienda de instrumentos musicales una guitarra eléctrica que cuesta $(m.n)$ decenas de soles. Por aniversario de la tienda musical, le hacen un descuento del 8% del precio de lista. ¿Cuánto pagó Lunié por la guitarra?, si m y n satisfacen el hecho de que el término central del desarrollo de $\left(\frac{x^{2n+20}}{y} + \frac{y^m}{x^{2n-10}}\right)^{2n}$, es de la forma $(\alpha)x^{600}y^{60}$.

A) 656 soles B) 789 soles C) 736 soles D) 800 soles

5. Al analizar el desarrollo del cociente notable $\frac{x^n - y^{n+p}}{x^3 y^{n-3} - y^{n+2}}$, el término de lugar k es x^{18} . Calcule el valor de $\frac{p-2}{6}$.
- A) 10 B) 8 C) 2 D) 5
6. De un grupo de $5(a+8)$ estudiantes del Cepre UNMSM que ingresaron a la Universidad, $(a+9)$ alumnos ingresaron a Ingeniería civil, $(n+20)$ alumnos ingresaron a Medicina y los alumnos restantes ingresaron a Economía. Si n es el número de términos del desarrollo del cociente notable $\frac{x^{5a+1} - y^{a+5}}{x^{a-1} - y}$ ($a > 0$), halle el número de alumnos que ingresaron a Economía.
- A) 10 B) 12 C) 15 D) 25
7. El abuelo José va a repartir cierta cantidad de dinero entre sus nietos que lo han visitado hoy. Si entrega n dólares a cada uno de sus nietos le sobraría 8 dólares; pero, si entrega m dólares a cada uno de ellos le faltaría 41 dólares. ¿Cuántos nietos han visitado al abuelo José?, si m es el número de términos del desarrollo del cociente notable $\frac{(x^2)^{3n+21} - (y^4)^{3n+6}}{x^{n+1} + y^{2n-3}}$.
- A) 5 nietos B) 6 nietos C) 7 nietos D) 8 nietos
8. Halle el término independiente y su posición en el desarrollo de la potencia que se obtiene al encontrar el término central de la expansión del cociente notable que se genera de $\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{77} + \left(x - \frac{1}{x}\right)^{77}}{x}$.
- A) $-C_{18}^{36} \wedge 19$ B) $C_{19}^{38} \wedge 20$ C) $C_{18}^{38} \wedge 19$ D) $-2C_{19}^{38} \wedge 20$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El desarrollo de la potencia $\left(2x^{m+3} - \frac{5y^2}{x}\right)^{2n-1}$ tiene 40 términos, se sabe además que la diferencia de grados absolutos de sus términos centrales es 7 y que m representa la edad de Jorge en años. Si en el presente año 2020, Jorge ya cumplió años, ¿en qué año nació Jorge?
- A) 2015 B) 2016 C) 2014 D) 2009

2. El valor numérico del término central del desarrollo del cociente notable generado por $\frac{(x+2)^{28} - (x-2)^{28}}{16x(x^2+4)}$ para $x = \sqrt{6}$, representa el sueldo mensual de Luis (en soles). Si él decide ahorrar el 25% de su sueldo mensual por 6 meses, ¿a cuánto asciende su ahorro luego de los 6 meses?
- A) S/ 6414 B) S/ 9414 C) S/ 6442 D) S/ 6144
3. Nicolás le afirma a Marcelo: esta expresión $\frac{(x+y)^{m+n} - y^{2m}}{x(x+2y)}$ genera un cociente notable. Marcelo le dice a Nicolás: entonces, ¿cuántos términos tiene el desarrollo de la potencia $(u^m + v)^{2n+1}$, que contiene al monomio $(\alpha)u^{130}v^8$ como sumando?. Si Nicolás hizo bien sus cálculos, ¿cuál fue su respuesta?
- A) 19 términos B) 20 términos C) 21 términos D) 22 términos
4. En un mismo sistema de numeración, los números M y N son respectivamente los mayores posibles tales que la cantidad de cifras de N es la sexta parte de los dígitos que tiene M, disminuido en 4 unidades; además, al dividir en ese orden dichos números expresados en sus respectivas representaciones en base decimal generan un cociente notable que tiene 10 términos en su desarrollo. ¿Cuál es la edad actual de Paco en años?, si dicha edad es numéricamente igual al grado absoluto de tercer término del cociente generado.
- A) 26 años B) 42 años C) 38 años D) 32 años
5. Los grados absolutos de los términos de lugar 4, 6 y 7 del desarrollo de un cociente notable, del que se muestran tres términos consecutivos $\dots + 126x^8y^{15} + 84x^6y^{18} + 36x^4y^{21} + \dots$, coinciden numéricamente con la cantidad de lapiceros, lápices y agendas que compró una persona en una librería. Determine el número total de artículos que compró la persona en dicha librería.
- A) 68 B) 78 C) 56 D) 64
6. La señora Linares pagó n soles en una clínica para ser atendida por un dermatólogo, quién le recetó medicinas por el valor de t soles. Si n y t representan respectivamente, el número de términos y el grado absoluto de quinto término del desarrollo de un cociente notable, del cual se muestran dos términos consecutivos: $\dots + x^{114}y^{60} + x^{108}y^{64} + \dots$, ¿cuál fue el gasto total que realizó la Sra. Linares?
- A) S/ 235 B) S/ 221 C) S/ 231 D) S/ 191

7. Si el desarrollo del cociente notable $\frac{x^{p-2} - y^{q+2}}{x^2 - y^3}$ tiene n términos y la expansión de $(x^2 - y)^{2n+2}$ tiene 33 términos, halle $n+p+q$.
- A) 47 B) 90 C) 75 D) 88
8. El profesor Leoncio en un determinado momento de su clase anuncia a sus alumnos que bonificará con 2 puntos adicionales sobre la nota que obtengan en el promedio de prácticas al alumno que resuelva el siguiente problema: "Si el resultado de calcular $\binom{q}{p+8}$ es el producto de tres números primos a, b y c ($a > b > c$), halle $a+b+c$ ". Al cabo de un rato el profesor Leoncio recoge los resultados de sus alumnos, luego de revisarlos observa que ninguno obtuvo el resultado correcto, pero decide dar los 2 puntos de bonificación a los dos resultados más próximos a la suma correcta. Los alumnos Jorge, Fredy y Fernando obtuvieron 89, 92 y 99 como resultados respectivamente. ¿Quiénes recibirán los 2 puntos de bonificación?
Nota: los valores numéricos de p y q , son los del problema 7 de propuestos.
- A) Jorge y Fernando B) Fredy y Fernando
C) Jorge y Fredy D) Solo Fernando

Álgebra

EJERCICIOS

1. El club deportivo “San Sebastián” compró m camisetas deportivas de fútbol al precio unitario de $\overline{ab}$ soles ($a > b$), donde a y b son la solución de la ecuación $(n-1)! + n! = 1 + n$ y m es la solución de la ecuación $C_0^m + C_3^m = 221$. ¿Cuánto pagó el tesorero del club “San Sebastián” por la compra de las camisetas?

A) 252 soles B) 220 soles C) 320 soles D) 144 soles

Solución:

$$(n-1)! + n! = 1 + n \Rightarrow (n-1)! + n \cdot (n-1)! = 1 + n \Rightarrow (n+1) \cdot (n-1)! = n+1$$

$$\Rightarrow (n-1)! = 1 \Rightarrow (n=1 \vee n=2)$$

Si $a = 2$ y $b = 1$, el precio de cada camiseta es 21 soles.

$$C_0^m + C_3^m = 221 \Rightarrow 1 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 221 \Rightarrow m(m-1)(m-2) = (220) \cdot (2) \cdot (3)$$

$$m(m-1)(m-2) = (12)(11)(10) \Rightarrow m = 12$$

Se pagó $(12)(21) = 252$ soles.

Rpta.: A

2. En el desarrollo de la potencia $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^8$, el término independiente representa el número de animales de corral de Pedro y el coeficiente del tercer término representa el número de sus reses. Determine el número total de animales que tiene Pedro.

A) 2910 B) 2912 C) 2914 D) 2913

Solución:

$$T_{k+1} = C_k^8 (2x)^{8-k} (x^{-1})^k \text{ con } k \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$$

$$T_{k+1} = \left[C_k^8 (2)^{8-k} \right] x^{8-2k} \text{ con } k \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$$

$$\text{Si } 8 - 2k = 0 \Rightarrow k = 4$$

$$\text{El T.I. es } T_5 = C_4^8 (2)^4 = (70)(16) = 1120$$

$$T_3 = \left[C_2^8 (2)^6 \right] x^4 = (28)(64)x^4 = 1792x^4$$

luego, la cantidad de animales es $1120 + 1792 = 2912$.

Rpta.: B

3. Los grados absolutos de los términos del desarrollo de la potencia $(x^4 + yz^5)^n$ representan los ahorros (en soles) de Pedrito, de cada uno de los meses del año 2019. Determine a cuánto ascienden los ahorros de Pedrito al finalizar el año 2019.

A) 616 soles B) 684 soles C) 660 soles D) 176 soles

Solución:

Cada uno de los términos del desarrollo de $(x^4 + yz^5)^n$ representan los 12 meses del año 2019 entonces $n=11$.

Tenemos $(x^4 + yz^5)^{11} \Rightarrow T_{k+1} = C_k^{11} (x^4)^{11-k} (yz^5)^k$ con $k = 0, 1, 2, \dots, 11$

$\Rightarrow T_{k+1} = C_k^{11} x^{44-4k} y^k z^{5k}$ con $k = 0, 1, 2, \dots, 11$

$GA(T_{k+1}) = 44 + 2k, k = 0, 1, 2, \dots, 11$

Ahorro anual de Pedrito = $\sum_{k=0}^{11} (44 + 2k) = 44(12) + 11(12) = 660$ soles

Rpta.: C

4. Lunié quiere comprar en una tienda de instrumentos musicales una guitarra eléctrica que cuesta $(m.n)$ decenas de soles. Por aniversario de la tienda musical, le hacen un descuento del 8% del precio de lista. ¿Cuánto pagó Lunié por la guitarra?, si m y n

satisfacen el hecho de que el término central del desarrollo de $\left(\frac{x^{2n+20}}{y} + \frac{y^m}{x^{2n-10}} \right)^{2n}$, es de la forma $(\alpha)x^{600}y^{60}$.

A) 656 soles B) 789 soles C) 736 soles D) 800 soles

Solución:

El término central del desarrollo de $\left(\frac{x^{2n+20}}{y} + \frac{y^m}{x^{2n-10}} \right)^{2n}$ es $(\alpha)x^{600}y^{60}$

T.C. = $T_{n+1} = C_n^{2n} (x^{2n+20}y^{-1})^n (x^{10-2n}y^m)^n \equiv (\alpha)x^{600}y^{60}$

$\Rightarrow C_n^{2n} x^{30n} y^{n(m-1)} \equiv (\alpha)x^{600}y^{60} \Rightarrow \begin{cases} 30n = 600 \Rightarrow n = 20 \\ 20(m-1) = 60 \Rightarrow m = 4 \end{cases}$

Precio de la guitarra: $(4)(20)$ decenas de soles = 800 soles

Lunié pagó $\frac{92}{100}(800) = 736$ soles.

Rpta.: C

5. Al analizar el desarrollo del cociente notable $\frac{x^n - y^{n+p}}{x^3y^{n-3} - y^{n+2}}$, el término de lugar k es x^{18} . Calcule el valor de $\frac{p-2}{6}$.

A) 10 B) 8 C) 2 D) 5

Solución:

$$\frac{x^n - y^{n+p}}{x^3 y^{n-3} - y^{n+2}} = \frac{1}{y^{n-3}} \left(\frac{x^n - y^{n+p}}{x^3 - y^5} \right)$$

$$\text{número de términos: } \frac{n}{3} = \frac{n+p}{5} \dots (1)$$

$$\text{Dato: } T_k = x^{18} \Rightarrow \frac{1}{y^{n-3}} (x^3)^{\frac{n}{3}-k} (y^5)^{k-1} = x^{18} \Rightarrow x^{n-3k} y^{5k-n-2} = x^{18}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-3k=18 \\ 5k-n-2=0 \end{cases} \Rightarrow (k=10 \wedge n=48)$$

$$\text{De (1): } 16 = \frac{48+p}{5} \Rightarrow p+48=80 \Rightarrow p=32 \Rightarrow \frac{p-2}{6} = 5$$

Rpta.: D

6. De un grupo de $5(a+8)$ estudiantes del Cepre UNMSM que ingresaron a la Universidad, $(a+9)$ alumnos ingresaron a Ingeniería civil, $(n+20)$ alumnos ingresaron a Medicina y los alumnos restantes ingresaron a Economía. Si n es el número de términos del desarrollo del cociente notable $\frac{x^{5a+1} - y^{a+5}}{x^{a-1} - y}$ ($a > 0$), halle el número de alumnos que ingresaron a Economía.

- A) 10 B) 12 C) 15 D) 25

Solución:

$$n = \frac{5a+1}{a-1} = \frac{a+5}{1} \dots (1)$$

$$\text{De (1): } \frac{5a+1}{a-1} = \frac{a+5}{1} \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{De (1): } n = 8$$

$$\text{Total de alumnos en el grupo: } 5(11) = 55$$

$$\text{Ingresaron a Ingeniería civil: } 12$$

$$\text{Ingresaron a Medicina: } 28$$

$$\text{Ingresaron a Economía: } 55 - 12 - 28 = 15$$

Rpta.: C

7. El abuelo José va a repartir cierta cantidad de dinero entre sus nietos que lo han visitado hoy. Si entrega n dólares a cada uno de sus nietos le sobraría 8 dólares; pero, si entrega m dólares a cada uno de ellos le faltaría 41 dólares. ¿Cuántos nietos han visitado al abuelo José?, si m es el número de términos del desarrollo del cociente notable $\frac{(x^2)^{3n+21} - (y^4)^{3n+6}}{x^{n+1} + y^{2n-3}}$.

- A) 5 nietos B) 6 nietos C) 7 nietos D) 8 nietos

Solución:

$$\text{Tenemos } m = \frac{2(3n+21)}{n+1} = \frac{4(3n+6)}{2n-3} \dots (1)$$

$$\text{De (1): } \frac{(n+7)}{n+1} = \frac{2(n+2)}{2n-3} \Rightarrow \begin{cases} n=5 \\ m=12 \end{cases}$$

Número de nietos que visitaron al abuelo José: s

$$\text{Dinero de José: } 5s + 8 = 12s - 41 \Rightarrow 7s = 49 \Rightarrow s = 7$$

Rpta: C

8. Halle el término independiente y su posición en el desarrollo de la potencia que se obtiene al encontrar el término central de la expansión del cociente notable que se

$$\text{genera de } \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{77} + \left(x - \frac{1}{x}\right)^{77}}{x}.$$

A) $-C_{18}^{36} \wedge 19$

B) $C_{19}^{38} \wedge 20$

C) $C_{18}^{38} \wedge 19$

D) $-2C_{19}^{38} \wedge 20$

Solución:

$$\frac{(x + x^{-1})^{77} + (x - x^{-1})^{77}}{x} = 2 \underbrace{\left[\frac{(x + x^{-1})^{77} + (x - x^{-1})^{77}}{(x + x^{-1}) + (x - x^{-1})} \right]}_{\text{cociente notable de 77 términos}}$$

$$\text{T.C.} = T_{39} = 2(x + x^{-1})^{77-39} \left[-(x - x^{-1}) \right]^{39-1} = 2(x + x^{-1})^{38} (x - x^{-1})^{38} = 2(x^2 - x^{-2})^{38}$$

Tenemos $2(x^2 - x^{-2})^{38}$ que posee 39 términos en su desarrollo

$$T_{k+1} = (2C_k^{38})(x^2)^{38-k}(-x^{-2})^k = \left[2C_k^{38} \cdot (-1)^k \right] x^{76-4k}$$

$$\text{Si } 76 - 4k = 0 \Rightarrow k = 19 \text{ entonces T.I.} = T_{20} = -2C_{19}^{38}$$

Rpta.: D**EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. El desarrollo de la potencia $\left(2x^{m+3} - \frac{5y^2}{x}\right)^{2n-1}$ tiene 40 términos, se sabe además que la diferencia de grados absolutos de sus términos centrales es 7 y que m representa la edad de Jorge en años. Si en el presente año 2020, Jorge ya cumplió años, ¿en qué año nació Jorge?

A) 2015

B) 2016

C) 2014

D) 2009

Solución:

$$\left(2x^{m+3} - \frac{5y^2}{x}\right)^{2n-1} \text{ tiene 40 términos} \Rightarrow (2n-1)+1=40 \Rightarrow n=20$$

Tenemos $\left(2x^{m+3} - \frac{5y^2}{x}\right)^{39}$ cuyos términos centrales son T_{20} y T_{21}

$$T_{20} = C_{19}^{39} (2x^{m+3})^{20} (-5x^{-1}y^2)^{19} = (\text{coef})x^{20m+41}y^{38} \Rightarrow GA(T_{20}) = 20m+79$$

$$T_{21} = C_{20}^{39} (2x^{m+3})^{19} (-5x^{-1}y^2)^{20} = (\text{coef})x^{19m+37}y^{40} \Rightarrow GA(T_{21}) = 19m+77$$

$$\text{Dato: } |GA(T_{20}) - GA(T_{21})| = 7 \Rightarrow |(20m+79) - (19m+77)| = 7 \Rightarrow m=5$$

Jorge tiene 5 años.

Por lo tanto, Jorge nació el año 2015.

Rpta.: A

2. El valor numérico del término central del desarrollo del cociente notable generado por $\frac{(x+2)^{28} - (x-2)^{28}}{16x(x^2+4)}$ para $x = \sqrt{6}$, representa el sueldo mensual de Luis (en soles). Si él decide ahorrar el 25% de su sueldo mensual por 6 meses, ¿a cuánto asciende su ahorro luego de los 6 meses?

- A) S/ 6414 B) S/ 9414 C) S/ 6442 D) S/ 6144

Solución:

$$\frac{(x+2)^{28} - (x-2)^{28}}{16x(x^2+4)} = \frac{(x+2)^{28} - (x-2)^{28}}{[4(x)(2)][2(x^2+4)]} = \frac{(x+2)^{28} - (x-2)^{28}}{[(x+2)^2 - (x-2)^2][(x+2)^2 + (x-2)^2]}$$

$$= \frac{(x+2)^{28} - (x-2)^{28}}{(x+2)^4 - (x-2)^4} \text{ es C.N. de 7 términos.}$$

$$\text{T.C.} = T_4 = [(x+2)^4]^3 [(x-2)^4]^3 = (x^2-4)^{12}$$

$$\text{Sueldo mensual de Luis} = [(\sqrt{6})^2 - 4]^{12} = 2^{12} = 4096 \text{ soles}$$

$$\text{Ahorro total de Luis} = (6) \cdot \frac{25}{100} (4096) = 6144 \text{ soles}$$

Rpta.: D

3. Nicolás le afirma a Marcelo: esta expresión $\frac{(x+y)^{m+n} - y^{2m}}{x(x+2y)}$ genera un cociente notable. Marcelo le dice a Nicolás: entonces, ¿cuántos términos tiene el desarrollo de la potencia $(u^m + v)^{2n+1}$, que contiene al monomio $(\alpha)u^{130}v^8$ como sumando? Si Nicolás hizo bien sus cálculos, ¿cuál fue su respuesta?

- A) 19 términos B) 20 términos C) 21 términos D) 22 términos

Solución:

$$\frac{(x+y)^{m+n} - y^{2m}}{x(x+2y)} = \frac{(x+y)^{m+n} - y^{2m}}{x^2 + 2xy} = \frac{(x+y)^{m+n} - y^{2m}}{(x+y)^2 - y^2}$$

$$\text{Debe cumplirse } \frac{m+n}{2} = \frac{2m}{2} \Rightarrow m = n$$

$$\text{Ahora } (u^m + v)^{2n+1} = (u^m + v)^{2m+1}$$

$$T_{k+1} = C_k^{2m+1} (u^m)^{2m+1-k} (v)^k = (\alpha) u^{130} v^8 \Rightarrow \begin{cases} k = 8 \\ m(2m-7) = 130 \Rightarrow m = 10 \end{cases}$$

El desarrollo de $(u^{10} + v)^{21}$ tiene 22 términos.

Rpta.: D

4. En un mismo sistema de numeración, los números M y N son respectivamente los mayores posibles tales que la cantidad de cifras de N es la sexta parte de los dígitos que tiene M, disminuido en 4 unidades; además, al dividir en ese orden dichos números expresados en sus respectivas representaciones en base decimal generan un cociente notable que tiene 10 términos en su desarrollo. ¿Cuál es la edad actual de Paco en años?, si dicha edad es numéricamente igual al grado absoluto de tercer término del cociente generado.

- A) 26 años B) 42 años C) 38 años D) 32 años

Solución:

$$\text{En base } x: M = \overbrace{(x-1)(x-1)\dots(x-1)}^{n \text{ cifras}}_{(x)} \text{ y } N = \overbrace{(x-1)(x-1)\dots(x-1)}^{\left(\frac{n}{6}-4\right) \text{ cifras}}_{(x)}$$

$$\text{En base 10: } M = x^n - 1 \text{ y } N = x^{\frac{n}{6}-4} - 1$$

$$\frac{M}{N} = \frac{x^n - 1}{x^{\frac{n}{6}-4} - 1} \quad \text{dato: número de términos} = 10 \Rightarrow \frac{n}{\frac{n}{6}-4} = 10 \Rightarrow n = 60$$

$$\text{Tenemos } \frac{x^{60} - 1}{x^6 - 1}, \text{ número de términos: } 10$$

$$T_3 = (x^6)^{10-3} (1) \Rightarrow T_3 = x^{42}$$

Edad de Paco: 42 años

Rpta.: B

5. Los grados absolutos de los términos de lugar 4, 6 y 7 del desarrollo de un cociente notable, del que se muestran tres términos consecutivos $\dots + 126x^8y^{15} + 84x^6y^{18} + 36x^4y^{21} + \dots$, coinciden numéricamente con la cantidad de lapiceros, lápices y agendas que compró una persona en una librería. Determine el número total de artículos que compró la persona en dicha librería.

- A) 68 B) 78 C) 56 D) 64

Solución:

Los términos $\dots + 126x^8y^{15} + 84x^6y^{18} + 36x^4y^{21} + \dots$ generan la potencia $(x^2 + y^3)^n$

Supongamos $T_{k+1} = 126x^8y^{15}$ para algún k en $\{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$C_k^n (x^2)^{n-k} (y^3)^k = 126x^8y^{15} \Rightarrow \begin{cases} 3k = 15 \Rightarrow k = 5 \\ 2(n-5) = 8 \Rightarrow n = 9 \\ C_5^9 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126 \end{cases}$$

Para $(x^2 + y^3)^9$ se comprueba que $(T_6 = 126x^8y^{15} \wedge T_7 = 84x^6y^{18})$

y se halla que $T_4 = C_3^9 x^{12}y^9$.

Número de artículos comprados: $GA(T_4) + GA(T_6) + GA(T_7) = 21 + 23 + 24 = 68$

Rpta.: A

6. La señora Linares pagó n soles en una clínica para ser atendida por un dermatólogo, quién le recetó medicinas por el valor de t soles. Si n y t representan respectivamente, el número de términos y el grado absoluto de quinto término del desarrollo de un cociente notable, del cual se muestran dos términos consecutivos: $\dots + x^{114}y^{60} + x^{108}y^{64} + \dots$, ¿cuál fue el gasto total que realizó la Sra. Linares?

A) S/ 235

B) S/ 221

C) S/ 231

D) S/ 191

Solución:

Los términos consecutivos $\dots + x^{114}y^{60} + x^{108}y^{64} + \dots$

provienen del C.N. $\frac{x^{6n} - y^{4n}}{x^6 - y^4}$ de n términos.

$$\text{Si } T_k = x^{114}y^{60} \Rightarrow (x^6)^{n-k} (y^4)^{k-1} = x^{114}y^{60} \Rightarrow \begin{cases} 4(k-1) = 60 \Rightarrow k = 16 \\ 6(n-16) = 114 \Rightarrow n = 35 \end{cases}$$

Tenemos $T_5 = (x^6)^{35-5} (y^4)^{5-1} = x^{180}y^{16} \Rightarrow t = GA(T_5) = 196$

La Sra. Linares gastó $n + t = 35 + 196 = 231$ soles.

Rpta.: C

7. Si el desarrollo del cociente notable $\frac{x^{p-2} - y^{q+2}}{x^2 - y^3}$ tiene n términos y la expansión de $(x^2 - y)^{2n+2}$ tiene 33 términos, halle $n+p+q$.

A) 47

B) 90

C) 75

D) 88

Solución:

$(x^2 - y)^{2n+2}$ tiene 33 términos en su desarrollo

entonces $(2n + 2) + 1 = 33 \Rightarrow n = 15$.

El cociente notable $\frac{x^{p-2} - y^{q+2}}{x^2 - y^3}$ tiene 15 términos en su desarrollo

entonces $\frac{p-2}{2} = \frac{q+2}{3} = 15 \Rightarrow (p = 32 \wedge q = 43)$

Piden $n + p + q = 15 + 32 + 43 = 90$

Rpta.: B

8. El profesor Leoncio en un determinado momento de su clase anuncia a sus alumnos que bonificará con 2 puntos adicionales sobre la nota que obtengan en el promedio de prácticas al alumno que resuelva el siguiente problema: "Si el resultado de calcular $\binom{q}{p+8}$ es el producto de tres números primos a, b y c ($a > b > c$), halle $a + b + c$ ". Al cabo de un rato el profesor Leoncio recoge los resultados de sus alumnos, luego de revisarlos observa que ninguno obtuvo el resultado correcto, pero decide dar los 2 puntos de bonificación a los dos resultados más próximos a la suma correcta. Los alumnos Jorge, Fredy y Fernando obtuvieron 89, 92 y 99 como resultados respectivamente. ¿Quiénes recibirán los 2 puntos de bonificación?
Nota: los valores numéricos de p y q , son los del problema 7 de propuestos.

A) Jorge y Fernando
C) Jorge y Fredy

B) Fredy y Fernando
D) Solo Fernando

Solución:

Del problema 7 de propuestos, tenemos que $q = 43$ y $p = 32$

$$\binom{q}{p+8} = \binom{43}{40} = \binom{43}{3} = \frac{(43)(42)(41)}{(1)(2)(3)} = (43)(41)(7)$$

Identificando, $a = 43$, $b = 41$, $c = 7$

Piden $a + b + c = 43 + 41 + 7 = 91$

Rpta: B

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si $\frac{n! + (n+1)! + (n+2)!}{(n+4)! - (3n+8) \cdot (n+2)!} = \frac{1}{30}$, halle el valor de $\binom{7}{n}$.

- A) 30 B) 35 C) 22 D) 24 E) 28

Solución:

$$\frac{n! + (n+1)! + (n+2)!}{(n+4)! - (3n+8) \cdot (n+2)!} = \frac{n! + (n+1) \cdot n! + (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!}{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)! - (3n+8) \cdot (n+2)!} =$$

$$\frac{n! \cdot [1 + (n+1) + (n+2) \cdot (n+1)]}{(n+2)! \cdot [(n+4)(n+3) - (3n+8)]} = \frac{n! \cdot [n^2 + 4n + 4]}{(n+2)! \cdot [n^2 + 4n + 4]} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{30} \Rightarrow n = 4$$

$$\text{Piden } \binom{7}{n} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

Rpta.: B

2. Si $\binom{n+1}{n-2} = 10$ con $n \in \mathbb{Z}^+$; determine la deuda total que le tiene Marcelo a Nicolás, si éste le dice “con los 15 soles que me has dado, ahora me debes $C_{2n-7}^{n+3} + C_4^{n+1} - C_{n-4}^{n+1} - 1$ soles”.

- A) 23 soles B) 19 soles C) 25 soles D) 24 soles E) 28 soles

Solución:

$$\binom{n+1}{n-2} = 10 \Rightarrow \binom{n+1}{3} = 10 \Rightarrow \frac{(n+1) \times (n) \times (n-1)}{1 \times 2 \times 3} = 10$$

$$\Rightarrow (n+1) \times (n) \times (n-1) = 60 \Rightarrow n = 4$$

Marcelo aún le sigue debiendo a Nicolás

$$C_1^7 + C_4^5 - C_0^5 - 1 = 7 + 5 - 1 - 1 = 10 \text{ soles}$$

La deuda total a Nicolás es de 25 soles.

Rpta.: C

3. En un experimento de cultivo de bacterias, a las 9 a. m., se registra $\binom{3}{0} 2^3$ mil bacterias y en la siguiente tabla

t(tiempo)	Núm de bacterias (en miles)
10 a.m.	$\binom{3}{1} 4xy$
11 a.m.	$\binom{3}{2} 2x^2y^2$
12 m.	$\binom{3}{3} x^3y^3$

se ha registrado la cantidad de bacterias por cada hora que ha transcurrido desde el inicio del experimento, donde x e y son enteros positivos arbitrarios. ¿Cuántos miles de bacterias hay al cabo de las tres horas transcurridas?

- A) $(2 + xy)^3$ B) $(x + 2y)^3$ C) $(2x + y)^3$ D) $(2 - xy)^3$ E) $(2x + 2y)^3$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Al cabo de tres horas hay } & \binom{3}{0} 2^3 + \binom{3}{1} 4(xy)^1 + \binom{3}{2} 2(xy)^2 + \binom{3}{3} (xy)^3 \\ &= \binom{3}{0} 2^3 + \binom{3}{1} 2^2(xy)^1 + \binom{3}{2} 2^1(xy)^2 + \binom{3}{3} (xy)^3 = (2 + xy)^3 \text{ miles de bacterias.} \end{aligned}$$

Rpta.: A

4. Halle la suma de cifras del término independiente de $\left(2\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$.

- A) 9 B) 8 C) 15 D) 14 E) 19

Solución:

$$T_{k+1} = \binom{8}{k} (2x^{\frac{1}{5}})^{8-k} (x^{-\frac{1}{3}})^k \text{ con } k \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$$

$$T_{k+1} = \binom{8}{k} (2)^{8-k} x^{\frac{24-8k}{15}} \text{ con } k \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}, T_{k+1} \text{ es T.I.} \Leftrightarrow \frac{24-8k}{15} = 0 \Leftrightarrow k = 3$$

$$T_4 = \binom{8}{3} (2)^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 32 = (56)(32) = 1792$$

$$\text{Piden } 1 + 7 + 9 + 2 = 19$$

Rpta.: E

5. En el desarrollo de $(x^2 + y^2)^n$ el término de lugar r es $\alpha x^{18} y^4$, además los términos de lugar $(r+1)$ y $(5k-6)$ son equidistantes respecto a los extremos, ¿cuál es el grado absoluto del término de lugar $r+k-1$?

- A) 20 B) 38 C) 22 D) 24 E) 16

Solución:

$$T_r = C_{r-1}^n (x^2)^{n-r+1} (y^2)^{r-1} \text{ con } r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$T_r = C_{r-1}^n x^{2(n-r+1)} y^{2(r-1)} \equiv \alpha x^{18} y^4 \text{ con } r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow (r = 3 \text{ y } n = 11)$$

Dato: los términos de lugares $(r+1)$ y $(5k-6)$ son equidistantes

$$\text{entonces } 4 + (5k - 6) = 11 + 2 \Rightarrow 5k = 15 \Rightarrow k = 3$$

$$T_{r+k-1} = T_5 = C_4^{11} (x^2)^7 (y^2)^4 = C_4^{11} x^{14} y^8 \therefore \text{G.A.}(T_{r+k-1}) = 22$$

Rpta.: C

6. Si $\frac{x^{n^2-3n} - y^{m^2-15m}}{x^2 - y^5}$ con $\{m, n\} \subset \mathbb{Z}^+$ es un cociente notable de 20 términos, halle la diferencia positiva entre el grado absoluto de uno de los términos centrales del desarrollo de dicho cociente notable y el valor de $\binom{m}{2n+2}$.

- A) 114 B) 120 C) 118 D) 116 E) 122

Solución:

$$\text{Se tiene } \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{m^2 - 15m}{5} = 20$$

$$\Rightarrow (n-8)(n+5) = 0 \text{ y } (m-20)(m+5) = 0$$

$$\Rightarrow (n = 8 \text{ y } m = 20)$$

$$\text{Tenemos } \frac{x^{40} - y^{100}}{x^2 - y^5} \Rightarrow \text{núm de términos} = 20$$

$$TC_1 = T_{10} = (x^2)^{10}(y^5)^9 = x^{20}y^{45} \Rightarrow G.A.(TC_1) = 65$$

$$TC_2 = T_{11} = (x^2)^9(y^5)^{10} = x^{18}y^{50} \Rightarrow G.A.(TC_2) = 68$$

$$\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{1 \times 2} = 190$$

$$\text{Piden } \begin{cases} 190 - 65 = 125 \\ 190 - 68 = 122 \end{cases}$$

Rpta.: E

7. La edad de Juan Carlos en años, es el grado absoluto del término de lugar 9 en el desarrollo del cociente notable $\frac{x^{4n+12} - y^{4n-3}}{x^{n-8} - y^{n-9}}$. ¿Qué edad tendrá Juan Carlos dentro de 8 años?

A) 52 años B) 56 años C) 48 años D) 42 años E) 50 años

Solución:

$$\text{Se cumple que } \frac{4n+12}{n-8} = \frac{4n-3}{n-9} \Rightarrow n = 12$$

$$\text{Tenemos } \frac{x^{60} - y^{45}}{x^4 - y^3} \text{ y núm de términos} = 15$$

$$T_9 = (x^4)^{15-9}(y^3)^{9-1} \Rightarrow T_9 = x^{24}y^{24}$$

$$\text{Edad actual de Juan Carlos} = G.A.(T_9) = 48 \text{ años}$$

$$\text{Edad de Juan Carlos dentro de 8 años} = 48 + 8 = 56 \text{ años}$$

Rpta.: B

8. La expresión $\frac{x^{22} + x^{20}y^3 + x^{18}y^6 + \dots + x^2y^{30} + y^{33}}{x^2 + y^3}$ se puede expresar como un

cociente notable en el cual los grados absolutos de los términos centrales representan las edades (en años) de los hijos del señor Juan; determine la edad en qué el señor Juan tuvo a su primogénito, sabiendo que actualmente tiene 53 años.

A) 27 años B) 24 años C) 18 años D) 25 años E) 29 años

Solución:

$$\frac{x^{22} + x^{20}y^3 + x^{18}y^6 + \dots + x^2y^{30} + y^{33}}{x^2 + y^3} = \frac{x^{24} - y^{36}}{x^2 - y^3} = \frac{x^{24} - y^{36}}{x^2 + y^3}$$

Luego el cociente notable se reduce a: $\frac{x^{24} - y^{36}}{x^4 - y^6} \Rightarrow \text{núm de términos} = \frac{24}{4} = 6$

$$T_{c1} = T_3 = (x^4)^3(y^6)^2 = x^{12}y^{12} \Rightarrow \text{G.A.}(T_{c1}) = 24$$

$$T_{c2} = T_4 = (x^4)^2(y^6)^3 = x^8y^{18} \Rightarrow \text{G.A.}(T_{c2}) = 26$$

Su primer hijo tiene 26 años, el cual podemos concluir que Juan tuvo a su primer hijo a los 27 años.

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El profesor Luis, en su clase de factoriales, pide a sus estudiantes que hallen la suma de $S_5 = 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! + 5 \times 5!$ para que después puedan deducir el valor de la suma S_n , similar a la anterior que contiene n sumandos. Algunos entregaron las siguientes fórmulas:

La fórmula de Nicole fue $S_n = n! + n$.

La fórmula de Lunié fue $S_n = (n+1)! - 1$.

La fórmula de Alexandra fue $S_n = (n+1) \times n! - 1!$.

La fórmula de Fabrizio fue $S_n = n(n!) - 1$.

¿Quiénes de los estudiantes dieron la fórmula correcta?

- A) Alexandra y Nicole
C) Alexandra y Fabrizio
E) Fabrizio y Nicole

- B) Lunié, Fabrizio y Nicole
D) Alexandra y Lunié

Solución:

$$S_5 = (2-1) \times 1! + (3-1) \times 2! + (4-1) \times 3! + (5-1) \times 4! + (6-1) \times 5!$$

$$S_5 = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + (5! - 4!) + (6! - 5!)$$

$$S_5 = 6! - 1$$

Para n sumandos, se tiene $S_n = (n+1)! - 1$

Rpta.: D

2. El binomio $p(x) = (x^\alpha + y^3)^{2n}$ contiene un término de la forma $Mx^{20}y^{12}$ en su desarrollo, siendo n y α números enteros consecutivos. Si la empresa SMSAC tiene en total 220 trabajadores de los cuales el $(2n\alpha)\%$ no son mujeres, ¿cuántos trabajadores del total son varones?
- A) 64 B) 88 C) 40 D) 56 E) 44

Solución:

$$p(x) = (x^\alpha + y^3)^{2n}$$

$$T_{k+1} = C_k^{2n} (x^\alpha)^{2n-k} (y^3)^k \Rightarrow T_{k+1} = \{C_k^{2n}\} x^{\alpha(2n-k)} y^{3k} \equiv Mx^{20}y^{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3k = 12 \Rightarrow k = 4 \\ \alpha(2n - 4) = 20 \Rightarrow \alpha(n - 2) = 10 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ y } n = 12 \\ \alpha = 2 \text{ y } n = 7 \\ \alpha = 5 \text{ y } n = 4 \\ \alpha = 10 \text{ y } n = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Por lo tanto, $(k = 4, \alpha = 5 \text{ y } n = 4)$ o $(k = 4, \alpha = 4 \text{ y } n = 5)$

Núm de trabajadores = 220

$$\text{Núm de trabajadores no mujeres} = \frac{40}{100} \times 220 = 88$$

Número de trabajadores hombres = 88

Rpta.: B

3. Se sabe que $\overline{ab}$ es el lugar que ocupa el término $(x + y)^{25}y^{13}$ contado a partir del final en el desarrollo del cociente notable $\frac{(x + y)^n - y^n}{xy}$. Determine la longitud de la base de un rectángulo de perímetro $(2\overline{ab} + 2)$ cm, si la base es 3 cm mayor que la altura.
- A) 12 cm B) 7 cm C) 11 cm D) 22 cm E) 15 cm

Solución:

$$\frac{(x+y)^n - y^n}{xy} = \frac{1}{y} \left[\frac{(x+y)^n - y^n}{(x+y) - y} \right], \text{ número de términos} = n$$

el término de lugar "k" contando a partir del final:

$$t_k = \frac{1}{y} \left[(x+y)^{k-1} \cdot y^{n-k} \right] = (x+y)^{k-1} \cdot y^{n-k-1} \equiv (x+y)^{25} \cdot y^{13} \Rightarrow (k=26 \text{ y } n=40)$$

El término en referencia ocupa el lugar $26 = \overline{ab}$

entonces perímetro = 54 cm, base = $s+3$, ancho = s

$$\text{Dato: } 2s + 2(s+3) = 54 \Rightarrow s = 12$$

$$\therefore \text{ base} = 15 \text{ cm}$$

Rpta.: E

4. En el desarrollo del binomio $\left(x + \frac{1}{x^6}\right)^{210}$, el término independiente ocupa el lugar "n", halle el cociente de dividir los términos de lugar $6n$ y $n-5$, en ese orden.

A) x^{-1050}

B) x^{-1120}

C) x^{-890}

D) x^{-320}

E) x^{-640}

Solución:

$$\left(x + \frac{1}{x^6}\right)^{210} \text{ tiene 211 términos en su desarrollo}$$

$$T_{k+1} = C_k^{210} (x)^{210-k} (x^{-6})^k = C_k^{210} (x)^{210-7k} \text{ con } k \in \{0, 1, 2, \dots, 219, 210\}$$

$$T_{k+1} \text{ es T.I.} \Leftrightarrow 210 - 7k = 0 \Leftrightarrow k = 30$$

$$\text{Por lo tanto } n = k + 1 = 31$$

$$\frac{T_{186}}{T_{26}} = \frac{C_{185}^{210} (x)^{25} (x^{-6})^{185}}{C_{25}^{210} (x)^{185} (x^{-6})^{25}} = \frac{C_{25}^{210} x^{-1085}}{C_{25}^{210} x^{35}} = x^{-1120}$$

Rpta.: B

5. Si $p(x, y) = x^8 - 4x^6y + ax^{m+n}y^p - bx^py^{m-2n+2} + y^4$ es el desarrollo de un binomio de Newton, halle el valor de $L = \binom{a}{|b|} + \binom{a}{m-n}$.

A) 32

B) 30

C) 24

D) 28

E) 20

Solución:

Por ser $p(x,y)$ el desarrollo de un binomio de Newton se debe tener

$$(a = 6, -b = 4 \text{ y } p = 2) \text{ y } (m + n = 4 \text{ y } m - 2n + 2 = 3)$$

$$(a = 6, b = -4 \text{ y } p = 2) \text{ y } (m + n = 4 \text{ y } m - 2n = 1)$$

$$(a = 6, b = -4 \text{ y } p = 2) \text{ y } (m = 3 \text{ y } n = 1)$$

$$\text{Piden } L = \binom{a}{|b|} + \binom{a}{m-n} = \binom{6}{4} + \binom{6}{2} = 2(15) = 30$$

Rpta.: B

6. Demetrius compra cada polo deportivo alusivo a la selección del Perú al valor de la suma de los coeficientes del desarrollo de $(x+y)^5$ soles con un capital igual al producto de los coeficientes de $(x+4y)^3$ soles. Si al valor de cada polo le agrega la suma de los coeficientes de $(x+y)^2$ soles para venderlos. ¿Cuál es la utilidad que obtiene Demetrius?

A) 4109 soles

B) 4764 soles

C) 4608 soles

D) 4282 soles

E) 5025 soles

Solución:

$$\text{Precio de cada polo} = (1+1)^5 = 32 \text{ soles}$$

$$(x+4y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(4y) + \binom{3}{2}x(4y)^2 + \binom{3}{3}(4y)^3$$

$$\text{Capital de Demetrius} = ((1) \cdot ((3) \cdot (4)) \cdot ((3) \cdot (16)) \cdot ((1) \cdot (64))) = 36864 \text{ soles}$$

$$\text{Número de polos comprados por Demetrius} = \frac{36864}{32} = 1152 \text{ polos}$$

$$\text{Ganancia por cada polo} = (1+1)^2 = 4 \text{ soles}$$

$$\text{Utilidad de Demetrius} = (4)(1152) = 4608 \text{ soles}$$

Rpta.: C

7. Halle el valor de $m^n + n^m$, si $T_c = x^{14-m}y^{n+2}$ es el término central en el desarrollo del

$$\text{cociente notable } \frac{x^{13a+1} - y^{8a+2}}{x^{a+1} - y^a}.$$

A) 100

B) 8

C) 32

D) 64

E) 96

Solución:

$$\frac{x^{13a+1} - y^{8a+2}}{x^{a+1} - y^a}$$

Se cumple $\frac{13a+1}{a+1} = \frac{8a+2}{a} \Rightarrow a = 2$

Tenemos $\frac{x^{27} - y^{18}}{x^3 - y^2}$, número de términos = 9

$$T_c = T_5 = (x^3)^4 (y^2)^4 = x^{12} y^8 \equiv x^{14-m} y^{n+2} \Rightarrow (m = 2 \text{ y } n = 6)$$

Piden $m^n + n^m = 64 + 36 = 100$

Rpta.: A

8. En un examen de Cepre UNMSM se pidió hallar el grado absoluto del término central del desarrollo del cociente notable $\frac{x^{39} - y^m}{x^3 - y^2}$. Joselito luego de dar el examen, se da cuenta que marcó una clave que fue dos unidades menos que el resultado correcto. ¿Cuál fue la alternativa incorrecta que marcó Joselito?.

A) 30 B) 26 C) 28 D) 12 E) 15

Solución:

Se cumple que $\frac{39}{3} = \frac{m}{2} \Rightarrow (\text{núm de términos} = 13 \text{ y } m = 26)$

$$T_c = T_7 = (x^3)^{13-7} (y^2)^{7-1} \Rightarrow T_c = x^{18} y^{12}$$

$$\therefore G.A.(T_c) = 30$$

Alternativa errónea marcada por Joselito, 28.

Rpta.: C

Álgebra

EJERCICIOS

1. En el desarrollo del binomio de Newton $(x^5 + 2y^3)^{50}$ el grado absoluto de su término central representa la cantidad que María paga (en soles) por un mes de pensión en el colegio de su hijo. Si María debe 6 meses de pensión al colegio, calcule la deuda total de María en el colegio.

A) 1200 soles B) 1260 soles C) 1500 soles D) 1440 soles

Solución:

$$\begin{aligned} 1) \text{ término central} &= t_{26} = \binom{50}{25} (x^5)^{50-25} (2y^3)^{25} \\ &= 2^{25} \binom{50}{25} (x^5)^{25} (y^3)^{25} = \underbrace{2^{25} \binom{50}{25}}_{\text{coeficiente}} x^{125} y^{75} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ GA(término central)} &= 125 + 75 = 200 \\ \text{Mensualidad} &= 200 \text{ soles} \end{aligned}$$

∴ Deuda 1200 soles.

Rpta.: A

2. Un estadio tiene m puertas de entrada y n puertas de salida, se sabe que el cuarto término en el desarrollo del binomio de Newton $(x+2)^n$ es $80x^m$. ¿De cuántas maneras pueden dos personas entrar juntos y salir por puertas de diferentes?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 60

Solución:

$$1) t_4 = \binom{n}{3} x^{n-3} 2^3$$

$$80x^m = \binom{n}{3} x^{n-3} 2^3$$

$$80x^m = \frac{n!}{3!(n-3)!} 8x^{n-3}$$

$$i) \frac{n!}{3!(n-3)!} 8 = 80$$

$$n = 5$$

$$ii) x^m = x^{n-3}$$

$$m = 2$$

El estadio tiene 2puertas de entrada y 5 puertas de salida.

- 2) Número de maneras que pueden 2 personas entrar juntos y salir por puertas diferentes es 40.

Rpta.: C

3. Respecto al desarrollo del binomio $(2x^3 + y^2)^{15}$ se sabe que el coeficiente del séptimo término es α veces el coeficiente del décimo término, halle el grado absoluto del término de lugar $\alpha - 5$.

A) 36

B) 30

C) 39

D) 43

Solución:

$$1) \text{coeficiente}(t_7) = \binom{15}{6} 2^9$$

$$\text{coeficiente}(t_{10}) = \binom{15}{9} 2^6$$

$$\text{coeficiente}(t_7) = \alpha \text{coeficiente}(t_{10})$$

$$\binom{15}{6} 2^9 = \alpha \binom{15}{9} 2^6$$

$$\alpha = 8$$

$$\alpha - 5 = 3$$

$$2) t_{\alpha-5} = t_3 = \binom{15}{2} (2x^3)^{13} (y^2)^2$$

$$GA(t_{\alpha-5}) = 39 + 4 = 43$$

Rpta.: D

4. Sofía determina que hay 7 términos en el desarrollo del binomio $\left(x + \frac{1}{y^2}\right)^n$ y Luis obtiene en el desarrollo del binomio $\left(y^2 - \frac{1}{x^3}\right)^m$ cinco términos. Si

Sofía y Luis calculan cada uno de los términos en los desarrollos los binomios en forma correcta y ambos deciden multiplicar los siete términos con los cinco términos obteniendo en ese desarrollo el término independiente, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Sofía determina que el valor de $n = 6$.

II. El término independiente en el desarrollo de $\left(x + \frac{1}{y^2}\right)^n \left(y^2 - \frac{1}{x^3}\right)^m$ es -80 .

III. Luis determina que el coeficiente del segundo término en el desarrollo del binomio $\left(y^2 - \frac{1}{x^3}\right)^m$ es -4 .

A) VFF

B) VFV

C) VVF

D) VVV

Solución:

I. $n = 6$

II. El término independiente

$$t_{k+1} = \binom{6}{k} (x)^{6-k} (y^{-2})^k$$

$$t_{j+1} = \binom{4}{j} (y^2)^{4-j} (-x^{-3})^j$$

$$t_{k+1} t_{j+1} = (-1)^j \binom{4}{j} \binom{6}{k} x^{6-k-3j} y^{-2k+8-2j}$$

$$\underbrace{t_{k+1} t_{j+1}}_{\text{término independiente}} = (-1)^j \binom{4}{j} \binom{6}{k} x^{6-k-3j=0} y^{-2k+8-2j=0}$$

$$\begin{cases} k + 3j = 6 \\ k + j = 4 \end{cases} \rightarrow j = 1 ; k = 3$$

$$\underbrace{t_4 t_2}_{\text{término independiente}} = (-1) \binom{4}{1} \binom{6}{3} = -80$$

$$\text{III. } t_{1+1} = \binom{4}{1} (y^2)^{4-1} (-x^{-3})^1$$

$$t_{1+1} = -4y^6x^{-3}$$

$$\text{coeficiente}(t_2) = -4$$

Rpta. : D

5. En una reunión de n alumnos se quiere formar una comisión de m alumnos ¿de cuántas maneras distintas se puede formar dicha comisión? Si el término central en el desarrollo cociente notable $\frac{x^{13a+1}-y^{8a+2}}{x^{a+1}-y^a}$, es $x^{14-m}y^{n+2}$.

A) 15 B) 28 C) 20 D) 56

Solución:

I. $N^\circ \text{ de términos} = \frac{13a+1}{a+1} = \frac{8a+2}{a}$

$$13a^2 + a = 8a^2 + 2a + 8a + 2$$

$$5a^2 - 9a - 2 = 0$$

$$(5a + 1)(a - 2) = 0$$

$$a = -\frac{1}{5} \vee a = 2$$

Entonces: $N^\circ \text{ de términos} = 9$

II. $\frac{x^{27}-y^{18}}{x^3-y^2}$. Entonces:

$$t_{\text{central}} = t_5 = (x^3)^{9-5} (y^2)^{5-1} = x^{12}y^8$$

III. Se concluye $m = 2$ y $n = 6$

IV. $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{4!(5)(6)}{2!4!} = 15$

Rpta : A

6. Dado el cociente notable $\frac{x^{2n+8}+27^{n-3}}{x^{n-6}+3^{n-7}}$, determine cuarto término del desarrollo del binomio $(x^2-y^5)^n$.

A) $-120x^{14}y^{15}$ B) $-165x^{10}y^{15}$ C) $120x^{14}y^{15}$ D) $120x^{10}y^{15}$

Solución:

Sea $\frac{x^{2n+8}+27^{n-3}}{x^{n-6}+3^{n-7}} = \frac{x^{2n+8}+3^{3n-9}}{x^{n-6}+3^{n-7}}$ cociente notable, entonces:

$$\frac{2n+8}{n-6} = \frac{3n-9}{n-7}$$

$$n^2 - 21n + 110 = 0$$

$$n \quad -10$$

$$n \quad -11$$

$$n=10 \vee n=11$$

El cociente tiene una cantidad impar de términos: $n = 10$;

$$\text{Número de términos} = \frac{2(10) + 8}{10 - 6} = 7$$

Luego: $(x^2 - y^5)^{10}$

$$t_4 = \binom{10}{3} (x^2)^7 (-y^5)^3 = -120x^{14}y^{15}$$

Rpta. : A

7. En el desarrollo del cociente notable $\frac{x^n - a^n}{x - a}$; el término de lugar α y el término de lugar 8 son términos equidistantes de los extremos. Además el único término central en el desarrollo del cociente es de la forma $x^{n-\alpha-2}a^{2\alpha-3}$, calcule el número de términos del desarrollo del cociente notable.

- A) 13 B) 15 C) 11 D) 9

Solución:

- 1) Como t_α y t_8 son equidistantes de los extremos entonces

$$\alpha = n - 7$$

- 2) término central = $t_k = x^{n-k}a^{k-1}$

$$n - k = n - \alpha - 2 \quad \wedge \quad k - 1 = 2\alpha - 3$$

$$\underbrace{k = \alpha + 2 \quad \wedge \quad k = 2\alpha - 2}$$

$$\alpha = 4 \quad ; \quad k = 6$$

- 3) Número de términos es 11

Rpta. : C

8. Sea m la cantidad de términos en el desarrollo del cociente notable $\frac{x^{4\alpha} - y^4}{x^{\alpha-3} + y^{\alpha+5}}$; en $(m+3)$ días Marisol desarrollará menos de 105 ejercicios. Cada día utilizará $(a-2)$ horas y por cada hora desarrollará $(a-6)$ ejercicios $a \neq 6$ ¿cuántos ejercicios como máximo desarrollará en los $(m+3)$ días?

- A) 25 B) 60 C) 90 D) 102

Solución:

$$1) \text{ Número de términos} = \frac{4\alpha}{\alpha-3} = \frac{4}{\alpha+5}$$

$$\alpha^2 + 5\alpha = \alpha - 3$$

$$\alpha^2 + 4\alpha + 3 = 0$$

$$\alpha + 3$$

$$\alpha + 1$$

Si $\alpha = -3 \rightarrow$ reemplazando; Número de términos = 2

Si $\alpha = -1 \rightarrow$ reemplazando; Número de términos = 1

El cociente tiene una cantidad par de términos: $m = 2$

$$2) 5(a-2)(a-6) < 105$$

$$a^2 - 8a - 9 < 0$$

$$a - 9$$

$$a + 1$$

$$a \in \langle -1, 9 \rangle \dots\dots\dots (i)$$

$$a - 6 > 0 \rightarrow a > 6 \dots\dots\dots (ii)$$

de (i) y (ii)

$$a \in \langle 6, 9 \rangle$$

3)

$$a_{\max} = 8$$

El máximo número de ejercicios que desarrollará en los 5 días es $5(6)(2) = 60$.

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el desarrollo del binomio $(x-3)^n$, el tercer término es $54x^{a-1}$ determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El número de términos en el desarrollo del binomio es 5.

II. El valor de a es 3.

III. El cuarto término en el desarrollo del binomio es $-108x$.

IV. El coeficiente del segundo término en el desarrollo del binomio es 12.

A) VVVV

B) VVVF

C) VFFF

D) VVFF

Solución:

$$t_3 = \binom{n}{2} (x)^{n-2} (-3)^2$$

$$I) \binom{n}{2} 9 = 54$$

$$\binom{n}{2} = 6$$

$$n = 4$$

En el desarrollo del binomio hay 5 términos

$$II) n - 2 = a - 1$$

$$2 = a - 1$$

$$a = 3$$

$$III) t_4 = \binom{4}{3} x(-3)^3 = -108x$$

$$IV) t_2 = \binom{4}{1} x^3(-3) = -12x^3$$

$$\text{coeficiente}(t_2) = -12$$

Rpta.: B

2. Los grados absolutos de cada término en el desarrollo del binomio $(x^3 + y^7)^m$ representa las edades de n hermanos (en años). Si la suma de los grados absolutos de todos los términos del desarrollo del binomio es 360, determine la diferencia entre las edades del hermano mayor y el hermano menor.

A) 32 años

B) 36 años

C) 40 años

D) 34 años

Solución:

$$1) t_{0+1} = \binom{m}{0} (x^3)^m (y^7)^0$$

$$t_{1+1} = \binom{m}{1} (x^3)^{m-1} (y^7)^1$$

$$t_{2+1} = \binom{m}{2} (x^3)^{m-2} (y^7)^2$$

$$t_{3+1} = \binom{m}{3} (x^3)^{m-3} (y^7)^3$$

⋮

$$t_{m+1} = \binom{m}{m} (x^3)^{m-m} (y^7)^m$$

$$2) + \begin{cases} GA(t_1) = 3m \\ GA(t_2) = 3m + 4 \\ GA(t_3) = 3m + 8 \\ GA(t_4) = 3m + 12 \\ GA(t_{m+1}) = 3m + 4m \end{cases}$$

$$3m(m+1) + 4(1+2+\dots+m) = 360 \rightarrow m = 8$$

3) Edad del menor hermano = 24 años

Edad del mayor hermano = 56 años

Rpta.: A

3. En el desarrollo del binomio $(ax^2 + b^2y^3)^{21}$ el primer término y el último término tienen coeficientes iguales (siendo x, y variables; a y b son números reales positivos) y además el coeficiente del tercer término es $2^{42} \binom{21}{2}$, halle la diferencia entre los coeficientes de los términos centrales.

A) 1

B) 4

C) 2

D) 0

Solución:

$$1) t_1 = \binom{21}{0} (ax^2)^{21} (b^2y^3)^0$$

$$t_{22} = \binom{21}{21} (ax^2)^0 (b^2y^3)^{21}$$

coeficiente t_1 = coeficiente t_{22}

$$\binom{21}{0} a^{21} = \binom{21}{21} b^{42}$$

$$a^{21} = b^{42} \rightarrow a = b^2$$

$$2) t_3 = \binom{21}{2} (ax^2)^{19} (b^2y^3)^2$$

$$\text{coeficiente } t_3 = \binom{21}{2} a^{19} b^4$$

$$2^{42} \binom{21}{2} = \binom{21}{2} a^{19} b^4 \rightarrow 2^{42} = a^{19} b^4$$

3) de 1) y 2)

$$2^{42} = (b^2)^{19} b^4$$

$$2^{42} = b^{42}$$

$$b = 2 ; a = 4$$

$$4) t_{11} = \binom{21}{10} 4^{11} 4^{10} x^{22} y^{30}$$

$$t_{12} = \binom{21}{11} 4^{10} 4^{11} x^{20} y^{33}$$

Rpta.: D

4. Si el desarrollo del cociente notable $\frac{x^p - y^q}{x^{n+1} + y^{n-2}}$ tiene 20 términos y uno de los términos centrales es de la forma $\beta x^{70} y^{36}$, determine valor de $p + q + \beta$.

A) 220

B) 221

C) 219

D) 222

Solución:

$$t_k = \text{signo}(x^{n+1})^{20-k} (y^{n-2})^{k-1}$$

$$(n+1)(20-k) = 70 \quad \wedge \quad (n-2)(k-1) = 36$$

$$3k^2 + 43k - 730 = 0$$

$$3k \quad + 73$$

$$k \quad - 10$$

$$i) k = 10 \rightarrow \beta = -1$$

$$ii) (n-2)(k-1) = 36$$

$$\text{reemplazando } (n-2)(10-1) = 36$$

$$n = 6$$

$$\frac{x^p - y^q}{x^{n+1} + y^{n-2}}$$

$$\frac{p}{7} = \frac{q}{4} = 20 \rightarrow p = 140 ; q = 80$$

Rpta.: C

5. Si + $x^{280} y^{30} - x^{273} y^{33} + \dots$ muestra parte del desarrollo del cociente notable, determine el cuarto término del desarrollo de dicho cociente notable.

A) $-x^{329} y^9$

B) $x^{329} y^9$

C) $-x^{329} y^{12}$

D) $-x^{47} y^3$

Solución:

$$\frac{(x^7)^{51} + (y^3)^{51}}{x^7 + y^3} = \dots + (x^7)^{40} (y^3)^{10} - (x^7)^{39} (y^3)^{11} + \dots$$

$$t_4 = -(x^7)^{51-4} (y^3)^{4-1} = -x^{329} y^9$$

Rpta.: A

6. Julián desea imprimir 11111 hojas en un plazo de $(n-1)$ semanas; donde 11111 representa la suma de los coeficientes en el desarrollo del cociente notable $\frac{(10x)^n - 1}{10x - 1}$.

La primera semana deberá imprimir $\overline{n00}$ hojas y cada una de las semanas siguientes imprimirá el doble de hojas de la semana anterior, ¿cuántas hojas le faltará para terminar de imprimir las 11111 hojas.

A) 2121

B) 3611

C) 3621

D) 2111

Solución:

$$1) \quad t_1 = (10x)^{n-1} (1)^0$$

$$t_2 = (10x)^{n-2} (1)^1$$

$$t_3 = (10x)^{n-3} (1)^2$$

$$\vdots$$

$$t_n = (10x)^{n-n} (1)^{n-1}$$

$$S = 10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + \dots + 10 + 1$$

$$= 1 + 10(1 + 10 + \dots + 10^{n-2})$$

$$= 1 + 10(S - 10^{n-1})$$

$$S = \frac{10^n - 1}{9} = 11111 \rightarrow 10^n - 1 = 99999 \rightarrow n = 5$$

2) cantidad de hojas

1era semana = 500

2da semana = 1000

3era semana = 2000

4ta semana = 4000

total de hojas = 7500

3) hojas que le faltara imprimir = $11111 - 7500 = 3611$

Rpta.: B

7. José fue a comprar camisas a una tienda del emporio Gamarra y observó que el precio de cada camisa es N soles, pero había una oferta que decía, que por comprar p camisas se le hace un descuento del 25%.

Si José usó la oferta, ¿cuánto pagó por las p camisas?

Si en el desarrollo del cociente notable $\frac{x^{am} - x^{bn}}{x^2 - x^{-3}}$ se tienen las siguientes condiciones

- i) Décimo término contado a partir del final, es independiente de x .
 ii) N es el número de términos.
 iii) p es el número de términos racionales enteros.

A) 84 soles B) 74 soles C) 112 soles D) 140 soles

Solución:

$$L = \frac{x^{am} - x^{bn}}{x^2 - x^{-3}}$$

Como L es cociente notable, entonces se cumple:

$$\frac{am}{2} = \frac{bn}{-3} = N \quad (\text{número de términos})$$

El décimo término contado a partir del final se obtiene de:

$$\Rightarrow T_{10} = (x^{-3})^{N-10} (x^2)^9 = x^{-3N+48}$$

Como T_{10} es independiente, entonces $N = 16$

$$\Rightarrow L = \frac{x^{32} - x^{-48}}{x^2 - x^{-3}}$$

cuyo término general es $T_k = (x^2)^{N-k} (x^{-3})^{k-1} = x^{35-5k}$

Entonces, para que haya términos racionales enteros se requiere que $1 \leq k \leq 7$. Es decir, $p = 7$. Por lo tanto pagó $16 \times 7 \times 0,75 = 84$ soles.

Rpta.: A

8. Jaimito tiene un libro de álgebra que es muy viejo, donde en una de sus páginas no se puede ver el exponente del trinomio $(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c})$; sin embargo, se observa que en el desarrollo de su potencia hay un término de la forma βabc . ¿Cuál sería el exponente del trinomio?

A) 15 B) 12 C) 16 D) 9

Solución:

Sea n el exponente del trinomio.

- 1) Consideremos $(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c})^n$

$$T_k = \binom{n}{k} (\sqrt{a} + \sqrt[3]{b})^{n-k} (\sqrt[4]{c})^k$$

$$k = 4$$

- 2) En el desarrollo de $(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b})^{n-4}$

$$T_j = \binom{n-4}{j} (\sqrt{a})^{n-4-j} (\sqrt[3]{b})^j$$

$$j = 3$$

$$n - 4 - j = 2$$

$$n = 9$$

El exponente del trinomio es 9.

Rpta.: D

Álgebra

EJERCICIOS

1. En el desarrollo de $\left(\sqrt{x}^5 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{18}$, ¿qué lugar ocupa el término independiente de "x"?

A) 12 B) 15 C) 13 D) 14 E) 16

Solución:

$$\left(\sqrt{x}^5 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{18} \rightarrow T_{k+1} = \binom{18}{k} \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{18-k} \left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^k$$

$$\rightarrow T_{k+1} = (-1)^k \binom{18}{k} x^{\frac{90-6k}{2}}$$

Si T_{k+1} es el término independiente, entonces el exponente de "x" debe ser cero.

$$\frac{90-6k}{2} = 0 \rightarrow k = 15 \rightarrow T_{k+1} = T_{16}$$

∴ El lugar que ocupa es 16.

Rpta.: E

2. Halle el valor numérico del decimocuarto término del desarrollo de $(3x - 4y)^{16}$ cuando $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{4}$.

A) 1100 B) - 560 C) - 1120 D) 560 E) 1120

Solución:

Calculando decimocuarto término de dicho binomio se tiene

$$\begin{aligned} \text{i) } (3x - 4y)^{16} &\rightarrow T_{14} = T_{13+1} = \binom{16}{13} (3x)^3 (-4y)^{13} \\ &\rightarrow T_{14}(x, y) = (-1)^{13} \binom{16}{13} (3x)^3 (4y)^{13} \end{aligned}$$

$$\text{ii) Evaluando } T_{14}(x, y) \text{ cuando } x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{4}$$

$$\therefore T_{14}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = (-1)^{13} \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 13!} \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)^3 \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right)^{13} = -560.$$

Rpta.: B

3. En el desarrollo de $\left(\frac{x^m}{y^{p-30}} + \frac{y^{p+40}}{x^{20}}\right)^n$ se obtiene un solo término central de la forma $\beta x^{80} y^{1400}$. Halle $\frac{n}{m-4}$.

- A) 6 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

Solución:

i) Como dicho binomio tiene un solo término central, entonces “n” deber ser par.

ii) Calculando el término central:

$$T_{\text{Central}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} \left(\frac{x^m}{y^{p-30}} \cdot \frac{y^{p+40}}{x^{20}} \right)^{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} (x^{m-20} y^{70})^{\frac{n}{2}} \dots (1)$$

Pero se sabe que

$$T_{\text{Central}} = \beta x^{80} y^{1400} \dots (2)$$

De (1) y (2), resulta

$$35n = 1400 \wedge (m-20) \frac{n}{2} = 80 \rightarrow n = 40 \rightarrow m = 24$$

$$\therefore \frac{n}{m-4} = \frac{40}{24-4} = 2.$$

Rpta.: C

4. Sea C un capital, en soles, invertido durante " t " años a una tasa $x\%$ de interés compuesto por cada año. Durante el primer año el monto final fue representado por la expresión $M_1(x)$, después del segundo año, el monto final fue $M_2(x)$; siguiendo de forma análoga, al cabo de 7 años el capital inicial C invertido en la modalidad de interés compuesto se convertirá en el monto final $M_7(x)$. Calcule la suma de coeficientes de los términos centrales de la expresión $M_7(x)$.

A) $35C$ B) $45C$ C) $55C$ D) $60C$ E) $70C$

Solución:

Sea C un capital, en soles, invertido durante " t " años a una tasa " x " de interés compuesto cada año.

Primer año : $M_1(x) = C + C \cdot x = C(1+x)$ soles

Segundo año : $M_2(x) = M_1 + C \cdot (x + x^2) = C(1+x) + C(x + x^2) = C(1+x)^2$ soles

⋮ ⋮

n -ésimo año : $M_n(x) = C(1+x)^n$ soles

Así, al cabo de 7 años el monto final, en soles, estará representado por la expresión

$$M_7(x) = C(1+x)^7 = C(1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7).$$

Términos centrales : $35Cx^3$ y $35Cx^4$.

∴ La suma de coeficientes de los términos centrales es $70C$.

Rpta.: E

5. En el desarrollo del cociente notable $\frac{x^{40} - 1024}{x^4 + 2}$, el grado del octavo término es " p " y el coeficiente de dicho término es " m ". Halle $p + m$.

A) -120 B) -113 C) -112 D) -136 E) -128

Solución:

Dando forma de cociente notable, se tiene

$$\frac{x^{40} - 1024}{x^4 + 2} = \frac{(x^4)^{10} - 2^{10}}{x^4 + 2} \rightarrow N^{\circ} \text{términos} = 10.$$

$$\rightarrow T_8 = (-1)^{8-1} (x^4)^{10-8} (2)^{8-1} = -128x^8$$

$$\rightarrow \text{Grad}(T_8) = p = 8 \wedge \text{Coeficiente}(T_8) = m = -128$$

∴ $p + m = -120$.

Rpta.: A

6. Halle la suma de los grados absolutos de los dos términos centrales en el desarrollo del cociente notable

$$\frac{x^{11p-8} - y^{5p}}{x^{p-4} + y^{p-6}}.$$

- A) 115 B) 117 C) 116 D) 114 E) 112

Solución:

Como $\frac{x^{11p-8} - y^{5p}}{x^{p-4} + y^{p-6}}$ es un cociente notable, entonces

$$\frac{11p-8}{p-4} = \frac{5p}{p-6} \rightarrow p = 8 \rightarrow \text{N}^\circ \text{términos} = 20$$

Así,

$$\frac{x^{80} - y^{40}}{x^4 + y^2} = \frac{(x^4)^{20} - (y^2)^{20}}{x^4 + y^2}$$

$$\rightarrow T_{\text{Central(I)}} = T_{\frac{n}{2}} = T_{10} = (x^4)^{20-10} (y^2)^{10-1} = x^{40} y^{18} \rightarrow \text{G.A.}[T_{\text{Central(I)}}] = 40 + 18 = 58.$$

$$\rightarrow T_{\text{Central(II)}} = T_{\frac{n}{2}+1} = T_{11} = (x^4)^{20-11} (y^2)^{11-1} = x^{36} y^{20} \rightarrow \text{G.A.}[T_{\text{Central(II)}}] = 36 + 20 = 56.$$

La suma de grados absolutos es 114.

Rpta.: D

7. Si T es el término de lugar 16 que se obtiene en el desarrollo de $\frac{(x+2)^{20} - (y-2)^{20}}{x+y}$, expresado como cociente notable; halle el valor numérico de T cuando $x=1, y=3$.

- A) - 128 B) - 27 C) - 243 D) - 81 E) - 64

Solución:

Dando forma de cociente notable, se tiene

$$\frac{(x+2)^{20} - (y-2)^{20}}{x+y} = \frac{(x+2)^{20} - (y-2)^{20}}{(x+2) + (y-2)} \rightarrow \text{N}^\circ \text{Términos} = 20$$

$$T_{16}(x;y) = -(x+2)^{20-16} \cdot (y-2)^{16-1} = -(x+2)^4 (y-2)^{15}$$

Luego evaluando cuando $x=1 \wedge y=3$, resulta

$$T_{16}(2;1) = -(3)^4 \cdot (1)^{15}$$

$$\therefore T_{16}(2;1) = -81.$$

Rpta.: D

8. Un laboratorio elabora un tipo de jarabe solo durante los tres primeros días laborables de cada semana. La cantidad elaborada por día se muestra en el siguiente cuadro:

	Lunes	Martes	Miércoles
Cantidad (Unidades)	x^8	x^4y^3	y^6

Indique el polinomio $p(x,y)$ que represente la cantidad de semanas para que el laboratorio elaboré un total de $(x^{12} - y^a)$ unidades.

A) $p(x,y) = x^4 - y^3$

B) $p(x,y) = y^4 - x^3$

C) $p(x,y) = x^2 - y^3$

D) $p(x,y) = y^3 - x^4$

E) $p(x,y) = y^2 - x^3$

Solución:

Sea $p(x,y)$ el polinomio que representa el número de semanas.

Jarabes por semana: $x^8 + x^4y^3 + y^6$

$$\rightarrow (x^{12} - y^a) = p(x,y)(x^8 + x^4y^3 + y^6) \rightarrow x^8 + x^4y^3 + y^6 = \frac{x^{12} - y^a}{p(x,y)} \quad \dots (1)$$

$$\text{Pero } x^8 + x^4y^3 + y^6 = (x^4)^2 (y^3)^0 + (x^4)^1 (y^3)^1 + (y^3)^2 \quad \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{x^{12} - y^a}{p(x,y)} = \underbrace{(x^4)^2 (y^3)^0 + (x^4)^1 (y^3)^1 + (y^3)^2}_L$$

Se observa que L es el desarrollo del cociente notable $\frac{(x^4)^3 - (y^3)^3}{x^4 - y^3}$

$\therefore$ El polinomio $p(x,y) = x^4 - y^3$ es aquel que representa a la cantidad de semanas.

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle el término independiente de "x" en el desarrollo de $\left(x^9 - \frac{1}{x}\right)^{100}$.

A) $\binom{100}{90}$ B) $\binom{100}{94}$ C) $\binom{100}{95}$ D) $\binom{100}{98}$ E) $\binom{100}{92}$

Solución:

$$\begin{aligned}\left(x^9 - \frac{1}{x}\right)^{100} &\rightarrow T_{k+1} = \binom{100}{k} (x^9)^{100-k} (-x^{-1})^k \\ &\rightarrow T_{k+1} = (-1)^k \binom{100}{k} x^{900-10k} \quad \dots(1)\end{aligned}$$

Si es el término independiente, entonces el exponente de "x" debe ser cero.

$$900 - 10k = 0 \rightarrow k = 90 \quad \dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1), se tiene:

$$T_{91} = (-1)^{90} \binom{100}{90} = \binom{100}{90}$$

Rpta.: A

2. Si el cuarto término del desarrollo del binomio $(x^4 + x^{-3})^n$ es de la forma αx^{24-n^2} , halle el valor numérico del tercer término cuando $x = \sqrt[3]{2}$.

A) 30 B) 40 C) 60 D) 50 E) 20

Solución:

$$i) T_4 = \binom{n}{3} (x^4)^{n-3} (x^{-3})^3 = \binom{n}{3} x^{4n-21} = \alpha x^{24-n^2}$$

$$\rightarrow 4n - 21 = 24 - n^2$$

$$\rightarrow n^2 + 4n - 45 = 0$$

$$\rightarrow (n+9)(n-5) = 0 \rightarrow n = 5$$

$$\text{Así: } (x^4 + x^{-3})^5$$

$$T_3(x) = \binom{5}{2} (x^4)^3 (x^{-3})^2 = \binom{5}{2} x^6$$

ii) Evaluando $T_3(x)$ cuando $x = \sqrt[3]{2}$

$$\therefore T_3(\sqrt[3]{2}) = 10.4 = 40.$$

Rpta.: B

3. Halle el coeficiente de " x^5 " en el desarrollo de $(1-2x+3x^2)^5$.

- A) -1042 B) -1020 C) -1052 D) -1062 E) -1032

Solución:

Agrupando $(1-2x)$ y desarrollando el binomio $[(1-2x)+3x^2]^5$ se tiene

$$[(1-2x)+3x^2]^5 = \underbrace{(1-2x)^5}_{T_1} + \underbrace{5(1-2x)^4(3x^2)}_{T_2} + \underbrace{10(1-2x)^3(3x^2)^2}_{T_3} + \dots$$

En el desarrollo solo los tres primeros términos contienen a " x^5 ".

Para $T_1 = (1-2x)^5$ el coeficiente de x^5 es $(-2)^5 = -32$

Para $T_2 = 5(1-2x)^4(3x^2)$ el coeficiente de x^5 es $15 \binom{4}{3} (-2)^3 = -480$

Para $T_3 = 10(1-2x)^3(3x^2)^2$ el coeficiente de x^5 es $= 90 \binom{3}{1} (-2) = -540$

$\therefore$ Coeficiente de $x^5 = -32 - 480 - 540 = -1052$.

Rpta.: C

4. Para algunos activos (como las máquinas), cuyos valores de mercado caen rápidamente en los primeros años de uso, y después, más lentamente, con frecuencia se utiliza un método de depreciación llamado **método de doble saldo creciente**. El valor en libras de un tractor adquirido a C dólares se amortizará por este método durante " x " años y el valor en libras al final de " n " años está dado por

$$V(n) = C \left(1 - \frac{2}{x} \right)^n.$$

Si $D(n)$ representa el monto (en dólares) por el cual ha sido depreciado dicho tractor al final del año " n ", indique la suma del mayor con el menor coeficiente de la expresión $D(4)$.

- A) 18C B) 12C C) 24C D) 16C E) 8C

Solución:i) Calculado $D(n)$

$$\therefore D(n) = C - V(n) = C - C\left(1 - \frac{2}{x}\right)^n = C\left[1 - \left(1 - \frac{2}{x}\right)^n\right]$$

Para $n = 4$

$$D(4) = C\left[1 - \left(1 - \frac{2}{x}\right)^4\right] = C\left[1 - \left(1^4 + 4(1)^3\left(-\frac{2}{x}\right) + 6(1)^2\left(-\frac{2}{x}\right)^2 + 4(1)\left(-\frac{2}{x}\right)^3 + \left(-\frac{2}{x}\right)^4\right)\right]$$

$$D(4) = C\left(\frac{8}{x} - \frac{24}{x^2} + \frac{32}{x^3} - \frac{16}{x^4}\right)$$

Mayor coeficiente = $32C$ Menor coeficiente = $-24C$ La suma es $8C$.**Rpta.: E**

5. La expresión $\frac{x^{20a+35} + y^{-57+20a}}{x^{a+1} + y^{a-3}}$ es un cociente notable y "n" representa el número de términos de su desarrollo, halle el valor de $n - 2a$.

A) 15 B) 17 C) 18 D) 19 E) 14

Solución:

Como $\frac{x^{20a+35} + y^{-57+20a}}{x^{a+1} + y^{a-3}}$ es un cociente notable, entonces

$$\frac{20a+35}{a+1} = \frac{20a-57}{a-3} = n = \text{número de términos}$$

$$\rightarrow \frac{20a+35}{a+1} = n \rightarrow 20a+35 = na + n \dots(I)$$

$$\rightarrow \frac{20a-57}{a-3} = n \rightarrow 20a-57 = na - 3n \dots(II)$$

De (I) - (II), se tiene

$$92 = 4n \rightarrow n = 23$$

Luego

$$20a+35 = 23a+23$$

$$\rightarrow a = 4$$

$$\therefore n - 2a = 15.$$

Rpta.: A

6. Si $x^u y^{u-1}$ es el quinto término del cociente notable $\frac{x^a - y^{b+2}}{x^5 - y^{11}}$, halle el grado absoluto de uno de los términos centrales.

A) 113 B) 120 C) 114 D) 107 E) 106

Solución:

Dado el cociente notable $\frac{x^a - y^{b+2}}{x^5 - y^{11}}$, se tiene
 $\therefore$

$$\frac{a}{5} = \frac{b+2}{11} = n ; n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\rightarrow T_5 = (x^5)^{n-5} (y^{11})^4 = x^u y^{u-1}$$

$$\rightarrow 44 = u - 1 \wedge 5(n - 5) = u$$

$$\rightarrow u = 45 \rightarrow 5(n - 5) = 45 \rightarrow n = 14$$

$$\rightarrow T_{\text{Central(I)}} = T_{\frac{n}{2}} = T_7 = (x^5)^{14-7} (y^{11})^{7-1} = x^{35} y^{66} \rightarrow \text{G.A.}[T_{\text{Central(I)}}] = 35 + 66 = 101$$

$$\rightarrow T_{\text{Central(II)}} = T_{\frac{n}{2}+1} = T_8 = (x^5)^{14-8} (y^{11})^{8-1} = x^{30} y^{77} \rightarrow \text{G.A.}[T_{\text{Central(II)}}] = 30 + 77 = 107$$

El grado absoluto de uno de los términos centrales es 107.

Rpta.: D

7. Halle el número de términos que tendrá el siguiente producto:

$$(x^{34n} + x^{33n} + x^{32n} + \dots + x^n + 1)(x^{34n} - x^{33n} + x^{32n} - \dots - x^n + 1), \text{ donde } n \in \mathbb{Z}^+.$$

A) 35 B) 70 C) 50 D) 45 E) 80

Solución:

$$\text{Sea } p(x) = (x^{34n} + x^{33n} + x^{32n} + \dots + x^n + 1)(x^{34n} - x^{33n} + x^{32n} - \dots - x^n + 1)$$

De dicho producto se observa que:

$$\text{i) } x^{34n} + x^{33n} + x^{32n} + \dots + x^n + 1 = \frac{x^{35n} - 1}{x^n - 1}$$

$$\text{ii) } x^{34n} - x^{33n} + x^{32n} - \dots - x^n + 1 = \frac{x^{35n} + 1}{x^n + 1}$$

Reemplazando estos resultados en el producto original, se tiene

$$p(x) = \left[\frac{x^{35n} - 1}{x^n - 1} \right] \left[\frac{x^{35n} + 1}{x^n + 1} \right] = \frac{x^{70n} - 1}{x^{2n} - 1} = \frac{(x^{2n})^{35} - 1}{x^{2n} - 1} \rightarrow \text{es un cociente notable.}$$

El número de términos es 35.

Rpta.: A

8. Halle la suma de coeficientes del resto de la siguiente división:

$$\frac{x^{37} + x^{13} + x + 1}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}.$$

- A) 4 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

Solución:

Notemos que $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^6 - 1}{x - 1}$.

Usando el teorema del resto, se tiene

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1) \cdot 0$$

$$\rightarrow x^6 - 1 = 0 \rightarrow x^6 = 1$$

Dando forma al dividendo,

$$(x^6)^6 x + (x^6)^2 x + x + 1$$

$$\rightarrow \text{resto} = (1)^6 x + (1)^2 x + x + 1 = 3x + 1$$

$$\therefore r(1) = 3(1) + 1 = 4.$$

Rpta.: A

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

09

semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

RAÍCES DE UN POLINOMIO

1. Definición:

Un polinomio de grado n en la variable x , es una expresión algebraica de la forma:

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$; $a_n \neq 0$; $n \in \mathbb{Z}^+$, donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ son constantes (reales o complejas).

1.1 Observación:

Si $p(x) \in K[x]$; diremos que los coeficientes del polinomio $p(x)$ son constantes que pertenecen al conjunto K ; donde K puede ser $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ó $\mathbb{C}$.

Ejemplo 1:

$$1) p(x) = 0,8x^2 - 7x + 4,5x^3 \in \mathbb{Q}[x]$$

$$2) p(x) = \pi x - 4,1x^2 + 7 - 2x^3 \in \mathbb{R}[x]$$

$$3) p(x) = \sqrt{2}x^2 - 8x + (2i + 1)x^3 \in \mathbb{C}[x]$$

2. Definición:

α es una raíz de $p(x) \in K[x]$; si $p(\alpha) = 0$

Ejemplo 2:

Si r y s son las raíces de $p(x) = 4x^2 + 2x + 1$, calcule $N = \frac{4(r^2 + s^2) + 2(r + s)}{rs}$.

Solución:

Como r es raíz de $p(x) = 4x^2 + 2x + 1$

Se tiene $4r^2 + 2r + 1 = 0$

Como s es raíz de $p(x) = 4x^2 + 2x + 1$

Se tiene $4s^2 + 2s + 1 = 0$

$$\therefore N = \frac{4(r^2 + s^2) + 2(r + s)}{rs} = \frac{\frac{-2}{1}}{\frac{1}{4}} = -8$$

3. Definición:

α es una raíz de multiplicidad $m \in \mathbb{Z}^+$ de $p(x)$ si

$$p(x) = (x - \alpha)^m q(x); \quad \text{donde } q(\alpha) \neq 0.$$

3.1 Observación: La multiplicidad indica el número de veces que se repite una raíz.

Ejemplo 3:

$$\text{Si } p(x) = (x + 5)^3(x + 6)^4(x - 2)$$

α raíz de $p(x)$	Multiplicidad m
$\alpha = -5$	$m = 3$
$\alpha = -6$	$m = 4$
$\alpha = 2$	$m = 1$ (raíz simple)

1. Raíces de un polinomio cuadrático:

$$p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x] ; a \neq 0$$

Las raíces de $p(x)$ son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4.1 Observación: $\Delta = b^2 - 4ac$ es llamado el discriminante de $p(x)$.

4.2 Naturaleza de las raíces de $p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

	Raíces de $p(x)$ son:
$\Delta > 0$	Reales y diferentes
$\Delta = 0$	Reales e iguales
$\Delta < 0$	Complejas y conjugadas

Ejemplo 4:

Determine la naturaleza de las raíces del polinomio $p(x) = 3x^2 - 7x + 4$

Solución:

Para $p(x) = 3x^2 - 7x + 4$ se tiene $a = 3$, $b = -7$, $c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(4) = 49 - 48 = 1$$

Como $\Delta > 0$ sus raíces son reales y diferentes.

5. Relación entre raíces y coeficientes de un polinomio:**5.1 Polinomio de grado 2**

$$p(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$$

Si las raíces de $p(x)$ son x_1 y x_2 , entonces se cumple:

$$\text{i) } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{ii) } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

5.2 Polinomio de grado 3

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; a \neq 0$$

Si las raíces de $p(x)$ son x_1 , x_2 y x_3 , entonces se cumple:

$$\text{i) } x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{ii) } x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$$

$$\text{iii) } x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$$

Ejemplo 5:

Si a , b y c son las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 4x - (3x^2 + 1)$, halle el valor

numérico de $N = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$.

Solución

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

Raíces $\{a, b, c\}$

entonces

$$\begin{cases} a+b+c = 3 \dots (1) \\ ab+ac+bc = 4 \dots (2) \\ abc = 1 \dots (3) \end{cases}$$

$$N = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{3-c} + \frac{1}{3-a} + \frac{1}{3-b}$$

$$= \frac{(3-a)(3-b) + (3-c)(3-b) + (3-c)(3-a)}{(3-c)(3-a)(3-b)}$$

$$= \frac{27 - 6(a+b+c) + (ab+ac+bc)}{27 - 9(a+b+c) + 3(ab+ac+bc) - (abc)} = \frac{27 - 18 + 4}{27 - 27 + 12 - 1} = \frac{13}{11}$$

6. Propiedad: Teorema de paridad de raíces

- i) Si $p(x) \in R[x]$ y $\alpha = a + bi$ es una raíz de $p(x)$, donde a y $b \in R$ y $b \neq 0$ entonces $\bar{\alpha} = a - bi$ es otra raíz de $p(x)$.
- ii) Si $p(x) \in Q[x]$ y $a + b\sqrt{r}$ es una raíz de $p(x)$, donde a y $b \in Q$, $r \in Q^+$ y $\sqrt{r} \in I$ entonces $a - b\sqrt{r}$ es otra raíz de $p(x)$.

Ejemplo 6:

Si las raíces de un polinomio mónico de menor grado con coeficientes racionales son $3 - \sqrt{5}$ y 1 , determine el coeficiente del término lineal del polinomio.

Solución

Las raíces del polinomio $3 - \sqrt{5}$; $3 + \sqrt{5}$; 1

$$p(x) = (x-1)\left(x - (3 + \sqrt{5})\right)\left(x - (3 - \sqrt{5})\right)$$

$$p(x) = x^3 - 7x^2 + 10x - 4$$

El coeficiente del término lineal del polinomio es 10

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si -1 es una raíz de $p(x) = 2x^3 - ax^2 + bx + 3$ y la suma de los coeficientes de $p(x)$ es -4 , determine la mayor raíz de $p(x)$.

A) 2 B) 3 C) $\frac{1}{2}$ D) 1

Solución

1) Como -1 es raíz de $p(-1) = 0 \rightarrow 2(-1)^3 - a(-1)^2 + b(-1) + 3 = 0 \rightarrow a + b = 1$

2) Suma de coeficientes de $p(x)$ es -4

$$2 - a + b + 3 = -4$$

$$a - b = 9$$

$$3) \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 9 \end{cases}$$

$$a = 5 ; b = -4$$

$$4) p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$$

$$\text{raíces} = \{-1, x_1, x_2\}$$

$$\text{i) } -1 + x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{ii) } -1 \cdot x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{raíces} = \left\{-1, \frac{1}{2}, 3\right\}$$

$\therefore$ La mayor raíz es 3

Rpta.: B

2. Yamile nació el $\overline{ab}$ de setiembre del $\overline{a0(b-1)0}$ donde a, b y c son las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - bx^2 - 4x + a^3$; $\{a, b\} \in \mathbb{Z}^+$, determine cuántos años tendrá Yamile el $\overline{b(b-c)}$ de agosto del $\overline{b0(ab+c)(a+c)}$.

A) 11 años B) 8 años C) 10 años D) 9 años

Solución:

$$p(x) = x^3 - bx^2 - 4x + a^3$$

$$\text{raíces} = \{a, b, c\}$$

$$1) a + b + c = b$$

$$c = -a$$

$$2) ab + bc + ca = -4$$

$$3) abc = -a^3$$

$$bc = -a^2$$

$$\text{De 1) } b(-a) = -a^2$$

$$b = a$$

Reemplazando en 2)

$$aa + a(-a) + (-a)a = -4$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2$$

$$\text{raíces} = \{2, 2 - 2\}$$

$$c = -2$$

∴ Yamile nació el 22 de setiembre del 2010, ella tendrá 9 años

el 24 de agosto del 2020

Rpta.: D

3. Renato obtuvo un ingreso de 90 soles al vender $(a+b)$ latas de atún a “c” soles cada una, donde $(a+b)$ es una raíz simple y “c” es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio $p(x) = (x-a)(x-b)^2 - a^2b$, ¿cuántas latas de atún vendió Renato?

A) 6

B) 15

C) 10

D) 18

Solución:

$$\text{raíces} = \{a+b; c; c\}$$

$$p(x) = x^3 - (2b+a)x^2 + (b^2 + 2ab)x - ab^2 - a^2b$$

$x = a+b$	1	$-2b-a$	$b^2 + 2ab$	$-ab^2 - a^2b$
		$a+b$	$-ab-b^2$	a^2b+ab^2
	1	$-b$	ab	0

$$x^2 - bx + ab = 0$$

$$i) \Delta = 0$$

$$b^2 - 4(1)ab = 0$$

$$b^2 = 4ab$$

$$b = 4a$$

$$ii) x = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2(1)}$$

$$x = \frac{b}{2} = 2a$$

$$c = 2a$$

$$\text{raíces} = \{5a; 2a; 2a\}$$

$$iii) \text{Ingreso} = (a + b)c$$

$$90 = (5a)2a$$

$$a = 3$$

$\therefore$ Número de latas de atún es 15

Rpta.: B

4. El precio en miles de dólares de un auto esta dado por el grado de $[p(x)]^{\alpha+\beta} \cdot p(x)$ es un polinomio de grado $(\alpha + \beta + 1)$ y mónico, si sus raíces son -1 , 5 y -3 ; donde 5 es raíz de multiplicidad α y -3 es raíz simple además el término independiente de $p(x)$ es 75 y la suma de coeficientes de $p(x)$ es 512 , halle el precio del auto.

A) 12 mil dólares B) 16 mil dólares C) 56 mil dólares D) 30 mil dólares

Solución:

$$p(x) = (x - 5)^\alpha (x + 1)^\beta (x + 3)$$

$$i) p(0) = (-5)^\alpha (1)^\beta (3)$$

$$75 = (-5)^\alpha (1)^\beta (3)$$

$$25 = (-5)^\alpha$$

$$\alpha = 2$$

$$ii) p(1) = (1 - 5)^2 (1 + 1)^\beta (1 + 3)$$

$$512 = (-4)^2 (2)^\beta (4)$$

$$8 = (2)^\beta$$

$$\beta = 3$$

grado de $p(x)$ es 6

grado de $[p(x)]^5$ es 30

∴ El precio del auto es 30 mil dólares.

Rpta.: D

5. Las edades de tres hermanas en años, están representadas por las raíces del polinomio $p(x) = bx^3 - 21x^2 + 126x - 216$, las cuales están en progresión geométrica, determine la edad de la hermana mayor dentro de años.

A) 12 años

B) 28 años

C) 13 años

D) 14 años

Solución:

$$p(x) = bx^3 - 21x^2 + 126x - 216$$

$$1) \text{ raíces} = \{ a; ar; ar^2 \}$$

$$i) a + ar + ar^2 = \frac{21}{b}$$

$$ii) a^2r + a^2r^3 + a^2r^2 = \frac{126}{b}$$

$$iii) a^3r^3 = \frac{216}{b}$$

$$2) \text{ de ii) y i) } ar \underbrace{(1+r+r^2)} = \frac{126}{b}$$

$$ar \frac{21}{b} = \frac{126}{b}$$

$$ar = 6 \dots \dots \dots (*)$$

$$3) \text{ de iii) y (*)}$$

$$216 = \frac{216}{b}$$

$$b = 1$$

$$4) \text{ de i) y (*)}$$

$$\frac{6}{r}(1+r+r^2) = \frac{21}{1}$$

$$r = 2 \vee r = \frac{1}{2}$$

$$\text{raíces} = \{ 3; 6; 12 \}$$

∴ La edad de la hermana mayor dentro de 1 año sera 13 años

Rpta.: C

6. En un examen final de matemática el resultado fue el siguiente:
 alumnos aprobados $(a+3)$; alumnos desaprobados $(|b|-2)$. Si a y b se obtienen del polinomio $p(x) = x^3 + bx^2 + ax - 12$ en $R[x]$, siendo $1 - \sqrt{3}i$ una raíz de $p(x)$, determine el número total de alumnos que rindieron el examen final de Matemática.
- A) 13 B) 19 C) 16 D) 20

Solución:

Por dato: $p(x) \in R[x]$

Las raíces de $p(x)$ son $\{1 - \sqrt{3}i; 1 + \sqrt{3}i; r\}$

$$i) (1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)(r) = 12 \Rightarrow r = 3$$

$$ii) (1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{3}i) + r = -b$$

$$2 + r = -b \Rightarrow b = -5 \dots (1)$$

$$iii) (1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i)r + (1 + \sqrt{3}i)r = a$$

$$4 + 2r = a \Rightarrow a = 10$$

Alumnos aprobados $a + 3 = 13$

Alumnos desaprobados $|b| - 2 = 3$.

Total de alumnos = 16 .

Rpta.: C

7. Un comerciante compra “m” decenas de celulares a un precio de $\overline{m0}$ decenas de soles por unidad, para abastecer su negocio. Si m y $(m + 4\sqrt{3})$, son raíces del polinomio $p(x) = x^3 - tx^2 + kx - m$, con coeficientes racionales .Y cada celular se vende en k decenas de soles. Estime cuanto seria la ganancia por la venta de “m” decenas de celulares, si los gastos por alquiler de local ascienden a “t” cientos de soles.
- A) 18200 B) 21000 C) 20300 D) 19000

Solución:

$$\text{raíces} = \{m + 4\sqrt{3}; m - 4\sqrt{3}; m\}$$

se cumple :

$$i) (m + 4\sqrt{3})(m - 4\sqrt{3})m = m \rightarrow m = 7$$

$$ii) m + 4\sqrt{3} + m - 4\sqrt{3} + m = t \rightarrow t = 21$$

$$iii) (7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3}) + (m + 4\sqrt{3})7 + (m - 4\sqrt{3})7 = 99 = k$$

Reemplazando:

El número de celulares que compró es 70 unidades.

El costo unitario es 700 soles.

El precio de venta es 990 soles.

Costo fijo es 2100 soles.

$$\begin{aligned}\text{Utilidad} &= \text{ingreso} - \text{costo} = 990(70) - [700(70) + 2100] \\ &= 18200\end{aligned}$$

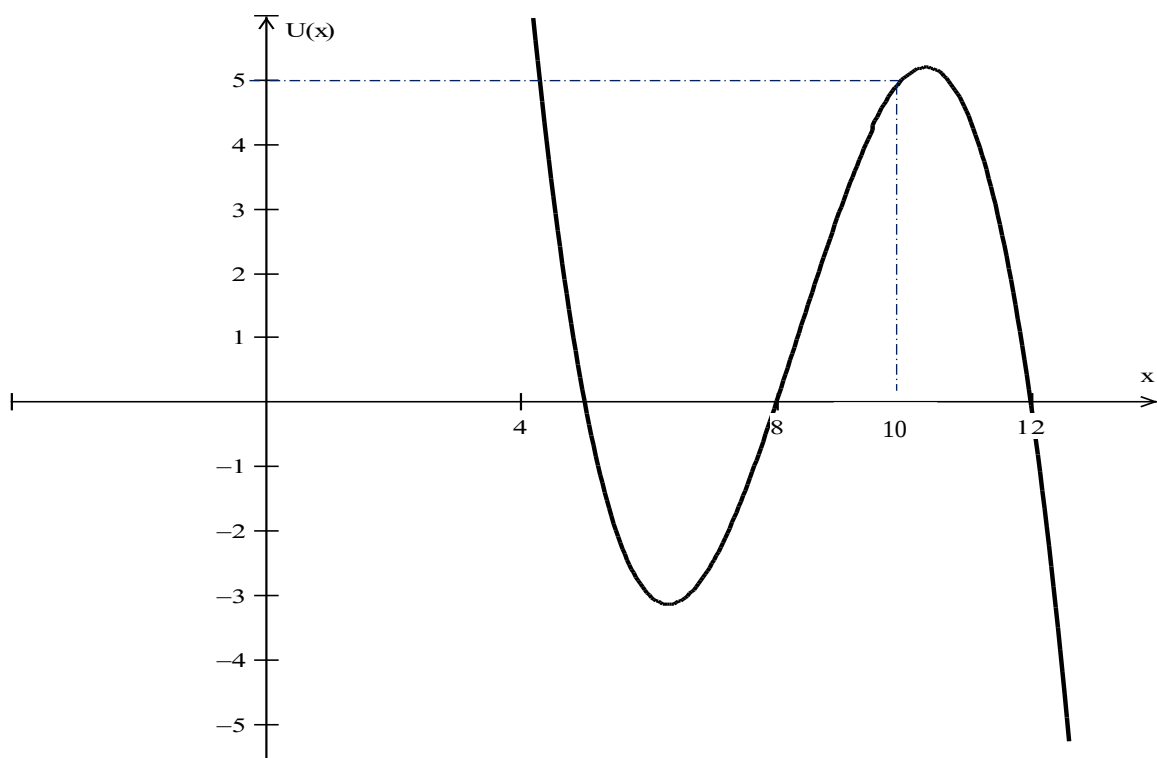
Ganancia es de 18200 soles.

Rpta.: A

8. En la siguiente gráfica se muestra la información de la utilidad de la empresa Estilos, durante el mes de mayo.

$U(x)$: es la Utilidad de la empresa Estilos (en miles de soles) el día "x" de mayo del 2020.

$U(x)$ está representado por un polinomio de menor grado posible.



Si el 13 de mayo obtuvo una pérdida de 10000 soles, determine cuál fue la utilidad obtenida el 11 de mayo del 2020.

- A) 4500 soles B) 4600 soles C) 3500 soles D) 3750 soles

Solución:

$$U(x) = a(x-r)(x-8)(x-12)$$

$$1) U(10) = a(10-r)(2)(-2)$$

$$5 = a(10-r)(-4)$$

$$2) U(13) = a(13-r)(5)(1)$$

$$-10 = a(13-r)(5)$$

$$-2 = a(13-r)$$

$$\text{de 1) : 2)}$$

$$\frac{5}{-2} = \frac{a(10-r)(-4)}{a(13-r)}$$

$$r = 5 \rightarrow a = -0.25$$

$$U(x) = -0.25(x-5)(x-8)(x-12)$$

$$U(11) = -0.25(6)(3)(-1) = 4500$$

$\therefore$ Utilidad el 11 de mayo es de 4500 soles

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si el polinomio $p(x) = 2x^3 + (a-2)x - (a^2 - 6)$ tiene raíces no reales y una raíz real igual a 1, determine las raíces de $p(x)$.

$$A) \left\{ 1; \frac{-2 + \sqrt{5}i}{2}; \frac{-2 - \sqrt{5}i}{2} \right\}$$

$$B) \left\{ 1; \frac{-1 + \sqrt{5}i}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}i}{2} \right\}$$

$$C) \left\{ 1; \frac{-1 + 2\sqrt{5}i}{2}; \frac{-1 - 2\sqrt{5}i}{2} \right\}$$

$$D) \left\{ 1; -1 + \sqrt{5}i; -1 - \sqrt{5}i \right\}$$

Solución:

$$p(x) = 2x^3 + (a-2)x - (a^2 - 6)$$

i) 1 es raíz entonces:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & a-2 & -a^2+6 \\ 1 & & 2 & 2 & a \\ \hline & 2 & 2 & a & -a^2+a+6=0 \end{array}$$

$$a^2 - a - 6 = 0$$

$$a = -2 \vee a = 3$$

ii) $2x^2 + 2x + a = 0$

$$\Delta < 0$$

$$4 - 4(2)a < 0$$

$$\frac{1}{2} < a$$

de i) y ii) $a = 3$

$$p(x) = 2x^3 + x - 3$$

calculando las raíces:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & & 2 & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}i}{4}$$

$$\therefore \text{raíces} = \left\{ 1; \frac{-1 + \sqrt{5}i}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}i}{2} \right\}$$

Rpta.: B

2. Si las raíces del polinomio, $p(x) = x^3 - a^2x + a^3 + 1$ están en progresión aritmética. Determine el valor de verdad de las proposiciones en el orden respectivo.

I. 2 es raíz de $p(x)$.

II. $a = -1$

III. $p(x)$ tiene 2 raíces no reales.

IV. La suma de los cuadrados de las raíces de $p(x)$ es 2.

A) VVFF

B) FFFV

C) FVFF

D) FVFF

Solución:

$$p(x) = x^3 + 0x^2 - a^2x + a^3 + 1$$

$$\text{raíces} = \{\alpha; \alpha + r; \alpha + 2r\}$$

$$\text{i) } \alpha + \alpha + r + \alpha + 2r = 0$$

$$3r + 3\alpha = 0$$

$$r + \alpha = 0$$

$$\text{raíces} = \{-r; 0; r\}$$

$$\text{ii) } -r(0)(r) = -(a^3 + 1)$$

$$0 = -(a^3 + 1)$$

$$a = -1$$

$$\text{iii) } (-r)0 + 0(r) + -r(r) = -a^2$$

$$r^2 = a^2 \rightarrow r^2 = 1 \rightarrow r = 1 \vee r = -1$$

$$\therefore \text{raíces} = \{-1; 0; 1\}$$

I. 2 es raíz de $p(x)$ (F)

II. $a = -1$ (V)

III. $p(x)$ tiene 2 raíces no reales (F)

IV. La suma de los cuadrados de las raíces de $p(x)$ es 2 (V)

Rpta.:C

3. Si el polinomio $p(x) = x^3 - mx^2 + nx - b$ presenta tres raíces, dos de ellas son opuestas; ($b \neq 0$), calcule el valor de "b".

A) $b = \frac{m}{n}$

B) $b = -(m+n)$

C) $b = nm$

D) $b = -nm$

Solución:

$$\text{raíces} = \{r, -r, s\}$$

$$1) -r + r + s = m$$

$$s = m$$

$$2) -r(r) + s(-r) + rs = n$$

$$-r^2 = n$$

$$3) -r(r)s = b$$

de 1) y 2) reemplazando en 3)

$$\therefore nm = b$$

Rpta.: C

4. La utilidad de una empresa (en miles de soles) ,durante el mes de febrero del 2020, se estima mediante el polinomio $p(x) = x^3 - (m+17)x^2 + kx - 70m$, donde "x" representa el día de dicho mes . Si los días 2 y 7 de febrero , la empresa no obtuvo ganancia ni pérdida , determine la utilidad empresa el 11 de febrero del 2020.

A) 64 mil soles B) 14 mil soles C) 100 mil soles D) 36 mil soles

Solución:

1) Las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - (m+17)x^2 + kx - 70m$, son: $\{2, 7, r\}$

- i. $2+7+r = m+17 \rightarrow r = m+8$
- ii. $(2)(7)+(2)(r)+(7)(r) = k \rightarrow 9r+14 = k$
- iii. $(2)(7)(r) = 70m \rightarrow r = 5m$

Luego: $m = 2 \wedge r = 10 \wedge k = 104$

2) El polinomio $p(x)$ es:

$$p(x) = x^3 - 19x^2 + 104x - 140$$

$$p(11) = 11^3 - 19(11)^2 + 104(11) - 140 = 36$$

La utilidad empresa el 11 de febrero del 2020 es de 36 mil soles

Rpta.: D

5. Lita tiene dos hijas gemelas y una hija mayor de $(ab)^2$ años .Las edades de las tres hermanas, en años, están representados por los cuadrados de las raíces del polinomio $p(x) = ax^3 + (2 - a^2b)x^2 + (1 - 2ab)x - abc$ donde las raíces son reales y $\{a, b\} \in \mathbb{Z}^+$. Si la diferencia de las edades, de la hermana mayor y una de las gemelas es de 8 años ,determine la edad que la hermana mayor tendrá dentro de $(b+c)$ años.

A) 15 años B) 12 años C) 13 años D) 14 años

Solución:

$$\text{raíces} = \{ab; \alpha; \beta\}$$

$$\text{Edad de la mayor hermana} = (ab)^2$$

$$\text{Edad de una gemela} = \alpha^2$$

$$\text{Edad de la otra gemela} = \beta^2$$

$x = ab$	a	$2 - a^2b$	$1 - 2ab$	$-abc$
	a^2b	$2ab$	ab	
	a	2	1	0

i) $c = 1$

ii) $\alpha^2 = \beta^2 \rightarrow \alpha = \beta \vee \underbrace{\alpha = -\beta}_{\text{no se da}}$

como :

$$ab\alpha\beta = bc$$

$$a\alpha\beta = 1$$

$$a\alpha(-\alpha) = 1$$

$$-a\alpha^2 = 1 \rightarrow \leftarrow$$

$$\text{luego } \alpha = \beta$$

$$\text{iii) } ax^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$4 - 4(a)1 = 0$$

$$a = 1$$

$$x = \frac{-2 \pm 0}{2(1)}$$

$$x = -1$$

$$\text{iv) raices} = \{b; -1; -1\}$$

$$\text{Edad de la mayor hermana} = b^2$$

$$\text{Edad de una gemela} = 1$$

$$\text{v) } b^2 - 1 = 8$$

$$b = 3$$

$$\text{Edad de la mayor hermana} = 9$$

$\therefore$ La edad de la mayor hermana dentro (3+1) de años será 13 años

Rpta.: C

6. José es un empresario, que se dedica a la elaboración y venta de zapatillas de marca. Si en el presente mes invirtió la cantidad de $(2a+b)$ miles de soles en la elaboración de estas zapatillas. Determine los ingresos que debe obtener José, si tiene como finalidad ganar 3500 soles en esta mercadería. Siendo a y $b \in \mathbb{Z}$ y $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 44$ un polinomio con raíz $5 + \sqrt{3}$.

A) 23500 soles B) 13500 soles C) 18000 soles D) 21500 soles

Solución:

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 44$$

$$\text{Raíces: } 5 + \sqrt{3}, 5 - \sqrt{3} \text{ y } r$$

$$1) (5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})r = 44 \rightarrow r = 2$$

Luego

$$2) 5 + \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3} + 2 = -a \rightarrow a = -12$$

$$3) (5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3}) + (5 + \sqrt{3})2 + (5 - \sqrt{3})2 = b \rightarrow b = 42$$

$$\rightarrow \text{Invertio: } 2(-12) + 42 = 18 \text{ mil soles}$$

$$\text{Ingresos} = 18 \text{ mil} + 3500 = 21500 \text{ soles}$$

Rpta.: D

7. Un polinomio cúbico de coeficiente principal 2, tiene dos raíces que son, una inversa de la otra y la tercera raíz es la suma de las dos anteriores. Si el coeficiente del término lineal es 10, halle el mayor valor del término independiente.

A) 4 B) -4 C) 6 D) -6

Solución:

$$\text{raíces} = \left\{ a; \frac{1}{a}; a + \frac{1}{a} \right\}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= 2(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-\left(a+\frac{1}{a}\right)\right) \\ &= 2\left[x^2 - \left(a+\frac{1}{a}\right)x + 1\right]\left[x - \left(a+\frac{1}{a}\right)\right] \\ &= 2x^3 - 4\left(a+\frac{1}{a}\right)x^2 + 2\left(1+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\right)x - 2\left(a+\frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

por dato

$$2\left(1+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\right) = 10$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = 4$$

$$a+\frac{1}{a} = 2 \quad \vee \quad a+\frac{1}{a} = -2$$

∴ El mayor valor del término independiente es 4

Rpta.: A

8. Si la suma de las raíces no reales de $p(x) = x^3 - 3ax^2 + 11ax - 65$ es $(2a-2)$; $a \in \mathbb{Z}$, determine la parte imaginaria de una raíz no real de $p(x)$.

A) -3 B) -3i C) 3i D) 2

Solución:

$$\text{raíces} = \left\{ \underbrace{x_1, x_2}_{\text{raíces no reales}}, \underbrace{x_3}_{\text{raíz real}} \right\}$$

$$1) x_1 + x_2 + x_3 = 3a$$

$$2a - 2 + x_3 = 3a$$

$$x_3 = a + 2$$

$$\text{raíces} = \left\{ \underbrace{x_1, x_2}_{\text{raíces no reales}}, \underbrace{a+2}_{\text{raíz real}} \right\}$$

$$2) x_1 x_2 (a + 2) = 65$$

$$3) x_1 x_2 + x_2 (a + 2) + x_1 (a + 2) = 11a$$

$$(a + 2)(x_1 x_2 + x_2 (a + 2) + x_1 (a + 2)) = (11a)(a + 2)$$

$$65 + (a + 2)^2 (2a - 2) = 11a(a + 2)$$

$$2a^3 - 5a^2 - 22a + 57 = 0$$

$$a = 3 \rightarrow \underbrace{x = 5}_{\text{raíz}}$$

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 33x - 65$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 33 & -65 \\ 5 & & 5 & -20 & 65 \\ \hline & 1 & -4 & 13 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

$$x = 2 + 3i$$

$$x = 2 - 3i$$

∴ parte imaginaria de una raíz no real es -3

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si a , b y c son las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - x + 2$, halle el valor de

$$L = \frac{a(a+1)}{bc} + \frac{b^2+b}{ac} + \frac{1}{(c^2+c)^{-1}ab}.$$

- A) 0,5 B) 2 C) -2 D) 4

Solución:

$$p(x) = x^3 - x + 2 \text{ con C.S.} = \{a, b, c\}$$

$$\text{entonces } \begin{cases} \text{i. } a + b + c = 0 \\ \text{ii. } ab + ac + bc = -1 \\ \text{iii. } abc = -2 \end{cases}$$

$$L = \frac{a^2+a}{bc} + \frac{b^2+b}{ac} + \frac{c^2+c}{ab} = \frac{a^3+a^2+b^3+b^2+c^3+c^2}{abc}$$

$$L = \frac{(a^3+b^3+c^3) + (a^2+b^2+c^2)}{abc} = \frac{3abc - 2(ab+bc+ac)}{abc}$$

$$L = \frac{3(-2) - 2(-1)}{(-2)} = 2$$

Rpta.: B

2. El volumen en centímetros cúbicos de una caja, está representado por el valor numérico del polinomio $p(x) = x^3 - 15x^2 + 71x - 105$ para cuando $x = n \in \mathbb{R}^+$. Determine el valor de n de tal manera que el volumen de la caja sea numéricamente igual al producto de las raíces de $p(x)$.

- A) 8 cm B) 10 cm C) 16 cm D) 7 cm

Solución:

$$p(x) = x^3 - 15x^2 + 71x - 105$$

$$\text{Sea C.S.} = \{a, b, c\} \text{ entonces } a \cdot b \cdot c = 105$$

$$\text{Debe ocurrir } p(n) = 105$$

$$\Rightarrow n^3 - 15n^2 + 71n - 210 = 0$$

$$\Rightarrow (n-10)(n^2 - 5n + 21) = 0 \quad \therefore n = 10 \text{ cm}$$

Rpta.: B

3. Si la ecuación cúbica $2x^3 = x^2 + 1$ tiene como raíces a , b y c , determine la ecuación mónica y cúbica que tenga como raíces a , ab , bc y ac .

A) $2x^3 + x^2 - 1 = 0$

B) $2x^3 + x - 1 = 0$

C) $4x^3 + x - 1 = 0$

D) $x^3 + 4x^2 - 4 = 0$

Solución:

Tenemos $2x^3 - x^2 - 1 = 0$ con C.S. = $\{a, b, c\}$ tal que

$$\begin{cases} a + b + c = \frac{1}{2} \\ ab + bc + ac = 0 \\ abc = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La ecuación cúbica de raíces ab , bc y ac es

$$(x - ab)(x - bc)(x - ac) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - (ab + bc + ac)x^2 + (ab^2c + a^2bc + abc^2)x - (abc)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - (ab + bc + ac)x^2 + (abc)(a + b + c)x - (abc)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + \left(\frac{1}{4}\right)x - \left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow 4x^3 + x - 1 = 0$$

Rpta.: C

4. El número de canicas que tienen José y Pedro son las raíces del polinomio $p(x) = 2x^2 - (6a - 6)x + 108$. Si el número de canicas que tiene José es el doble de la cantidad de canicas que tiene Pedro, disminuido en tres unidades, ¿cuántas canicas tienen juntos José y Pedro?

A) 16

B) 14

C) 15

D) 18

Solución:

$$p(x) = 2x^2 - (6a - 6)x + 108$$

$$\text{C.S.} = \{j, p\} \text{ donde } \begin{cases} j + p = 3a - 3 \dots (1) \\ j, p = 54 \dots (2) \\ j = 2p - 3 \dots (\text{dato 1}) \end{cases}$$

$$(\text{dato 1}) \text{ en } (1): (2p - 3) + p = 3a - 3 \Rightarrow a = p \dots (3)$$

$$(\text{dato 1}) \text{ en } (2): (2p - 3)(p) = 54 \Rightarrow 2p^2 - 3p - 54 = 0$$

$$\Rightarrow (2p + 9)(p - 6) = 0 \Rightarrow p = 6$$

$$\text{En } (1): j + p = 3(6) - 3 = 15 \text{ canicas}$$

Rpta.: C

5. Durante el mes de junio, la ciudad de Puno sufrió el invierno más severo de las últimas tres décadas. La variación de la temperatura (en grados Celsius) en Puno fue numericamente igual al valor numérico del polinomio $p(x) = 2x^3 + (n-28)x^2 + (4n+6)x - 3n$ cuando x es el número de días transcurridos de la segunda semana del mes de junio. Si al cabo del primer día de dicha semana se registró 0°C , ¿cuál fue la temperatura en Puno, al cabo del cuarto día de la segunda semana de junio?

A) -2°C B) -5°C C) -6°C D) -3°C

Solución

Por dato: $p(1) = 0 \Rightarrow 2 + (n-28) + (4n+6) - 3n = 0 \Rightarrow n = 10$

Por lo tanto, $p(x) = 2x^3 - 18x^2 + 46x - 30$

$p(4) = 2(64) - 18(16) + 46(4) - 30 = 312 - 318 = -6$

Al cabo del cuarto día la temperatura fue de -6°C .

Rpta.: C

6. En el examen de admisión 2020-I de la UNMSM se presentaron $40(m-n)$ postulantes a la Escuela Profesional de Ingeniería Biomédica e ingresaron a dicha escuela $(m-4n)$ postulantes. Si m y n son números racionales y $2 + \sqrt{2}$ es una raíz del polinomio $p(x) = x^3 + (2m+n+2)x^2 + 2nx + 10$, determine la cantidad de postulantes que no ingresaron a la Escuela Profesional de Ingeniería Biomédica.

A) 520 B) 480 C) 40 D) 560

Solución:

$$p(x) = x^3 + (2m+n+2)x^2 + 2nx + 10$$

$$\text{C.S.} = \{2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, r\}$$

$$\text{iii. } (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})(r) = -10 \Rightarrow r = -5$$

$$\text{ii. } (2 + \sqrt{2}).(2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}).r + (2 - \sqrt{2}).r = 2n \Rightarrow 2 - 20 = 2n \Rightarrow n = -9$$

$$\text{i. } (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) + (-5) = -2m - n - 2 \Rightarrow -2m - n - 2 = -1 \Rightarrow m = 4$$

Número de postulantes a Ingeniería Biomédica: 520

Número de ingresantes a Ingeniería Biomédica: 40

Número de postulantes no ingresantes a Ingeniería Biomédica: $520 - 40 = 480$

Rpta.: B

7. Los esposos Luis y Heidi están conversando sobre los lugares y la cantidad de días que se tomarán como vacaciones. Ellos deciden lo siguiente:
- Luis: nos quedaremos en Cuzco solo m días.
 - Heidi: después viajaremos a Tacna para quedarnos allí n días.
- Si m es el número de raíces reales de $p(x).q(x)$ y n es el número de raíces diferentes no reales de $p(x).q(x)$ donde $p(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ y $q(x) = x^4 + 3x^2 + 2$; halle el total de días en que ambos esposos permanecieron en las ciudades de Cuzco y Tacna.
- A) 7 B) 5 C) 4 D) 6

Solución:

$$p(x) = x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x + 2)(x - 2)$$

$$q(x) = x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$$

$$p(x).q(x) = (x^2 + 1)^2(x^2 + 2)(x + 2)(x - 2)$$

raíces reales de $p(x).q(x)$: -2 y 2 $\therefore m = 2$

raíces diferentes no reales de $p(x).q(x)$: $-i, i, -\sqrt{2}i$ y $\sqrt{2}i$ $\therefore n = 4$

Los esposos Luis y Heidi se tomaron 6 días de luna de miel.

Rpta.: D

8. Javier parte a las 9 a.m. en un vuelo directo hacia Río de Janeiro desde el aeropuerto Jorge Chávez de Lima. El tiempo de vuelo desde Lima hacia Río de Janeiro es de $\left(\frac{4a - ab + a^2}{3}\right)$ horas exactas. Si $1 - \sqrt{2}$ es una raíz del polinomio $p(x) = x^3 - (2a - b)x^2 + \left(\frac{3a}{2} + b\right)x + 2$ de coeficientes racionales, ¿a qué hora de Lima, Javier llegará al aeropuerto Galeão de Río de Janeiro, de no presentarse contratiempo alguno?
- A) 12 m B) 1 p.m. C) 3 p.m. D) 4 p.m.

Solución:

$$p(x) = x^3 - (2a - b)x^2 + \left(\frac{3a}{2} + b\right)x + 2 \text{ con C.S.} = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, r\}$$

Tenemos

$$\text{iii. } (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})(r) = -2 \Rightarrow r = 2$$

$$\text{i. } (1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) + (r) = 2a - b \Rightarrow 2a - b = 4 \dots (1)$$

$$\text{ii. } (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})r + (1 + \sqrt{2})r = \frac{3a}{2} + b \Rightarrow \frac{3a}{2} + b = 3 \dots (2)$$

De (1) y (2): ($a = 2$ y $b = 0$)

El vuelo que realizó Javier duró $\frac{4(2) - 2(0) + (2)^2}{3} = 4$ horas.

Javier llegará a Río de Janeiro a las $9 + 4 = 13$ horas o sea, 1 p.m.

Rpta.: B

EJERCICIOS DE PROPUESTOS

1. Si $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ es raíz del polinomio mónico $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ con coeficientes enteros, halle el valor de $\sqrt{a+c+e^2}$.

A) 3 B) 1 C) 2 D) 5

Solución:

Sea $x = \sqrt{5} - \sqrt{3} \Rightarrow (x + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 5$
 $\Rightarrow x^2 - 2 = -2\sqrt{3}x \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = 12x^2 \Rightarrow x^4 - 16x^2 + 4 = 0$
 Identificando $a = 1, b = 0, c = -16, d = 0, e = 4$
 luego $\sqrt{a+c+e^2} = \sqrt{1-16+16} = 1$

Rpta.: B

2. Si se reparte tantos caramelos como niños hay en una guardería, faltarían dos caramelos para que todos los niños tengan la misma cantidad; pero, si a cada niño le dan 2 caramelos sobrarían $(3M+7)$ caramelos. Determine la cantidad de caramelos que hay para repartir, si $p(x) = 2x^3 + 3x - 12$ es un polinomio de raíces a, b y c , además $M = ab(a+b)^3 + bc(b+c)^3 + ac(a+c)^3$.

A) 35 B) 24 C) 53 D) 79

Solución

$$p(x) = 2x^3 + 0x^2 + 3x - 12$$

$$\text{Como C.S.} = \{a, b, c\} \text{ entonces } \begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ac = \frac{3}{2} \\ abc = 6 \end{cases}$$

$$M = ab(a+b)^3 + bc(b+c)^3 + ac(a+c)^3$$

$$M = ab(-c)^3 + bc(-a)^3 + ac(-b)^3 = -abc(c^2 + a^2 + b^2)$$

$$M = (-6)(-3) = 18$$

Número de caramelos: C

Número de niños: N

$$\text{Tenemos } C = N \cdot N - 2 = 2 \cdot N + (3 \cdot 18 + 7) \Rightarrow N^2 - 2 = 2N + 61$$

$$N^2 - 2N - 63 = 0 \Rightarrow (N-9)(N+7) = 0 \Rightarrow N = 9$$

$$\text{El número de caramelos es } C = (9)^2 - 2 = 79$$

Rpta.: D

3. José María compra 200 litros de leche para venta en su negocio. Si el precio de costo de cada litro es de $\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2m}{9}$ soles y el precio de venta es de 6 soles por cada litro. ¿Qué utilidad obtendrá José María por la venta de los 200 litros de leche?, sabiendo que α y β son raíces del polinomio $p(x) = x^2 - 6x + m$.
- A) 400 soles B) 420 soles C) 600 soles D) 250 soles

Solución:

$$p(x) = x^2 - 6x + m \text{ con C.S.} = \{ \alpha, \beta \} \text{ entonces } \begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \alpha \cdot \beta = m \end{cases}$$

$$\text{Como } \alpha + \beta = 6 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 36 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2m = 36$$

$$\text{Precio de costo de 1 litro de leche: } \frac{36}{9} = 4 \text{ soles}$$

$$\text{Utilidad total} = 200 \cdot (6 - 4) = 400 \text{ soles.}$$

Rpta.: A

4. Los estudiantes Pedro y Luis apostaron quien resolvía más rápido y de manera correcta el siguiente problema: "Sea $p(x) = (2t)^2 + bx^3 - mx^2 - (3t + 6)x$ un polinomio mónico y completo, si t es un cero de multiplicidad dos del $p(x)$, calcule los valores de m y t ". Ambos estudiantes resolvieron el problema de manera correcta, Pedro lo resolvió en $|t|$ minutos mientras que Luis lo resolvió en m minutos. Determine cuántos minutos empleó el estudiante ganador.
- A) 2 min B) 3 min C) 4 min D) 5 min

Solución:

$$p(x) \text{ es mónico} \Rightarrow b = 1$$

$$p(x) = x^3 - mx^2 - (3t + 6)x + 4t^2 \text{ de raíces } t, t \text{ y } r$$

Se tiene:

$$\text{iii. } t^2 \cdot r = -4t^2 \Rightarrow r = -4$$

$$\text{ii. } t^2 + t \cdot r + t \cdot r = -3t - 6 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \vee t = 3)$$

$$\text{Si } t = 2 \Rightarrow m = (2) + (2) + (-4) = 0 \dots p(x) \text{ no es completo}$$

$$\text{Si } t = 3 \Rightarrow m = (3) + (3) + (-4) = 2$$

Tiempo de Pedro: 3 min

Tiempo de Luis: 2 min

Rpta.: A

5. Sean $7m+3, m^2, 10m+6$ tres elementos consecutivos de una progresión aritmética. Determine la suma de las soluciones de la ecuación cuadrática $\left(m+\frac{1}{2}\right)x^2 - \left(\frac{m+1}{5}\right)x - 7 = 0$.

A) 19/9

B) 1/9

C) 9/11

D) 4/19

Solución:

$$\text{Se cumple } m^2 = \frac{(7m+3) + (10m+6)}{2} \Rightarrow 2m^2 - 17m - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (2m+1)(m-9) = 0 \Rightarrow \left(m = 9 \vee m = -\frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Para } m = 9 \text{ tenemos } 19x^2 - 4x - 14 = 0$$

$$\text{entonces la suma de soluciones es } \frac{4}{19}.$$

Rpta.: D

6. Halle la suma de coeficientes del polinomio de menor grado en $\mathbb{Q}[x]$ que tiene por raíz a la suma de coeficientes del polinomio de menor grado en $\mathbb{R}[x]$ que tiene por raíces a $2i-3, -\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$.

A) 2021

B) 2921

C) - 2679

D) - 2767

Solución

El polinomio $q(x)$ de menor grado en $\mathbb{R}[x]$ que tiene como raíces a $-3+2i, -\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$ es:

$$q(x) = [x - (-3+2i)][x - (-3-2i)](x + \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})$$

$$q(x) = [(x+3)-2i][(x+3)+2i](x^2 - \sqrt{2}x - 4)$$

$$q(x) = (x^2 + 6x + 13)(x^2 - \sqrt{2}x - 4)$$

$$\Rightarrow \sum \text{coef}[q(x)] = (20)(-3 - \sqrt{2}) = -60 - 20\sqrt{2}$$

El polinomio $p(x)$ de menor grado en $\mathbb{Q}[x]$ que tiene como raíz a $-60 - 20\sqrt{2}$ es:

$$p(x) = [x - (-60 - 20\sqrt{2})][x - (-60 + 20\sqrt{2})]$$

$$p(x) = [x + 60 + 20\sqrt{2}][x + 60 - 20\sqrt{2}]$$

$$p(x) = x^2 + 120x + 2800 \Rightarrow \sum \text{coef}[p(x)] = 1 + 120 + 2800 = 2921$$

Rpta: B

7. Si a , b y c son las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - 7x + 6$, determine el valor numérico de $M = \frac{-7(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2}$.

A) 8

B) 9

C) 10

D) 12

Solución:

$$\text{Si C.S.} = \{a, b, c\} \text{ entonces } \begin{cases} \text{i. } a + b + c = 0 \\ \text{ii. } ab + bc + ac = -7 \\ \text{iii. } abc = -6 \end{cases}$$

Como $a + b + c = 0$ entonces

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -18 \\ a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 14 \end{cases}$$

$$\text{luego } M = \frac{-7(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{(-7)(-18)}{(14)} = 9$$

Rpta.: B

8. En el siguiente polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + mx - 4$ se cumple que el cuadrado de la única raíz positiva es igual a la suma de los cuadrados de las raíces restantes. Halle el doble de dicha raíz positiva.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

Solución:

Sea C.S. = $\{a, b, c\}$ con $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$

$$\text{Por propiedad } \begin{cases} \text{i. } a + b + c = -2 \\ \text{ii. } ab + bc + ac = m \\ \text{iii. } abc = 4 \end{cases}$$

Dato $a^2 = b^2 + c^2$

$$\text{De ii. } a(b + c) + bc = m \Rightarrow a^2(-2 - a) + 4 = am \Rightarrow -2a^2 - a^3 + 4 = am \dots (1)$$

$$\text{Tenemos } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

$$\Rightarrow 2 = a^2 + m \Rightarrow 2a = a^3 + am \dots (2)$$

$$(1) \text{ en } (2): 2a = a^3 + (-2a^2 - a^3 + 4)$$

$$\Rightarrow 2a = -2a^2 + 4 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Rpta.: B

Álgebra

EJERCICIOS

1. Fabiola ha culminado con éxito sus primeros semestres en la facultad de Economía, donde "n" es tal que la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y + n = 0$ tiene un solo punto común con la recta $y = x - 1$. Si en total son 10 semestres de estudio, ¿cuántos semestres le faltan a Fabiola para concluir sus estudios?
- A) 3 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

Solución:

1) Reemplazando $y = x - 1$ en la ecuación de la circunferencia obtenemos:

$$2x^2 - 4x + n - 3 = 0$$

2) para que la recta tenga un solo un punto en común con la circunferencia, se requiere que el discriminante de la ecuación anterior sea 0, esto es:

$$16 - 4(2)(n - 3) = 0$$

3) Por lo tanto a Fabiola le faltarían 5 semestres para concluir sus estudios.

Rpta.: C

2. Si r y s son las raíces de $p(x) = x^2 + mx + n$, halle el valor de $H = \frac{ms}{s^2 + n} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s + m} - \frac{r + s}{rs}$; $mns \neq 0$.
- A) -1 B) C) 1 D) m/n E) $-m/n$

Solución:

1) Como s es raíz de $p(x)$ se tiene $s^2 + ms + n = 0 \rightarrow s^2 + n = -ms \vee s^2 + ms = -n$

2) Por la relación entre raíces y coeficientes se tiene

i) $r + s = -m$

ii) $s = n$

3) Luego $H = \frac{ms}{s^2 + n} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s + m} - \frac{r + s}{rs} = \frac{ms}{-ms} + \frac{m}{s^2 + sm} - \frac{-m}{n} = -1 + \frac{m}{-n} + \frac{m}{n} = -1$.

Rpta.: A

3. Mirkito compra en la tienda de Don José 2 pantalones y 3 camisas, cuyos precios unitarios, en soles, están representados por $(80n)$ y $(30r)$ respectivamente. Si por dicha compra Mirkito paga con $(2m+1)$ cientos de soles, donde m , n y r son la suma de sus raíces, la suma de los productos binarios de sus raíces y el producto de todas las raíces respectivamente de $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$, ¿cuántos soles recibió de vuelto Mirkito?
- A) 37 soles B) 35 soles C) 52 soles D) 60 soles E) 28 soles

Solución:

- 1) El monto de la compra de Mirkito es $160n + 90r$ soles y el paga con $100(2m+1)$ soles
- 2) Para el polinomio $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ se tiene la relación entre raíces y coeficientes
 - i) $m = 2$
 - ii) $n = \frac{3}{2}$
 - iii) $r = \frac{5}{2}$
- 3) Luego, el monto de su compra fue $240 + 225 = 465$ soles y pagó con 500 soles, luego recibió de vuelto 35 soles.

Rpta.: B

4. Si $\{p, q, p^{-1}, q^{-1}\}$ con $p \neq 0, q \neq 0$ es el conjunto de las raíces del polinomio $p(x) = x^4 + x^3 + mx^2 + x + 1$, halle el valor de $T = pq + \frac{1}{pq} + \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$.
- A) $m - 6$ B) $m - 4$ C) $m - 2$ D) m E) $m + 2$

Solución:

1) Para el polinomio $p(x) = x^4 + x^3 + mx^2 + x + 1$ $\{p, qp^{-1}, q^{-1}\}$ sus raíces, se tiene

$$i) pq + 1 + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 1 + \frac{1}{pq} = m \rightarrow pq + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 2 + \frac{1}{pq} = m$$

$$2) T = pq + \frac{1}{pq} + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = m - 2.$$

Rpta.: C

5. Carlos aborda un bus en Lima a las 7:00 a.m. con dirección a Huancayo. Si en promedio su viaje a dicha ciudad dura $\frac{5m+7n+14}{6}$ horas, ¿a que hora llegará Carlos a Huancayo? si $5 + \sqrt{13}$ es una raíz del polinomio $p(x) = x^3 + (3m - 2n - 22)x^2 + (2m + 9n + 26)x - 48; \{m, n\} \subset \mathbb{Q}$.
- A) 2:00 p.m. B) 3:00 p.m. C) 4:00 p.m. D) 5:00 p.m. E) 6:00 p.m.

Solución:

1) Si $5 + \sqrt{13}$ es una raíz de $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ entonces $5 - \sqrt{13}$ también es una raíz de $p(x)$

Luego considerando las raíces de $p(x)$: $5 + \sqrt{13}$, $5 - \sqrt{13}$ y t

De la relación entre coeficientes y raíces se tiene

$$i) 10 + t = -(3m - 2n - 22)$$

$$ii) 12 + 10t = 2m + 9n + 26$$

$$iii) 12t = 48 \rightarrow t = 4$$

$$\text{De (i) y (ii) se tiene } \begin{cases} 2m + 9n = 26 \\ 3m - 2n = 8 \end{cases} \rightarrow m = 4, n = 2$$

$$2) \text{ Su viaje durará } \frac{5m + 7n + 14}{6} = \frac{5(4) + 7(2) + 14}{6} = 8 \text{ horas}$$

3) Como partió a las 7:00 a.m. llegará a las 3:00 p.m.

Rpta.: B

6. SheKina nació el 28 de mayo de 2009. La raíz entera del polinomio $p(x)$ es igual al número de años que la edad de Stephannie excede a la edad de SheKina, además se sabe que $(11+7i)$ es una raíz de $p(x) = x^3 - 27x^2 + (a-3)x - (b+2) \in \mathbb{R}[x]$. Calcule la suma de las edades de SheKina y Stephannie el 29 de mayo del 2019.

A) 32 B) 31 C) 29 D) 25 E) 23

Solución:

- 1) El 29 de mayo de 2019 SheKina tiene 10 años
Las raíces de $p(x)$ son: $11+7i$, $11-7i$ y t
i) $22 + t = 27 \quad \rightarrow \quad t = 5$ años mayor es Stephannie
- 2) Stephannie es 5 años mayor que SheKina, Stephannie tiene 15 años
- 3) La suma de sus edades es 25 años.

Rpta.: D

7. El profesor de algebra dejó una tarea a sus alumnos Toño y Milton, que consiste en resolver cierta cantidad de ejercicios. Milton hizo $10k$ del total, donde k se puede obtener despejando:

$$\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) k = \frac{a^2}{2a^2+1} + \frac{b^2}{2b^2+1} + 2c^3$$

Además a , b y c son las raíces del polinomio $p(x) = 4x^3 + 2x - 1$. Si Toño culminó con los ejercicios restantes, ¿qué porcentaje de la tarea hizo Toño?

A) 20% B) 25% C) 75% D) 80% E) 30%

Solución:

- 1) Tenemos $\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) k = \frac{a^2}{2a^2+1} + \frac{b^2}{2b^2+1} + 2c^3$
- 2) El polinomio que tiene las inversas de las raíces de $p(x)$ es $q(x) = -x^3 + 2x^2 + 4$
Por la relación entre coeficientes y raíces se tiene:
i) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$
ii) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 0$
iii) $\left(\frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} \right) = 4$
- 3) Por propiedad $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^3 = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) - 3 \frac{1}{abc}$

4) Reemplazando se tiene. $2^3 = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + 3(2)(0) - 3(4)$, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = 20$

5) Como "a" es raíz de p(x) entonces $4a^3 + 2a - 1 = 0 \rightarrow 2a(2a^2 + 1) = 1$

$$2a = \frac{1}{(2a^2 + 1)} \rightarrow 2a^3 = \frac{a^2}{(2a^2 + 1)} \rightarrow 2b^3 = \frac{b^2}{(2b^2 + 1)}$$

6) Entonces $\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)k = \frac{a^2}{2a^2 + 1} + \frac{b^2}{2b^2 + 1} + 2c^3 = 2(a^3 + b^3 + c^3) = 2 \times 3abc$

$$20k = 2 \times 3 \times abc = 2 \times 3 \times \frac{1}{4}$$

$$k = \frac{3}{40}$$

7) Luego Toño hizo el 25%

Rpta.: B

8. La suma de la multiplicidades de los ceros positivos y la suma de las multiplicidades de los ceros negativos del polinomio $H(x) = x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 70x^2 - 16x + 96$ son el número de goles que anotan los equipos A y B respectivamente, en la final de un campeonato. ¿Qué equipo ganó y cuál fue el score?

A) B: 3 - 2

B) A: 3 - 2

C) B: 3 - 1

D) A: 3 - 1

E) A: 2 - 1

Solución:

1) Verificando las posibles raíces de p(x) y por el teorema del factor

$$H(x) = (x-1)(x+2)(x+3)(x-4)(x+4)$$

Las raíces de H(x) son -4, -3, -2, 1, 4

2) A anotó 2 goles y B anotó 3 goles

Ganó B 3 - 2

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si a y b son las raíces del polinomio $p(x) = x^2 - x + 2$, halle el valor de

$$L = \frac{a}{a^2 - 2a + 4} + \frac{b}{b^2 - 2b + 4}$$

A) $-\frac{1}{4}$

B) $-\frac{1}{2}$

C) 0

D) $\frac{1}{4}$

E) 1

Solución:

1) Como a es raíz del polinomio $p(x)$, se tiene $p(a) = a^2 - a + 2 = 0 \rightarrow 2 - a = -a^2$

De manera análoga $2 - b = -b^2$

$$2) L = \frac{a}{a^2 - 2a + 4} + \frac{b}{b^2 - 2b + 4} = \frac{a}{a^2 - 2a^2} + \frac{b}{b^2 - b^2} = \frac{1}{-a} + \frac{1}{-b} = -\frac{a+b}{ab}$$

Por la relación entre coeficientes y raíces

i) $a + b = 1$

ii) $ab = 2$

$$3) L = -\frac{a+b}{ab} = -\frac{1}{2}$$

Rpta.: B

2. El producto de todas las raíces de $p(x) = x^3 + bx^2 + 16x + d$ es 14, $b \in \mathbb{Z}$. Si z es una raíz compleja de $p(x)$ con $|z|^2 = 2$, halle el valor de $(b+d)$.

- A) -23 B) -15 C) -12 D) 12 E) 14

Solución:

1) Sean $z, \bar{z}, t$ las raíces del polinomio

De la relación entre coeficientes y raíces se tiene lo siguiente:

i) $2\operatorname{Re}(z) + t = -b$

ii) $2 + 2\operatorname{Re}(z)t = 16 \rightarrow \operatorname{Re}(z)t = 7$

iii) $2t = -d = 14 \rightarrow t = 7$

de (i), (ii) y (iii) se tiene $\operatorname{Re}(z) = 1$, $d = -14$, $b = -9$

2) $b + d = -23$

Rpta.: A

3. Dado el polinomio $p(x) = x^3 + 2x - 1$, cuyas raíces son a , b y c , calcule el valor de

$$4 \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \right) \left| a^2 + b^2 + c^2 \right|.$$

- A) 30 B) 40 C) 48 D) 50 E) 60

Solución:

1) Por la relación entre coeficientes y raíces

i) $a + b + c = 0$

- ii) $ab + ac + bc = 2$
 iii) $abc = 1$
 2) Como $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = -4$
 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3(1) = 3$
 3) Luego $4 \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \right) |a^2 + b^2 + c^2| = 4(3)|-4| = 48$

Rpta.: C

4. Una mañana Olga preparó x^3 empanadas de pollo para venderlos en los dos recreos que tiene un colegio. Se sabe que x es una raíz entera de $p(x)$, el producto de las raíces de $p(x)$ es 6 y que $p(x)$ representa la cantidad de empanadas que le quedaron luego de vender $(r+4)x$ y $(9-r)$ empanadas, en el primer y segundo recreo de tal mañana en ese orden. ¿Cuántas empanadas preparó por la mañana Olga?

- A) 27 B) 64 C) 8 D) 125 E) 216

Solución:

- 1) Se tiene $p(x) = x^3 - (r+4)x - (9-r)$; consideremos α, β y γ sus raíces. Por la relación entre coeficientes y raíces se tiene
 i) $\alpha + \beta + \gamma = 0$
 ii) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -(r+4)$
 iii) $\alpha\beta\gamma = 9-r = 6 \rightarrow r = 3$
 2) Reemplazando se obtiene $p(x) = x^3 - 7x - 6$, cuyas raíces son 3, -1, -2
 3) Olga preparó 27 empanadas de pollo

Rpta.: A

5. Si a, b y c son las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 8$, halle el valor de

$$J = \frac{a-1}{a^2+2a+4} + \frac{b-1}{b^2+2b+4} + \frac{c-1}{c^2+2c+4}.$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) 0

Solución:

- 1) Si a, b y c son raíces del polinomio $p(x)$, se cumple $p(a) = a^3 - 3a^2 + 3a - 8 = 0$

$$a^3 - 8 = 3a(a-1) \rightarrow (a-2)(a^2 + 2a + 4) = 3a(a-1)$$

$$\frac{a-2}{3a} = \frac{a-1}{a^2+2a+4} \rightarrow \frac{1}{3} - \frac{2}{3a} = \frac{a-1}{a^2+2a+4}$$

De manera análoga

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3b} = \frac{b-1}{b^2+2b+4} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} - \frac{2}{3c} = \frac{c-1}{c^2+2c+4}$$

$$2) \text{ Luego } J = \frac{a-1}{a^2+2a+4} + \frac{b-1}{b^2+2b+4} + \frac{c-1}{c^2+2c+4}$$

$$J = \frac{a-1}{a^2+2a+4} + \frac{b-1}{b^2+2b+4} + \frac{c-1}{c^2+2c+4} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3a} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3b} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3c}$$

$$J = 1 - \frac{2}{3a} - \frac{2}{3b} - \frac{2}{3c} = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{bc+ac+ab}{abc} \right)$$

3) Por la relación entre coeficientes y raíces

i) $a+b+c=3$

ii) $ab+ac+bc=3$

iii) $abc=8$

$$4) \quad J = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{bc+ac+ab}{abc} \right) = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{3}{8} \right) = \frac{3}{4}$$

Rpta.: D

6. Si $(2+\sqrt{2})$ es una raíz del polinomio $T(x) = x^3 - (3m+2n-9)x^2 + 14x + (2m-n-5)$ donde $\{m,n\} \subset \mathbb{Q}$, halle el resto de dividir $p(x) = x^7 - (5m+3n-5)x^4 + (9m+5n-5)x - 7$ entre $d(x) = x^2 - 3x + 1$.

- A) 0 B) $5x - 9$ C) $4x - 9$ D) $-5x + 9$ E) $4x + 9$

Solución:

1) Consideremos $2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$ y t las raíces de $T(x)$, de la relación entre sus raíces y coeficientes:

i) $4+t = 3m+2n-9 \rightarrow 3m+2n=16$

ii) $2+4t = 14 \rightarrow t=3$

iii) $2t = -2m+n+5 \rightarrow n-2m=1$

Luego se tiene $\begin{cases} 3m+2n=16 \\ -2m+n=1 \end{cases} \rightarrow m=2, n=5$

2) $p(x) = x^7 - (5m+3n-5)x^4 + (9m+5n-5)x - 7 = x^7 - 20x^4 + 38x - 7$

3) Dividiendo $\frac{x^7 - 20x^4 + 38x - 7}{x^2 - 3x + 1}$ por Horner

1	1	0	0	-20	0	0	38	-7
3		3	-1					
-1			9	-3				
				24	-8			
					3	-1		
						-15	5	
							-48	16
	1	3	8	1	-5	-16	-5	9

4) Resto = $-5x + 9$

Rpta.: D

7. Sean a , b y c las raíces de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ y $m = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{b^2c^2}$,

$n = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ y $r = -\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)$. Se reparte S/ 3000 entre Pascual, Lisandro y Héctor en forma directamente proporcional a los números m , n y r respectivamente. Cada uno de ellos decide comprar la mayor cantidad de pelotas posibles con el dinero recibido en dicho reparto. Si el precio de cada pelota es de S/ 35, ¿cuánto será el vuelto que recibirá Pascual, Lisandro y Héctor en ese orden?

A) S/ 10, S/ 20 y S/ 30

B) S/ 5, S/ 15 y S/ 20

C) S/ 5, S/ 80 y S/ 10

D) S/ 30, S/ 20 y S/ 10

E) S/ 25, S/ 15 y S/ 5

Solución:

1) De los datos, para las raíces a , b y c de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, se tiene

i) $a + b + c = 3$

ii) $ab + ac + bc = 0$

iii) $abc = -1$

2) $m = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{b^2c^2} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{a^2b^2c^2} = 9$

$n = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} = \frac{(ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c)}{a^2b^2c^2} = 6$

$$r = -\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = -\frac{b^3c^3 + a^3c^3 + a^3b^3}{a^3b^3c^3} = -\frac{3a^2b^2c^2}{a^3b^3c^3} = 3$$

3) $P + L + H = 3000$ y $\frac{P}{9} = \frac{L}{6} = \frac{H}{3} = k$, le corresponden:

Pascual: S/ 1500 compra 42 pelotas y paga por ellas S/ 1470

Lisandro: S/ 1000 compra 28 pelotas y paga por ellas S/ 980

Héctor: S/ 500 compra 14 pelotas y paga por ellas S/ 490

4) Reciben de vuelto en ese orden S/ 30, S/ 20 y S/ 10

Rpta.: D

8. El polinomio mónico $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ es de grado mínimo, se sabe que dos de sus raíces son $(4 + \sqrt{5})$ y $(2i)$. El término independiente de dicho polinomio representa, en miles de soles, el ahorro de años de trabajo de Ernesto. Si Ernesto usa solo sus ahorros para comprar dos autos cuyo precio unitario, en miles de soles, equivale numéricamente a la suma de coeficientes de $p(x)$, ¿cuánto dinero de su ahorro quedó después de dicha compra?

A) 2000 soles B) 2300 soles C) 2500 soles D) 3800 soles E) 4000 soles

Solución:

- Como el polinomio $p(x)$ debe tener coeficientes racionales tendría como mínimo las raíces $4 + \sqrt{5}, 4 - \sqrt{5}, 2i$ y $-2i$ luego:

$$p(x) = (x - (4 + \sqrt{5}))(x - (4 - \sqrt{5}))(x - 2i)(x + 2i)$$

$$p(x) = (x^2 - 8x + 11)(x^2 + 4)$$
- La suma de coeficientes $p(1) = (4)(5) = 20$
El término independiente $p(0) = (11)(4) = 44$
- Él tiene ahorrado 44000 soles, cada auto cuesta 2000 soles, luego de comprar 2 le quedan 4000 soles

Rpta.: E

Álgebra

EJERCICIOS

1. Juan heredó de su padre un terreno que tiene la forma de un trapecio isósceles de 20 metros de altura, Juan cercará dicho terreno con una malla de alambre que cuesta 15 soles el metro lineal. Si las longitudes en metros de los lados paralelos del terreno son las raíces del polinomio $p(x) = 2x^2 - 100x + 800$, ¿cuánto le costará a Juan cercar su terreno con dicha malla?

A) S/ 1450 B) S/ 1520 C) S/ 1650 D) S/ 1060 E) S/ 1500

Solución:

- 1) Hallando las raíces de $p(x) = 2x^2 - 100x + 800$

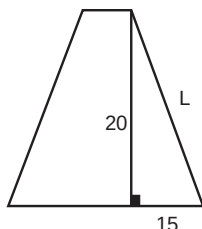
$$x = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4(2)(800)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{100 \pm 60}{4}$$

$$x = 40 \vee x = 10$$

La longitud de las bases es 10 m y 40 m

- 2) Calculando la longitud de los lados no paralelos:
Del gráfico:



$$L = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$$

- 3) El perímetro es $2(L) + \text{suma de las longitudes de las bases} = 2(25) + 50 = 100$
4) El costo por cercar su terreno con la malla es de 1500 soles

Rpta.: E

2. El número atómico del Helio y de otro elemento químico son raíces del polinomio $p(x) = x^2 - (a^2 - 1)x + 5a - 3$, $a \in \mathbb{Z}$, determine el otro elemento químico.

A) C B) Li C) H D) Ne E) O

Solución:

- 1) El número atómico del Helio es 2, luego 2 es raíz de
- $p(x)$

$$p(2) = 4 - 2a^2 + 2 + 5a - 3 = 0$$

$$2a^2 - 5a - 3 = (2a + 1)(a - 3) = 0$$

$$a = -1/2 \quad \vee \quad a = 3$$

- 2) Luego
- $p(x) = x^2 - 8x + 12$

$$p(x) = (x - 2)(x - 6)$$

Raíces: 2 y 6

- 3)
- $\therefore$
- Número atómico 6 : Carbono

Rpta.: A

3. Si "a+b" en miles de soles representa la herencia de don Jacinto a sus m hijos; donde m es una de las raíces de $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 78 \in \mathbb{R}[x]$, y $2 - 3i$ es otra raíz de dicho polinomio. ¿Cuánto recibe de herencia cada uno de los hijos de don Jacinto?

- A) S/ 4000 B) S/ 4200 C) S/ 4500 D) S/ 4800 E) S/ 5000

Solución:

- 1) De los datos,
- $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 78 \in \mathbb{R}[x]$
- , luego como
- $2 - 3i$
- es una raíz de
- $p(x)$
- ,
- $2 + 3i$
- es también raíz. Consideremos m, la tercera raíz de
- $p(x)$
- .

Por la relación entre raíces y coeficientes se tiene:

i) $4 + m = -a \rightarrow a = -10$

ii) $13 + 4m = b \rightarrow b = 37$

iii) $13m = 78 \rightarrow m = 6$

- 2) Don Jacinto tiene 6 hijos y la herencia es de 27000 soles, cada uno recibe 4500 soles

Rpta.: C

4. La habitación de Raúl tiene forma de un Ortoedro, tiene una puerta de entrada (de 2 m^2 de área) y no tiene ventanas. El volumen de la habitación es de 24 metros cúbicos. Además las longitudes de 3 aristas que representan diferentes dimensiones son las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - wx^2 + nx - m$; $\{n, m\} \subset \mathbb{R}$. Si el área total de la habitación (sin incluir la puerta) es de 50 metros cuadrados y el área de la superficie del piso de la habitación es 12 metros cuadrados. Se puede afirmar:

I) El valor de $m = -24$ II) El valor de $n = 26$

III) Las longitudes de las aristas son de 4 metros, 3 metros y 2 metros

- A) I B) II y III C) III D) I y II E) I y III

Solución:

- 1) Considerando las dimensiones del ortoedro a , b y c que también son raíces de $p(x)$ tenemos:

i) $a + b + c = w$

ii) $ab + ac + bc = n$

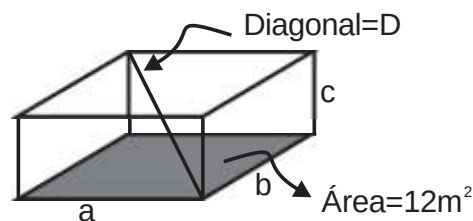
iii) $abc = m$

Como el volumen es $24m^3$

$abc = 24$ y $abc = m$ luego $m = 24$

además el área de la base es $12m^2$

$ab = 12$ luego $c = 2m$



- 2) Por otro lado, el área de la habitación sin la puerta es $50m^2$ y el área de la puerta es $2m^2$

$2(ab+ac+bc) = 50 + 2$

$ab+ac+bc = 26 \rightarrow n = 26$

$ab+(a+b)^2 = 26 \rightarrow a+b = 7$ y $ab = 12$, luego los lados que faltan son $3m$ y $4m$

Finalmente $a + b + c = 3 + 4 + 2 = 9 = w$

- 3) Son verdaderas II y III

Rpta.: B

5. En una reunión familiar, los hermanos Huillca, coordinaron celebrar el aniversario de bodas de plata de sus padres. Decidieron recopilar fotos durante los M años que faltan para el aniversario, para hacer un video de los años que estuvieron casados. Determine cuantos años de casados tienen los señores Huillca cuando se realiza dicha reunión, sabiendo que m , n y q son raíces de $p(x) = x^3 + 4$ y

$$M = -3 \left(\frac{1}{m^2 - m + 1} + \frac{1}{n^2 - n + 1} \right) + q.$$

- A) 20 B) 22 C) 23 D) 26 E) 27

Solución:

- 1) De la relación entre coeficientes y raíces tenemos:

i) $m + n + q = 0$

- 2) Por otro lado como m es raíz de $p(x)$, $p(m) = 0$

$m^3 + 4 = 0 \rightarrow m^3 + 1 = -3$

Luego, $(m+1)(m^2 - m + 1) = -3$

$$m+1 = \frac{-3}{m^2 - m + 1}$$

$$\text{Análogamente se tiene } n+1 = \frac{-3}{n^2 - n + 1},$$

$$3) \text{ Así tenemos que } M = -3 \left(\frac{1}{m^2 - m + 1} + \frac{1}{n^2 - n + 1} \right) + q$$

$$M = \frac{-3}{m^2 - m + 1} + \frac{-3}{n^2 - n + 1} + q = m+1 + n+1 + q$$

$$M = m + n + q + 2 = 2$$

$$M = 2$$

4) Luego, los señores Huillca tienen 23 años de casados.

Rpta.: C

6. Al examen de admisión 2019-I de la UNMSM se presentaron $(483m + 387n + 673)$ postulantes a la escuela de Medicina Humana e ingresaron $(52m + 37n - 35)$ postulantes donde m y n son números racionales y $-3 + \sqrt{2}$ es raíz del polinomio $p(x) = x^3 + (5m - 3n - 3)x^2 + (7m + 5n - 70)x - 56$. ¿Cuántos postulantes a Medicina Humana no ingresaron a San Marcos?

- A) 2260 B) 2240 C) 2410 D) 2620 E) 2590

Solución:

- 1) Como $-3 + \sqrt{2}$ es raíz de $p(x)$, $-3 - \sqrt{2}$ también es una raíz de $p(x)$. Consideremos t la tercera raíz. Por la relación que existe entre las raíces y los coeficientes de $p(x)$
 - i) $-6 + t = -(5m - 3n - 3) \rightarrow 5m - 3n = 1$
 - ii) $7 - 6t = 7m + 5n - 70 \rightarrow 7m + 5n = 29$
 - iii) $7t = 56 \rightarrow t = 8$
de (i) y (ii) se tiene $m = 2$ y $n = 3$
- 2) Postularon a Medicina Humana $483(2) + 387(3) + 673 = 2800$,
- 3) Ingresaron a Medicina Humana $52(2) + 37(3) - 35 = 180$, 2620 postulantes no ingresaron a Medicina Humana en San Marcos.

Rpta.: D

7. Leopoldo observa las ofertas de un Centro Comercial en día de Black Friday, y se interesa en comprar unos audífonos cuyo precio es el cuadrado el término independiente del siguiente polinomio $p(x) = x^2 + 4x + \beta$. Donde se cumple que, si $a^{-a} = \frac{1}{3}$ entonces $\beta = a^{\left(\frac{a^{a+1}}{a^a-1}\right)}$. ¿Cuánto le faltaría a Leopoldo para comprar los audífonos, si tiene 18 soles?
- A) 5 soles B) 6 soles C) 7 soles D) 8 soles E) 9 soles

Solución:

- 1) Como $a^{-a} = \frac{1}{3}$ se obtiene $a^a = 3$. Entonces:
- 2) $\beta = a^{\left(\frac{a^{a+1}}{a^a-1}\right)} = a^{\left(\frac{a^{a+1}}{a^a-1}\right)} = a^{\left(\frac{a^a \cdot a}{a^a-1}\right)} = a^{\left(\frac{3a}{3-1}\right)} = a^{\left(\frac{3a}{2}\right)} = \left(a^a\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$.
- 3) Luego el precio del audífono es $p(0) = \beta \Rightarrow \beta^2 = 27$
- 4) Por lo tanto, le faltarían 9 soles

Rpta.: E

8. Angelo quiere cercar un terreno rectangular cuyas dimensiones (en metros) son los valores absolutos de la suma y producto de las inversas de las raíces de $p(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, determine cuanto pagará por el cercado de dicho terreno si cada metro de cerca cuesta S/ 8.
- A) S/ 50 B) S/ 126 C) S/ 163 D) S/ 81 E) S/ 112

Solución:

$$1) p(x) = x^4 q\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$q\left(\frac{1}{x}\right) = 4 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^4}$$

a, b, c y d raíces de p(x) entonces $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ y $\frac{1}{d}$ raíces de $q\left(\frac{1}{x}\right)$

entonces las dimensiones del terreno son

$$M = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right| = 3$$

$$N = \left| \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d} \right| = 4$$

- 2) El perímetro del terreno es 14m a 8 soles el metro da un costo de 112 soles

Rpta.: E

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si r y s son las raíces complejas y conjugadas del polinomio $p(x) = x^2 - kx + 3 - k$, cuando k toma el mayor valor entero, halle el valor de $H = p(0) + 4\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right) + 1$.
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

Solución:

- 1) Como el polinomio debe tener raíces complejas y conjugadas

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow k^2 + 4k - 12 < 0 \Leftrightarrow -6 < k < 2, k_{\max} = 1$$

2) $p(x) = x^2 - x + 2$

Por la relación entre coeficientes y raíces

i) $r + s = 1$

ii) $rs = 2$

$$H = p(0) + 4\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right) + 1$$

$$H = 2 + 4\left(\frac{s^2 + r^2}{r^2 s^2}\right) + 1$$

$$H = 3 + 4\left(\frac{1^2 - 2(2)}{2^2}\right) = 0$$

3) $H = 0$

Rpta.: A

2. Roberto quiere comprar una laptop que vió hace unos días en un conocido local comercial. El vendedor, que es su amigo, le dice que esa laptop le costaría $\overline{aa00}$ soles, pero si acierta el valor de a , entonces pagaría solamente la mitad; a es tal que el polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + a$ tiene dos raíces cuya suma es cero. Si Roberto acertó el valor de a , ¿cuánto pagó por la laptop?
- A) S/ 2200 B) S/ 1100 C) S/ 3300 D) S/ 1650 E) S/ 550

Solución:

- 1) Sean x_1 , x_2 y x_3 las raíces del polinomio $p(x)$. Como la suma de dos raíces es cero, sea $x_1 + x_2 = 0$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1$$

Como 1 es una raíz de $p(x)$, $p(1) = 0$, luego $a = 2$

- 2) El precio de la laptop era 2200 soles. Roberto pagó la mitad es decir 1100 soles

Rpta.: B

3. El número reproductivo básico (R_0) permite determinar cuándo una enfermedad infecciosa puede dar lugar a un brote epidémico. Si $R_0 > 1$ (la infección puede llegar a propagarse ampliamente) si $R_0 < 1$ (la infección desaparece tras un largo periodo); estudiando un modelo matemático de la Rubeola se obtuvo un

$R_0 = \frac{12 + 6(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)}{1 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}$; donde α, β y γ son raíces de $T(x) = 2x^3 - x + 1$. Halle R_0 y su repercusión.

- A) $R_0 = 6$, la infección tiende a propagarse
 B) $R_0 = 12$, la infección tiende a desaparecer
 C) $R_0 = 6$, la infección tiende a desaparecer
 D) $R_0 = 12$, la infección tiende a propagarse
 E) $R_0 = 15$, la infección tiende a propagarse

Solución:

- 1) $T(x) = 2x^3 + 0x^2 - x + 1$; Por la relación entre coeficientes y raíces

i) $\alpha + \beta + \gamma = 0$

ii) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\frac{1}{2}$

iii) $\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{2}$

- 2) Reemplazando se obtiene $R_0 = \frac{12 + 6(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)}{1 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma} = \frac{12 + 6(3\alpha\beta\gamma)}{1 - \frac{1}{2}}$

$$R_0 = \frac{12 + 6\left(3\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{\frac{1}{2}} = 6$$

- 3) $R_0 = 6$, la infección tiende a propagarse

Rpta.: A

4. Según la Organización Mundial de la Salud (OMS), casi $(10R+830)$ mil personas se suicidan al año en el mundo. Una alarmante cifra que refleja un problema de salud pública, a veces desatendido, por falta de políticas que luchen contra sus principales causas: el acoso escolar (bullying) y la depresión. Halle cada que tiempo aproximadamente (en promedio) se suicida una persona al año en el mundo, tomar en cuenta que 1 año tiene aproximadamente 32 000 000 de segundos. Considere $R = a^4(a+1) + b^4(b+1) + c^4(c+1)$, donde a , b y c son las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - x + 1$

A) 20 seg B) 45 seg C) 40 seg D) 50 seg E) 25 seg

Solución:

- 1) Para encontrar las raíces a , b y c de $p(x)$ se tiene $p(x) = 0$

$\rightarrow x^3 = x - 1$, luego como a es raíz del polinomio

$$a^3 = a - 1 \Rightarrow \begin{cases} a^5 = a^3 - a^2 \dots(\alpha) \\ a^4 = a^2 - a \dots(\beta) \end{cases}$$

- 2) sumando $(\alpha) + (\beta)$: $a^4(a+1) = a^3 - a$, análogamente

$$b^4(b+1) = b^3 - b, \quad c^4(c+1) = c^3 - c$$

$$\text{Luego } R = a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c), \text{ donde } \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = -3$$

- 3) Luego el tiempo en el que se suicida una persona

$$= \frac{\text{tiempo total (en segundos)}}{\text{número de personas}} = \frac{32\,000\,000}{(10(-3) + 830) \cdot 1000} = 40 \text{ segundos.}$$

- 4) Cada 40 segundos aproximadamente se suicida una persona

Rpta.: C

5. En un triángulo pitagórico el mayor de los lados es el valor absoluto de m (en metros), halle el área de dicho triángulo, tal que: $2i$ es una raíz de $p(x) = x^3 + mx^2 - 10mx + 20$; donde m toma un valor real.

A) $3m^2$ B) $4m^2$ C) $6m^2$ D) $7m^2$ E) $5m^2$

Solución:

- 1) Si $2i$ es una raíz del $p(x)$ entonces su conjugado también es una raíz de $p(x)$

Es decir las raíces de $p(x)$ son: $2i, -2i, r$

De la relación entre coeficientes y raíces

i) $r = -m$

ii) $4r = -20 \rightarrow r = -5, m = 5$

- 2) Como un triángulo pitagórico tiene lados enteros, los lados del triángulo son 3, 4 y 5 metros luego el área es de 6m^2

Rpta.: C

6. Si una raíz del polinomio $p(x) = x^3 + mx^2 - 288$, $m \in \mathbb{R}$ es el doble de otra de sus raíces, halle la diferencia positiva entre la mayor de sus raíces y el cuádruplo del opuesto de la menor raíz de $p(x)$.

A) 44 B) 45 C) 48 D) 50 E) 52

Solución:

- 1) Consideremos r , $s = 2r$ y t las raíces de $p(x)$, de la relación entre sus raíces y coeficientes:

i) $r + s + t = -m \rightarrow 3r + t = -m$

ii) $rs + rt + st = 0 \rightarrow 2r^2 + 3rt = 0 \rightarrow t = -\frac{2r}{3}$

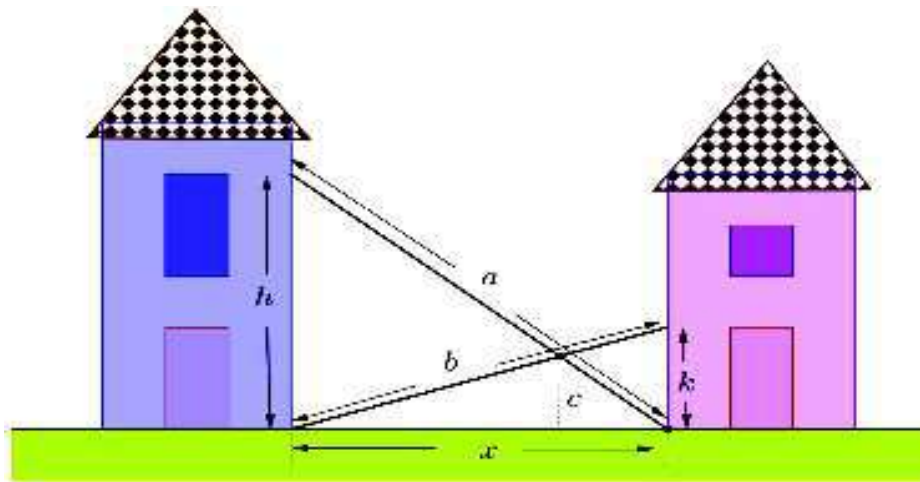
iii) $rst = 288 \rightarrow 2r^2t = 288 \rightarrow -\frac{4r^3}{3} = 288 \rightarrow r = -6$

- 2) En (ii) $t = 4$ y en (i) $m = 14$

- 3) La diferencia positiva entre la mayor de sus raíces y el cuádruplo del opuesto de la menor raíz de $p(x)$ es $|4 - 4(12)| = 44$

Rpta.: A

7. En el pasillo entre dos casas se tiene que, las líneas visuales del piso de una de las casas hacia cierto punto de la otra se cruzan y determinan un plano perpendicular plano con el piso (Ver figura). Si las líneas visuales tienen longitudes $a = 3\text{m}$, $b = 2\text{m}$ y el punto de cruce está a una altura de $c = 1\text{m}$ y la distancia " x " entre las casas es una raíz del polinomio $p(x) = ux^8 + nx^6 + mx^4 + sx^2 + M$, halle el valor de $Y = u + n + m + s + M$.



A) 71 B) 72 C) 73 D) 74 E) 76

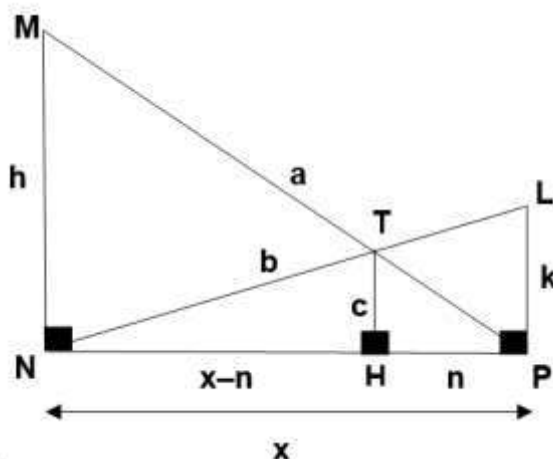
Solución:

- 1) Aplicando semejanza en los triángulos

 $\triangle THP \sim \triangle MNP$ y $\triangle NHT \sim \triangle NPL$,

Se tiene las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{c}{n} &= \frac{h}{x} \wedge \frac{c}{x-n} = \frac{k}{x} \\ \rightarrow \frac{x}{n} &= \frac{h}{c} \wedge \frac{x}{x-n} = \frac{k}{c} \\ \rightarrow \frac{h}{h-c} &= \frac{k}{c} \rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{k} + \frac{1}{h} \quad \dots(1) \end{aligned}$$



- 2) Por el teorema de Pitágoras en los triángulos

 $\triangle MNP$ y $\triangle NPL$, se tiene

$$k = \sqrt{b^2 - x^2} \quad \text{y} \quad h = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \dots(2)$$

- 3) Reemplazando (2) en (1) y usando
- $a = 3\text{m}$
- ,
- $b = 2\text{m}$
- y
- $c = 1\text{m}$
- , se tiene

$$\sqrt{9 - x^2} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{4 - x^2} \quad \dots(3)$$

Elevando al cuadrado en (3):

$$36 - 13x^2 + x^4 = 9 - x^2 + 4 - x^2 + 2\sqrt{9 - x^2} \sqrt{4 - x^2}$$

$$\rightarrow 2\sqrt{9 - x^2} \sqrt{4 - x^2} = x^4 - 11x^2 + 23 \quad \dots(4)$$

Elevando al cuadrado en (4) y simplificando, resulta

$$p(x) = x^8 - 22x^6 + 163x^4 - 454x^2 + 385$$

$$\rightarrow u = 1, n = -22, m = 163, s = -454 \text{ y } M = 385$$

$$\therefore Y = u + n + m + s + M = 73.$$

Rpta.: C

8. Determine la suma de coeficientes del polinomio mónico de menor grado posible con coeficientes racionales, si dos de sus raíces son $3 + 4i$ y $5 - \sqrt{2}$.

A) 200 B) 210 C) 220 D) 280 E) 290

Solución:

- 1) Como el polinomio $p(x)$ debe tener coeficientes racionales tendría como mínimo las raíces $3 + 4i$, $3 - 4i$, $5 - \sqrt{2}$ y $5 + \sqrt{2}$, luego:

$$p(x) = (x - (3 + 4i))(x - (3 - 4i))(x - (5 - \sqrt{2}))(x - (5 + \sqrt{2}))$$

$$p(x) = (x^2 - 6x + 25)(x^2 - 10x + 23)$$

- 2) La suma de coeficientes $p(1) = (20)(14) = 280$

Rpta.: D

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

10

semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

POLINOMIO SOBRE UN CONJUNTO

Los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) forman un conjunto denotado por $\mathbb{K}[x]$; es decir $\mathbb{K}[x] = \{ p(x) \mid p(x) \text{ es un polinomio con coeficientes en } \mathbb{K} \}$.

Por ejemplo, el polinomio $p(x) = 5x^2 - 3x - 10 \in \mathbb{Z}[x]$; pues los coeficientes 5, -3 y -10 pertenecen a $\mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN

Sean $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, $g(x) \neq 0$. Decimos que $g(x)$ es un divisor de $f(x)$ en $\mathbb{K}[x]$ (o $g(x)$ divide a $f(x)$ en $\mathbb{K}[x]$), si existe $h(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que

$$f(x) = h(x) \cdot g(x)$$

DEFINICIÓN

Sean $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $\deg(f(x)) \geq 1$. Decimos que $f(x)$ es un polinomio irreducible o primo sobre $\mathbb{K}[x]$, si dado $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ implica que $h(x)$ o $g(x)$ es un polinomio constante.

Observación: Si $f(x)$ no es irreducible sobre $\mathbb{K}[x]$, decimos que es reducible o factorizable sobre $\mathbb{K}[x]$.

Como consecuencia se puede deducir que todo polinomio de grado 1 es irreducible.

Ejemplos

1) $p(x) = x^2 - 5x - 14$ es reducible en $\mathbb{Z}[x]$, pues $p(x) = (x - 7)(x + 2)$; además los coeficientes $\{1, -7, 2\} \subset \mathbb{Z}$

2) $p(x) = x^2 - 6$ es reducible en $\mathbb{R}[x]$, pues $p(x) = (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$; además los coeficientes $\{1, \sqrt{6}, -\sqrt{6}\} \subset \mathbb{R}$

3) $p(x) = x^2 - 13$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$; sin embargo $p(x)$ es reducible en $\mathbb{R}[x]$; pues $p(x) = (x + \sqrt{13})(x - \sqrt{13})$; donde los coeficientes $\{1, \sqrt{13}, -\sqrt{13}\} \subset \mathbb{R}$

4) $q(x) = x^2 + 15$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$, pero es reducible en $\mathbb{C}[x]$, porque $q(x) = (x - \sqrt{15}i)(x + \sqrt{15}i)$, donde los coeficientes $1, \sqrt{15}i$ y $-\sqrt{15}i$ pertenecen a $\mathbb{C}$.

FACTOR PRIMO DE UN POLINOMIO $\mathbb{K}[x]$

Decimos que $g(x)$ es un factor primo de un polinomio $p(x)$, si $g(x)$ es un divisor irreducible de $p(x)$ en $\mathbb{K}[x]$.

Ejemplo: Para el polinomio $q(x) = 8x^6(x - 11)^2(x + 15)^3$:

1) Los factores primos en $\mathbb{Z}[x]$ de $q(x)$ son: x , $(x - 11)$ y $(x + 15)$.

2) El factor $(x - 11)^2$ en $\mathbb{Z}[x]$, no es primo porque $(x - 11)^2 = (x - 11)(x - 11)$.
 $\mathbb{K}[x]$

DEFINICIÓN DE FACTORIZACIÓN

La factorización es el proceso algebraico, mediante el cual un polinomio se puede expresar como la multiplicación indicada de sus factores, sobre un conjunto $\mathbb{K}$.

TEOREMA DE LA FACTORIZACIÓN ÚNICA

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ entonces todo polinomio $f(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ puede ser escrito en la forma

$$f(x) = a \cdot p_1(x) \cdot \dots \cdot p_m(x)$$

donde $a \in \mathbb{K} - \{0\}$ y $p_1(x)$ y $p_2(x), \dots, p_m(x)$ son todos polinomios irreducibles sobre $\mathbb{K}$ (no necesariamente distintos). Más aún, tal expresión es única salvo la constante

“a”

y el orden de los polinomios $p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)$.

$\mathbb{Z}$ **Ejemplo**

El polinomio $p(x) = x^2 - 4x - 12$ en $\mathbb{Z}[x]$, admite la siguiente factorización única $p(x) = (x - 6)(x + 2)$. Excepto:

- En otro orden: $p(x) = (x + 2)(x - 6)$.
- Factores afectados por constantes no nulas: $p(x) = (6 - x)(-x - 2)$.

NÚMERO DE FACTORES Y FACTORES PRIMOS DE UN POLINOMIO

Supongamos que,

$$p(x) = p_1^a(x) \cdot p_2^b(x) \cdot p_3^c(x) \dots p_n^m(x); \quad a, b, \dots, m \in \mathbb{N}^+$$

donde $p_1(x), p_2(x), p_3(x), \dots, p_n(x)$ son factores primos, y primos entre si dos a dos, en un conjunto. Entonces

a) El número de factores primos de $p(x)$ es n .

b) El número de factores (o divisores) de $p(x)$ está dado por:

$$\text{Nº de factores} = [(a+1)(b+1)(c+1)\dots(m+1)] - 1$$

Ejemplo

Sea el polinomio $p(x) = (x-8)^5(x+7)^4(x+9)$, tenemos que:

- El número de factores primos de $p(x)$ en $\mathbb{Z}[x]$ es 3. (No se cuenta el número de veces que se repite el factor)
- Número de factores de $p(x)$ es: $(5+1)(4+1)(1+1) - 1 = 59$

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

1. **Factor Común por agrupación de términos:** Consiste en observar si el polinomio tiene uno o más factores comunes, que pueden ser monomios o polinomios.

Ejemplo

Factorizar $p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 2x - 12$ en $\mathbb{C}[x]$.

Solución:

$$p(x) = \underbrace{2x^3 - 12x^2}_{2x^2(x-6)} + \underbrace{2x - 12}_{2(x-6)}$$

$$p(x) = 2x^2(x-6) + 2(x-6) = 2(x-6)(x^2+1)$$

$$= 2(x-6)(x^2+1) = 2(x-6)(x^2-1)$$

$$= 2(x-6)(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$$

$$\therefore p(x) = 2(x-6)(x+i)(x-i).$$

2. **Por adición o sustracción (QUITA y PON):** Consiste en convertir binomios o trinomios a trinomios cuadrados perfecto (T.C.P). El procedimiento a seguir lo presentamos en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

- i) Factorizar $p(x) = 64x^4 + 16$ en $\mathbb{R}[x]$.

Solución:

$$\begin{array}{ccc}
 p(x) = & 64x^4 & + 16 \\
 & \downarrow \sqrt{} & \downarrow \sqrt{} \\
 & 8x^2 & 4 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & \text{Falta: } 2(8x^2)(4) = 64x^2 &
 \end{array}$$

Luego de extraer la raíz cuadrada a ambos términos, pasamos a considerar siempre el doble del producto de dichos resultados, obteniendo el término que deberemos sumar y restar.

Entonces sumamos $64x^2$ (PON) y restamos $64x^2$ (QUITA) para completar un trinomio cuadrado perfecto y además obtener una diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned}
 p(x) &= 64x^4 + 16 = 64x^4 + 16 + 64x^2 - 64x^2 = (64x^4 + 64x^2 + 16) - (8x)^2 \\
 &= \left((8x^2)^2 + 2(8x^2)(4) + 4^2 \right) - (8x)^2 \\
 &= (8x^2 + 4)^2 - (8x)^2 \\
 &= (8x^2 + 4 - 8x)(8x^2 + 4 + 8x) = (8x^2 - 8x + 4)(8x^2 + 8x + 4) \\
 &= 16 \underbrace{(2x^2 - 2x + 1)}_{\text{irreducible en } \mathbb{R}[x]} \underbrace{(2x^2 + 2x + 1)}_{\text{irreducible en } \mathbb{R}[x]}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $p(x) = 16(2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$ en $\mathbb{R}[x]$

ii) Factorizar $p(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4$ en $\mathbb{R}[x,y]$.

Solución:

$$\begin{array}{c}
 p(x,y) = x^4 + 9y^4 + 2x^2y^2 \\
 \begin{array}{cc}
 \sqrt{} \downarrow & \sqrt{} \downarrow \\
 x^2 & 3y^2 \\
 \swarrow & \searrow \\
 2(x^2) \cdot (3y^2) = 6x^2y^2
 \end{array}
 \end{array}$$

Observemos que $p(x,y)$ no es un trinomio cuadrado perfecto (T.C.P.), para que en $p(x,y)$ se obtenga un T.C.P., análogamente al ejemplo anterior, el segundo término debe ser $6x^2y^2$, lo cual se consigue sumando $4x^2y^2$ (PON) y para que no se altere la igualdad, se resta $4x^2y^2$ (QUITA), así tenemos

$$\begin{aligned}
 p(x,y) &= x^4 + 9y^4 + 2x^2y^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = (x^4 + 9y^4 + 6x^2y^2) - 4x^2y^2 \\
 &= (x^2 + 3y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 3y^2)^2 - (2xy)^2 \\
 &= (x^2 + 3y^2 + 2xy)(x^2 + 3y^2 - 2xy)
 \end{aligned}$$

Entonces

$$p(x,y) = (x^2 + 2xy + 3y^2)(x^2 - 2xy + 3y^2)$$

3. Aspa simple: Se emplea para factorizar trinomios de la forma:

$$p(x) = Ax^{2n} + Bx^n + C \quad \text{ó} \quad p(x,y) = Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m}; \quad m, n \in \mathbb{N}^+.$$

Para factorizarlo descomponemos el primer y tercer término.

Ejemplo

Factorizar $p(x,y) = 3x^2 + 7xy - 6y^2$ en $[x, y]$ y halle la suma de sus factores primos.

Solución:

$$\begin{array}{ccc}
 p(x,y) = 3x^2 + 7xy - 6y^2 & & \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 3x & -2y \\
 x & 3y
 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}
 \end{array}
 & \longrightarrow & \begin{array}{l}
 3x(3y) = 9xy \\
 x(-2y) = -2xy + \\
 \hline
 7xy
 \end{array}
 \end{array}$$

Entonces $p(x,y) = (3x - 2y)(x + 3y)$, así la suma de los factores primos en $[x, y]$ es $(3x - 2y) + (x + 3y) = 4x + y$.

4. **Cambio de variable:** Consiste en ubicar expresiones algebraicas iguales en el polinomio a factorizar, para luego hacer un cambio de variable, que nos permita transformar una expresión algebraica complicada en otra más sencilla.

Ejemplo

Halle la suma de los factores primos lineales que se obtiene al factorizar

$$p(x) = (x^2 + x - 3)^2 + 2x^2 + 2x - 21 \text{ en } \mathbb{Z}[x].$$

Solución:

$$p(x) = (x^2 + x - 3)^2 + 2(x^2 + x - 3) - 15$$

Observamos que $(x^2 + x - 3)$ es una expresión común, entonces hacemos el cambio de variable $y = (x^2 + x - 3)$, por lo tanto obtenemos:

$$q(y) = y^2 + 2y - 15$$

Aplicamos aspa simple, entonces $q(y) = (y + 5)(y - 3)$

Finalmente recuperamos la variable x ,

$$p(x) = (x^2 + x - 3 + 5)(x^2 + x - 3 - 3) = (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 6)$$

Entonces $p(x) = (x^2 + x + 2)(x + 3)(x - 2)$ en $\mathbb{Z}[x]$

Luego $p(x)$ tiene dos factores primos lineales en $\mathbb{Z}[x]$: $(x + 3)$ y $(x - 2)$

Por lo tanto, la suma de los factores primos lineales es: $(x + 3) + (x - 2) = 2x + 1$.

5. **Divisores binómicos:** se utiliza para factorizar polinomios de una sola variable, de cualquier grado y es útil para encontrar divisores lineales (es decir de primer grado).

TEOREMA

Sea el polinomio en $\mathbb{Z}[x]$

$$p(x) = \underset{\text{C.P.}}{a_n} x^n + \underset{\text{T.I.}}{a_{n-1}} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n > 0.$$

Entonces las posibles raíces racionales de $p(x)$ son de la forma $\pm \frac{b}{c}$, con b y c primos entre sí, donde, b es un divisor del término independiente a_0 y c es un divisor del coeficiente principal a_n .

En particular, si $p(x)$ es mónico (es decir $a_n = 1$), entonces las posibles raíces de $p(x)$ son de la forma $\pm b$ (raíces enteras), donde b es un divisor del término independiente.

Ejemplo

Dado el polinomio $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 12$, halle el número de factores de $p(x)$ en $\mathbb{Z}[x]$

Solución:

Observamos que $p(x)$ es un polinomio mónico, las posibles raíces enteras son los divisores del término independiente -12 , es decir $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$. Utilizando el método de división por Ruffini, probamos que $x=4$ es raíz de $p(x)$ y por tanto

$(x - 4)$ es un factor primo de $p(x)$ en $\mathbb{Z}[x]$

En efecto:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -5 & 7 & -12 \\
 4 & \downarrow & & & \\
 \hline
 & 1 & -1 & 3 & 0
 \end{array}$$

$x^2 - x + 3 \dots$ factor primo en $\mathbb{Z}[x]$

Entonces

$$p(x) = (x - 4)(x^2 - x + 3)$$

Por lo tanto, el número de factores es $(1+1)(1+1) - 1 = 3$.

6. **Aspa doble:** se utiliza en la factorización de polinomios de la forma:

$$p(x, y) = Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F; \quad m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

En particular si $m = n = 1$, tenemos

$$p(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Para factorizarlo ordenamos el polinomio en la forma general, si faltara algún término se completa con términos de coeficiente cero y luego se aplican tres aspas simples.

Ejemplo

Factorizar $p(x,y) = 14x^2 - 15y^2 + 11xy - 13y + 12x - 2$, en $\mathbb{Z}[x,y]$.

Solución:

Ordenamos el polinomio

$$\begin{array}{cccccc}
 \text{1er} & \text{2do} & \text{3er} & \text{4to} & \text{5to} & \text{6to} \\
 p(x,y) = & 14x^2 & + 11xy & - 15y^2 & + 12x & - 13y - 2
 \end{array}$$

(I) (II)

Observamos las siguientes aspas simples:

- Primera aspa simple (I), se obtiene de los términos: 1^{er} , 2^{do} y 3^{er} .
- Segunda aspa simple (II), se obtiene de los términos: 3^{er} , 5^{to} y 6^{to} .
- Tercera aspa simple, se obtiene del 1^{er} , 4^{to} y 6^{to} término, esta aspa nos permite verificar todo el proceso.

$$\text{Por lo tanto } p(x,y) = (7x - 5y - 1)(2x + 3y + 2)$$

7. **Aspa doble especial:** se utiliza para factorizar polinomios de la forma:

$$p(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E; \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

En particular, si $n = 1$ tenemos:

$$p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E.$$

Para factorizarlo ordenamos el polinomio en forma decreciente completando los términos faltantes con términos de coeficiente cero. Descomponemos los términos extremos, tratando de que el aspa simple entre ellos se aproxime al término central.

Ejemplo

Factorizar $p(x) = 6x^4 + x^3 + 10x^2 - 7x - 10$ en $\mathbb{Z}[x]$.

Solución:

$$p(x) = 6x^4 + x^3 + 10x^2 - 7x - 10$$

$$\begin{array}{ccc}
 2x^2 & & 5 \\
 3x^2 & \swarrow \searrow & -2 \\
 & & -4x^2 + \\
 & & 15x^2
 \end{array}$$

$$11x^2$$

Observe que a $11x^2$ le falta $-x^2$ para ser $+10x^2$, luego

$$p(x) = 6x^4 + x^3 + 10x^2 - 7x - 10$$

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & \nearrow & x \\ 3x^2 & \searrow & -x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \nearrow & 5 \\ & \searrow & -2 \end{array}$$

Luego obtenemos:

$$p(x) = \underbrace{(2x^2 + x + 5)}_{fp} (3x^2 - x - 2) = \underbrace{(2x^2 + x + 5)}_{fp} \underbrace{(3x + 2)}_{fp} \underbrace{(x - 1)}_{fp} \text{ en } \mathbb{Z}[x].$$

OBSERVACIÓN

Podemos usar el método de adición y sustracción (Quita y Pon) y el método de factorización del aspa simple para factorizar algunos polinomios de grado impar, el objetivo es buscar la presencia de diferencia de cuadrados, suma o diferencia de cubos, etc.

Ejemplos

i) Factorizar $p(x) = x^6 - 4x^3 - 4x^2 + 4$ en $\mathbb{Z}[x]$.

Solución:

$$\begin{array}{ccc} p(x) = x^6 - 4x^3 - 4(x^2 - 1), & & \\ x^3 & \nearrow & -2(x+1) \\ x^3 & \searrow & +2(x-1) \end{array}$$

$$\text{Entonces } p(x) = (x^3 - 2x - 2)(x^3 + 2x - 2).$$

ii) Factorizar : $p(x) = x^7 + 2x^4 + 1$ en $\mathbb{Z}[x]$.

Solución:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^7 + 2x^4 + 1 = (x^7 - x^5 + x^4) + (x^5 + x^4 + 1) \\ &= x^4(x^3 - x + 1) + [(x^5 - x^2) + (x^4 + x^2 + 1)] \\ &= x^4(x^3 - x + 1) + [x^2(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)] \\ &= x^4(x^3 - x + 1) + [(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)] \\ &= \underbrace{(x^3 - x + 1)}_{f.p \text{ en } \mathbb{Z}[x]} \underbrace{(x^4 + x^2 + x + 1)}_{f.p \text{ en } \mathbb{Z}[x]}. \end{aligned}$$

Álgebra

EJERCICIOS

1. En cada uno de los siguientes casilleros, se ha establecido una misma ley de formación para los polinomios (con coeficientes enteros) dados,

6	3	x^2	x	$(a+1)$
2	x	4	2	x
17	x^2+3x+1	$4x^2+17$	$2x+5$	$p(x)$

Si $p(x)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{Z}[x]$; además “m” y “n” son, respectivamente, el menor valor entero positivo y mayor entero negativo que puede asumir “a”, halle $(m-n)$.

A) -1

B) 3

C) 2

D) -3

Solución:

i) De la ley de formación, $p(x) = x^2 + (a+1)x + 1$;

luego $p(x)$ será reducible en $\mathbb{Z}[x]$, si

$$x^2 + (a+1)x + 1 = p(x) = (x+1)(x+1) \vee x^2 + (a+1)x + 1 = p(x) = (x-1)(x-1) ,$$

Entonces, $a+1=2 \vee a+1=-2$, luego $a=1 \vee a=-3$

i) Como $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$, entonces: $a \neq 1 \wedge a \neq -3$

Luego, $m=2 \wedge n=-1$

$\therefore m-n=3$.

Rpta.: B

2. En un experimento que se efectuó durante cuatro horas, se observó que en cada hora transcurrida la temperatura de un objeto estuvo relacionada de acuerdo a la temperatura inicial del objeto y la del medio ambiente, dadas respectivamente por, “x” e “y” grados Celsius ($x \neq -y$); además se observó que para cada hora transcurrida, la temperatura disminuyó en “m” grados Celsius con respecto a la temperatura en la hora anterior; donde m es el número total de factores algebraicos en $\mathbb{Z}[x,y]$ de la expresión que representaba la temperatura en la hora anterior. Si en la tercera hora la temperatura fue de $t(x,y) = x^3 + 9x + x^2y - 6x^2 + 9y - 6xy$ grados Celsius, y la temperatura final en dicho experimento fue $(x-3)^2(x+7) - 5$ grados Celsius ; $x \neq 3$ ¿cuánto fue la temperatura del medio ambiente, sabiendo que se mantuvo constante?

A) -3 °C

B) -2 °C

C) 7 °C

D) 9 °C

Solución:

i) Temperatura al tercer día :

$$\begin{aligned} t(x,y) &= x^3 + 9x + x^2y - 6x^2 + 9y - 6xy \\ &= (x^3 + x^2y) + (-6x^2 - 6xy) + (9x + 9y) \\ &= x^2(x+y) - 6x(x+y) + 9(x+y) = (x+y)(x^2 - 6x + 9) = (x+y)(x-3)^2 \end{aligned}$$

Luego Nro de factores : $m = (1+1)(2+1) - 1 = 5$

ii) Temperatura al cuarto día: $(x+y)(x-3)^2 - 5 = (x-3)^2(x+7) - 5$

$\therefore$ La temperatura del medio fue $y = 7^\circ \text{C}$.

Rpta. : C

3. Carlos obtuvo un ingreso total de $(x^7 + x^2 + 1)$ soles por la venta de una cantidad de artículos, a un precio de venta unitario, en soles, expresado por el polinomio $(x^5 - x^4 + ax^2 - bx + c)$ con coeficientes enteros; donde $x > 0$. Si Carlos vendió trece artículos, ¿cuánto fue el precio de venta de cada artículo?

A) 170 soles B) 189 soles C) 166 soles D) 169 soles

Solución:

i) Sea $I(x)$ el ingreso total

$$\rightarrow I(x) = (\text{Precio Unitario de Venta})(\text{Cantidad de articulos}) = (x^5 - x^4 + ax^2 - bx + c)13$$

ii) Factorizamos $I(x)$:

$$\begin{aligned} \rightarrow I(x) &= (x^7 + x^2 + 1) = x^7 - x^4 + x^4 + x^2 + 1 = x^4(x^3 - 1) + x^4 + x^2 + 1 \\ &= x^4(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

Luego:

$$\text{Precio de Venta Unitario} = x^5 - x^4 + x^2 - x + 1 = (x^5 - x^4 + ax^2 - bx + c)$$

$$\text{Cantidad de artículos vendidos: } x^2 + x + 1 = 13 \rightarrow x = 3$$

$$\therefore \text{El precio de Venta Unitario: } 3^5 - 3^4 + 3^2 - 3 + 1 = 169 \text{ soles.}$$

Rpta. : D

4. Si al factorizar $p(x,y) = x^2(x-y)^2 - 14x(x-y)y^2 + 24y^4$ en $\mathbb{R}[x,y]$, se obtiene que la suma de sus factores primos está representado por $F(x,y)$, halle el valor de $F(3,3)$.

A) 18

B) 10

C) 6

D) 9

Solución:

$$p(x,y) = (x^2 - xy)^2 - 14(x^2 - xy)y^2 + 24y^4$$

Por Aspa Simple : $p(x,y) = (x^2 - xy - 12y^2)(x^2 - xy - 2y^2)$

Nuevamente factorizamos por Aspa Simple:

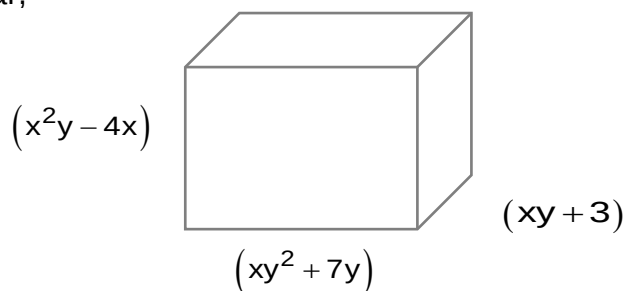
$$\rightarrow p(x,y) = (x - 4y)(x + 3y)(x - 2y)(x + y)$$

$$\rightarrow \sum \text{factores primos} = F(x,y) = (x - 4y) + (x + 3y) + (x - 2y) + (x + y) = 4x - 2y$$

$$\therefore F(3,3) = 4(3) - 2(3) = 6.$$

Rpta. : C

5. En la figura adjunta, se muestra las medidas (en unidades) de un paralelepípedo rectangular,



Si numéricamente, el volumen de dicho paralelepípedo es igual al valor numérico del área de una región rectangular, disminuida en 52, halle el factor primo en $\mathbb{Z}[x,y]$ que representa la medida (en unidades) del ancho de esta región rectangular, sabiendo que dicho factor primo, del polinomio que expresa el área de dicha región, es el de mayor término independiente.

A) $(x^2y^2 + 3xy - 2)$

B) $(x^2y^2 + 2x)$

C) $(x^2y + 2xy - 3)$

D) $(xy^2 + 3y - 2)$

Solución :

De la figura :

i) Vol(paralep): $v(x) = (x^2y - 4x)(xy^2 + 7y)(xy + 3)$

ii) Sea el área de la región rectangular: $s(x)$:

$$\rightarrow v(x) = s(x) - 52$$

$$\rightarrow (x^2y - 4x)(xy^2 + 7y)(xy + 3) = s(x) - 52$$

$$\rightarrow s(x) = (x^2y - 4x)(xy^2 + 7y)(xy + 3) + 52$$

$$= x(\underbrace{xy - 4})y(\underbrace{xy + 7})(xy + 3) + 52$$

$$= (x^2y^2 + 3xy - 28)(x^2y^2 + 3xy) + 52 \quad ; \text{ cambio de variable : } x^2y^2 + 3xy = z$$

$$\rightarrow s = (z - 28)(z) + 52 = z^2 - 28z + 52 = (z - 26)(z - 2)$$

$$\rightarrow s(x) = \underbrace{(x^2y^2 + 3xy - 26)}_{\text{f.p en } \mathbb{Z}[x,y]} \underbrace{(x^2y^2 + 3xy - 2)}_{\text{f.p en } \mathbb{Z}[x,y]}$$

$\therefore$ El ancho de la región rectangular está representada por $(x^2y^2 + 3xy - 2)$.

Rpta.: A

6. Una fábrica que elabora conservas de pescado, ha elaborado en las tres últimas semanas de este mes, las cantidades de $6x^2$; $21(x+z)$ y $2(5xz+9)$ conservas de pescado, respectivamente. Del total producido en dichas semanas, la cantidad de $(4z^2)$ conservas no han pasado las pruebas de control de calidad y el total de conservas restantes se han distribuido, de forma exacta, en $(m^5 + 40)$ cajas con una capacidad de conservas por caja, expresada por el factor $(mx - z + m + 3)$, irreducible en $\mathbb{Z}[x]$. Halle una expresión equivalente para la cantidad de conservas que la fábrica elaboró en la segunda semana.

- A) $(2140 - 21z)$ B) $(2940 - 21z)$ C) $(21z + 252)$ D) $(21z + 420)$

Solución:

Se tiene que:

- i) Cantidad total de conservas elaboradas en las tres semanas es:

$$s(x,z) = 6x^2 + 21(x+z) + 2(5xz+9)$$

- ii) Del total $s(x,z)$, no pasaron el control de calidad $(4z^2)$ conservas

Entonces, cantidad de conservas restantes:

$$R(x,z) = 6x^2 + 21(x+z) + 2(5xz+9) - 4z^2$$

$$= 6x^2 + 10xz - 4z^2 + 21x + 21z + 18$$

$$= (3x - z + 6)(2x + 4z + 3) \quad (\text{Por Aspa Doble})$$

$$\text{Luego, } (mx - z + m + 3) = (3x - z + 6) \rightarrow m = 3$$

Además el total de cajas es: $(2x + 4z + 3) = 3^5 + 40 = 283$

Entonces, $2x + 4z = 280 \rightarrow x + 2z = 140 \rightarrow x + z = 140 - z$

$\therefore$ La cantidad de conservas de la segunda semana es:
 $21(x + z) = 21(140 - z) = 2940 - 21z$.

Rpta. : B

7. Una granja avícola fue afectada por un tipo de virus "Z". En un primer día se detectó un ave infectada por dicho virus. Al finalizar el segundo día aparecieron tres nuevos casos de aves infectadas. Al tercer día, cada una del total de aves infectadas, contagiaron a (x^2) aves. Al tomar medidas de control para disminuir la propagación de dicho virus en las aves, resultó que el cuarto día fueron (x) aves contagiadas por cada ave contagiada el día anterior, y entre el quinto y sexto día aparecieron los últimos $(x^4 + 4x^2 + 7x)$ casos de aves contagiadas. Dicho virus no ha producido mortandad en las aves y del total de aves infectadas se han recuperado hasta el momento $(x^2 + x + 1)$ aves. Si el total de aves que aún están infectadas es expresado como producto de factores primos en $\mathbb{R}[x]$, halle la suma de los coeficientes de uno de dichos factores primos.

A) 8

B) 4

C) 7

D) 6

Solución:

De los datos se tiene:

Día Nro.:	1	2	3	4	5 y 6
Cantidad de aves infectadas	1	3	$4(x^2)$	$4(x^2)(x)$	$(x^4 + 4x^2 + 7x)$

- i) Total de aves infectadas hasta el sexto día: $c(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$
 ii) Total de aves recuperadas : $(x^2 + x + 1)$
 iii) Total restante de aves que faltan recuperarse: $r(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 3$
 iv) Aplicamos Aspa Doble Especial en $r(x)$:

$$r(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 3 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 3)$$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad \quad x \quad \quad 1 \\ \quad \quad \underline{3x} \quad \quad \underline{3} \\ x^2 \quad \quad 3x^2 \quad \quad 4x^2 \end{array}$$

Luego los factores primos en $\mathbb{R}[x]$ son $(x^2 + x + 1)$ y $(x^2 + 3x + 3)$

$\therefore$ La suma de coeficientes de uno de los factores primos es 7.

Rpta. : C

8. Al factorizar $p(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 2$ en $\mathbb{Z}[x]$, halle la suma de los valores absolutos de los términos independientes de los factores primos de $p(x)$.

A) 3 B) 4 C) 2 D) 1

Solución:

$$p(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 2$$

Factorizamos $p(x)$, por divisores binómicos:

i) Posibles raíces enteras : $\pm \text{Div}(2) = \pm \{1, 2\}$

ii) Aplicamos Ruffini :

Evaluamos en los valores de x , para hallar un factor de grado uno y, observamos que $x = 2$ es raíz,

$$\text{Luego } p(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{f.p en } \mathbb{Z}[x]} \underbrace{(x^4 + x + 1)}_{\text{f.p en } \mathbb{Z}[x]}$$

$\therefore$ La suma de los valores absolutos de los términos independientes de los factores primos es: $|-2| + |1| = 3$.

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el conjunto de los polinomios con coeficientes reales se define el operador ∇ , definido por, $p(x) \nabla q(x) = p^2(x) + q(x)$.

Si $(x-3) \nabla q(x) = h(x)$; donde $q(x)$ es un polinomio lineal que carece de término independiente, y su coeficiente principal es el mayor valor entero para que $h(x)$ resulte un polinomio irreducible en $\mathbb{R}[x]$, halle la suma de cifras de $q(5)$.

A) 6 B) 10 C) 11 D) 9

Solución:

$$\text{De } h(x) = (x-3) \nabla q(x) = (x-3)^2 + q(x) = (x-3)^2 + mx$$

$$\rightarrow h(x) = (x-3)^2 + mx = x^2 - 6x + 9 + mx = x^2 + (m-6)x + 9$$

$$h(x) \text{ es irreducible en } \mathbb{R}[x] \leftrightarrow \Delta < 0$$

$$\Leftrightarrow (m-6)^2 - 4(9) < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 12m < 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-12) < 0$$

$$\Leftrightarrow m \in \langle 0, 12 \rangle$$

Luego el mayor valor entero de m es $m = 11$

$$\text{Entonces } q(x) = 11x \rightarrow q(5) = 55$$

$\therefore$ La suma de cifras de $q(5)$ es 10.

Rpta.: B

2. Dados dos números distintos M y N , ambos de cuatro cifras y formados por un solo dígito. Los ahorros (en soles) de Paco y Carlos, son respectivamente, el producto de las cifras de M y N . Con el total de ambos ahorros compran un regalo a Rosa, cuyo costo, en soles, es de siete veces el cuadrado de, el producto de las cifras de las unidades de cada número. Si el dinero (en soles) que aún les queda es representado como un polinomio, halle la suma de los coeficientes de uno de los factores primos con coeficientes enteros de dicho polinomio.

A) 4

B) 1

C) 3

D) 5

Solución:

Sean los números: _____

$$M = \overline{xxxx} \quad y \quad N = \overline{yyyy}$$

i) Ahorros:

De Paco : x^4 y de Carlos: y^4

Entonces el total de ahorros es: $x^4 + y^4$

ii) Costo del regalo es: $7(xy)^2$

iii) Dinero que queda: $q(x,y) = x^4 + y^4 - 7(xy)^2$

$$\rightarrow q(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 9(xy)^2$$

$$= \underbrace{(x^2 + y^2 + 3xy)}_{\text{f.p en } \mathbb{Z}[x,y]} \underbrace{(x^2 + y^2 - 3xy)}_{\text{f.p en } \mathbb{Z}[x,y]}$$

$\rightarrow$ Suma de coeficientes de los factores primos es : $5 \vee -1$

$\therefore$ La suma de coeficientes de uno de los f.p es 5.

Rpta.: D

3. La administración de un hospital ha registrado las cantidades de vacunas contra la influenza adquiridas en sus tres lotes, según la tabla adjunta,

Lote Nro.	Cantidad de vacunas (en decenas)
1	$9(x^2 - x + 1)$
2	x^5
3	x^2

Para su segunda campaña contra la Influenza solo dispone del total de vacunas de sus dos últimos lotes. Si en el primer día de esta segunda campaña han aplicado $(13x^3 + 13)$ decenas de vacunas y el total del resto de vacunas lo aplicarán en 5 semanas atendiendo solo 3 días por semana y aplicando la vacuna a $(x^2 - x + m)$ decenas de personas cada día que atiendan, ¿ cuántas vacunas adquirió la administración del hospital en su primer lote, sabiendo que $x \in \mathbb{Z}$, $x > 3$ y $m \in \mathbb{Z}$?

A) 1890

B) 2790

C) 1170

D) 1710

Solución:

Total de vacunas de los dos últimos lotes: $T(x) = x^5 + x^2$

Total de vacunas que aplicaron el primer día $= 13x^3 + 13$

Entonces el Nro. de vacunas que quedan es: $Q(x) = x^5 + x^2 - 13x^3 - 13$

i) $Q(x) = 3$ (Nro. de semanas) (cantidad de personas que atienden por día)

ii) $Q(x) = \underbrace{x^5 + x^2}_{x^2(x^3 + 1)} - 13x^3 - 13$

$$= x^2(x^3 + 1) - 13(x^3 + 1)$$

$$= (x^2 - 13)(x^3 + 1)$$

$$= (x^2 - 13)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Entonces:

La cantidad de personas (en decenas) que atienden por día $= (x^2 - x + m) = (x^2 - x + 1)$

Número de semanas es $5 = x^2 - 13 \quad \vee \quad 5 = x + 1$

Desde que, $x \in \mathbb{Z}$, $x > 3 \rightarrow x + 1 = 5 \rightarrow x = 4$

Luego $(x^2 - x + m) = (x^2 - x + 1) = 13$ decenas

$\therefore$ La cantidad de vacunas del primer lote fue:

$$9(x^2 - x + 1) = 9(13) \text{ decenas} = 1170.$$

Rpta.: C

4. Sea $p(x,y,z) = (x+y)^2(x+y+2z) + (2z+y+x)^2(y+x) + (z+x)(y+z)(x+2z+y)$. Al factorizar $p(x,y,z)$ en $\mathbb{Z}[x,y,z]$, halle la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

A) 6 B) 4 C) 3 D) 5

Solución:

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= (x+y)^2(x+y+2z) + (x+y+2z)^2(x+y) + (x+z)(y+z)(x+y+2z) \\ &= (x+y+2z) \underbrace{\left[(x+y)^2 + (x+y+2z)(x+y) + (x+z)(y+z) \right]}_{\text{aplicamos aspa simple}} \\ &= (x+y+2z)((x+y)+x+z)((x+y)+y+z) \\ &= \underbrace{(x+y+2z)}_{\sum \text{coef}=4} \underbrace{(2x+y+z)}_{\sum \text{coef}=4} \underbrace{(x+2y+z)}_{\sum \text{coef}=4} \end{aligned}$$

$\therefore$ La suma de los coeficientes de cualquier factor primo es 4.

Rpta. : B

5. Halle el coeficiente del término lineal del factor primo cuadrático con término independiente igual a 2, que se obtiene al factorizar $p(x) = (x^2 - 16)(x^2 + 7x + 10)(x^2 - 4x + 3) + 1232$ en $\mathbb{R}[x]$.

A) -1 B) 3 C) 1 D) -2

Solución:

$$\begin{aligned} \text{i) } p(x) &= (x^2 - 16)(x^2 + 7x + 10)(x^2 - 4x + 3) + 1232 \\ &= (x+4)(x-4)(x+5)(x+2)(x-3)(x-1) + 1232 \\ &= [(x+4)(x-3)][(x-4)(x+5)][(x+2)(x-1)] + 1232 \\ &= (x^2 + x - 12)(x^2 + x - 20)(x^2 + x - 2) + 1232, \text{ cambio de variable: } x^2 + x = y \\ &= (y-12)(y-20)(y-2) + 1232 = y^3 - 34y^2 + 304y + 752 \end{aligned}$$

ii) Factorizamos $q(y) = y^3 - 34y^2 + 304y + 752$, por divisores binómicos:

Posibles raíces enteras: $\pm \text{Div}(752) = \pm \{1, 2, \dots\}$

Aplicamos Ruffini :

Evaluamos en los valores de $y = \pm \{1, 2, \dots\}$, para hallar un factor de grado uno y, observamos que $y = -2$ es raíz,

Luego $q(y) = (y+2)(y^2 - 36y + 376)$

$$\rightarrow p(x) = (x^2 + x + 2) \underbrace{\left((x^2 + x)^2 - 36(x^2 + x) + 376 \right)}_{h(x)}$$

- iii) Veamos si es posible factorizar $h(x)$ con factor primo cuadrático de término independiente 2:

Si aplicamos aspa simple buscando un factor primo cuadrático y de término independiente 2:

$$p(x) = (x^2 + x)^2 - 36(x^2 + x) + 376$$

$$(x^2 + x) \quad 2$$

$$(x^2 + x) \quad 188$$

, entonces hay un absurdo al verificar el término central

→ $h(x)$ no se puede factorizar con factor cuadrático y término independiente 2

$$\rightarrow p(x) = \underbrace{(x^2 + x + 2)}_{\text{f.p. cuadrático en } \mathbb{R}[x]} \left((x^2 + x)^2 - 36(x^2 + x) + 376 \right)$$

$\therefore$ El coeficiente del término lineal del factor cuadrático es 1.

Rpta.: C

6. Al factorizar, $p(x,y) = 21xy + 56x + 32 - 39y^2 - 92y$ en $\mathbb{Z}[x,y]$, el doble del término independiente de uno de sus factores primos, representa el número de días que no trabajé en el mes de febrero del año en curso, ¿cuántos días trabajé en dicho mes, sabiendo que la cantidad de días que no trabajé es menor a la cantidad de días que si trabajé?

A) 19.

B) 15.

C) 17.

D) 21

Solución:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= 21xy + 56x + 32 - 39y^2 - 92y \\ &= 0x^2 + 21xy - 39y^2 + \underline{56x} - 92y + 32 \\ &\quad \begin{array}{ccc} 7x & & -13y \\ 0x & & 3y \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ 8 \end{array} \\ &= (7x - 13y + 4)(0x + 3y + 8) \end{aligned}$$

Nota: Se comprueba, $(7x)(8) + (0x)(4) = 56x$

$$\rightarrow \text{Nro. de días que no trabajé : } \begin{cases} = 2(4) \rightarrow \text{trabaje} = 29 - 8 = 21 \text{ días} \\ \quad \quad \quad \vee \\ = 2(8) \rightarrow \text{trabaje} = 29 - 16 = 13 \text{ días} \end{cases}$$

$\therefore$ Trabajé 21 días.

Rpta. : D

7. Gabriela ha comprado un terreno de forma rectangular, cuya medida (en metros) de su ancho está representado por el factor primo $(x^2 - nx - 4)$ en $\mathbb{Z}[x]$; donde $x > 11$ y la medida de su largo es de 81 metros. Si el terreno comprado por Gabriela es de $(x^4 - 15x^3 + 43x^2 + 50x + 12)$ metros cuadrados y decide parcelar su terreno, dividiéndolo por la mitad en el lado de menor longitud, para así obtener, de forma exacta, terrenos de 9 metros de ancho ¿cuántas parcelas ha obtenido Gabriela?

A) 15 B) 12 C) 18 D) 9

Solución:

i) Área del terreno $T(x) = x^4 - 15x^3 + 43x^2 + 50x + 12 = 81(x^2 - nx - 4)$

ii) Aplicamos Aspa Doble Especial en $T(x)$:

$$T(x) = x^4 - 15x^3 + 43x^2 + 50x + 12 = (x^2 - 5x - 3)(x^2 - 10x - 4)$$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad \begin{array}{c} \nearrow -5x \\ \searrow -10x \\ \hline 50x^2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow -3 \\ \searrow -4 \\ \hline -7x^2 \end{array} \\ x^2 \end{array}$$

Luego de i) y ii): $x^2 - 5x - 3 = 81 \rightarrow x^2 - 5x - 84 = 0 \rightarrow x = 12$

Entonces el ancho y largo del terreno es 20 m y 81 m respectivamente, y al dividirlo por el lado de menor longitud, se tendría la medida de 10 m.

$$\therefore \text{El número de parcelas} = \frac{(81)(20)}{(9)(10)} = 18.$$

Rpta.: C

8. El gobierno destinó una partida presupuestal de $(x^5 + 5x^4 + x^3 + 6x^2 + 6x + 5)$ millones de soles para programas sociales, que serán distribuidas de forma exacta en siete regiones vulnerables del país. A cada región se le asignará la misma cantidad de dinero, y esta será entregada en dos tramos. Si para el primer tramo el presupuesto será de $(x^4 + x)$ millones de soles, y posteriormente se entregará los $(x^2 + 1)$ millones de soles restantes, ¿a cuánto asciende el presupuesto del gobierno para cada una de estas siete regiones, sabiendo que $x > 0$?

A) 24 millones de soles B) 23 millones de soles
C) 100 millones de soles D) 94 millones de soles.

Solución:

Total de la partida presupuestal: $T(x) = (x^5 + 5x^4 + x^3 + 6x^2 + 6x + 5)$ millones de soles

Cada una de las siete regiones recibirá: $(x^4 + x + x^2 + 1)$ millones de soles

Luego el total de la partida presupuestal $T(x) = 7(x^4 + x + x^2 + 1)$

$$\rightarrow 7(x^4 + x + x^2 + 1) = T(x) = \underbrace{(x^5 + 5x^4 + x^3 + 6x^2 + 6x + 5)}_{h(x)}$$

Aplicamos divisores binómicos en $h(x)$:

Posibles raíces enteras: $\pm \text{Div}(5) = \pm \{1, 5\}$

Aplicamos Ruffini: Evaluamos en los valores de x , para hallar un factor de grado uno y, observamos que $x = -5$ es raíz

$$\rightarrow h(x) = (x + 5)(x^4 + x^2 + x + 1)$$

$$\rightarrow 7(x^4 + x + x^2 + 1) = T(x) = (x + 5)(x^4 + x^2 + x + 1)$$

$$\rightarrow (x + 5) = 7 \rightarrow x = 2$$

Por lo tanto, el presupuesto que se entregó a cada región es:
 $(x^4 + x + x^2 + 1) = (2^4 + 2 + 2^2 + 1) = 23$ millones de soles.

Rpta.: B

Álgebra

EJERCICIOS

1. Sean los polinomios irreducibles $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ que se muestran en la primera fila de la tabla adjunta. Considerando esta primera fila, se encuentra una ley de formación para la segunda fila correspondiente a "m",

$p(x)$	$2x-1$	$2x+1$	$x+5$	$(bx+1)h(x)$
m	1	3	6	4

Si $h(x)$ en $\mathbb{Z}[x]$ es un polinomio mónico, de segundo grado, y tal que el coeficiente de su término lineal es -2 , halle $h(2)$, sabiendo que b es un elemento entero.

- A) -3 B) -2 C) 3 D) 5

Solución:

Como $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ y $p(x) = (bx+1)h(x)$, entonces uno de los factores debe ser una constante.

Luego $(bx+1)$ debe ser de grado cero; pues $h(x)$ es de grado 2, luego $b=0$

Entonces $p(x) = h(x) = x^2 - 2x + c$

Por otro lado, la ley de formación para m es: $m = \sum \text{coef. de } p(x)$

$$\rightarrow 4 = \sum \text{coef. de } p(x) = h(1)$$

$$\rightarrow 4 = h(1) = -1 + c$$

$$\rightarrow c = 5$$

$$\therefore h(2) = (2)^2 - 2(2) + 5 = 5.$$

Rpta.: D

2. En $p(x) = (x-1)^3(x+6)^4$, se cumple que el doble de su factor primo en $\mathbb{Z}[x]$ de menor término independiente representa la edad (en años) que tengo actualmente. Hace seis años la edad que tenía mi amigo César estaba representado por la mitad de la edad que yo tenía, aumentada en cuatro años. Si para el valor de x en la edad que tengo, se cumple que, la suma de los factores primos (de coeficiente principal positivo) en $\mathbb{Z}[x]$ del polinomio es 41, halle la edad de mi amigo César.

A) 25 años

B) 24 años

C) 32 años

D) 36 años

Solucion:

El factor primo de menor término independiente : $p_1(x) = (x-1)$

Luego mi edad actual es: $2(x-1)$

De los datos:

	Edad hace 6 años	Edad Actual
César	$\frac{(2x-8)}{2} + 4 = x$	m
Yo	$2x-2 = p(x)$	$2(x-1)$

Luego la edad actual de César es : $m = x + 6$

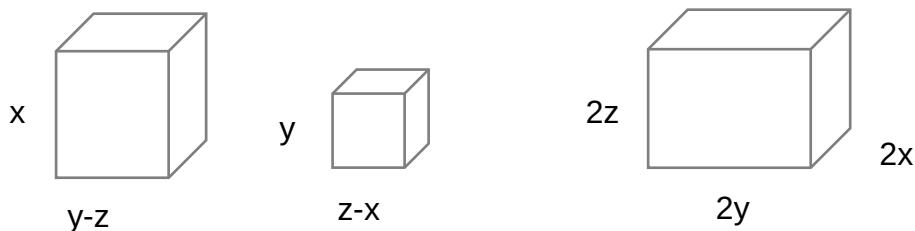
$$\rightarrow 41 = (x-1) + (x+6) = 2x+5$$

$$\rightarrow x = 18$$

$\therefore$ Edad de César es : 24 años.

Rpta. : B

3. En la figura adjunta, se muestra tres paralelepípedos, de base cuadrangular, recto para las dos primeras figuras y de base rectangular para la última figura; asimismo se muestra las dimensiones de los lados de la base y la altura (en unidades). Si la suma de los volúmenes de los tres sólidos mostrados coincide con el volumen de otro paralelepípedo (P), disminuido en $\left[z(x-y)^2 \right] u^3$, halle la suma de los factores primos en $\mathbb{Z}[x,y]$, que representan las dimensiones del largo, ancho y altura (en unidades) de este último paralelepípedo (P).



- A) $(x+y+z)$ B) $(xy+yz+xz)$ C) $2(x+y+z)$ D) xyz

Solución:

Suma de los volúmenes de los 3 sólidos: $V_s = x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + 8xyz$

Del dato: $V_s = V_p - z(x-y)^2$, donde V_p es el volumen del otro paralelepípedo.

$$\rightarrow V_p = V_s + z(x-y)^2$$

$$= x(y-z)^2 + 2xyz + y(z-x)^2 + 2xyz + z(x-y)^2 + 2xyz + 2xyz$$

$$= x(y^2 + z^2) + y(x^2 + z^2) + z(y^2 + x^2) + 2xyz$$

$$= xy^2 + xz^2 + yz^2 + yx^2 + \overline{zx^2} + zy^2 + \overline{xyz} + xyz$$

$$= xy(y+x) + z^2(x+y) + zx(x+y) + yz(x+y)$$

$$= (x+y)(xy + z^2 + zx + yz)$$

$$= (x+y)(y(x+z) + z(z+x)) = (x+y)(z+x)(y+z)$$

$$\therefore \sum \text{fact primos} : x+y+y+z+x+z = 2(x+y+z).$$

Rpta. : C

4. El doctor Jahir Urquía P, ha prescrito a uno de sus pacientes en total $(x^5 + x + 1)$ miligramos de un antibiótico, el cual debe ser suministrado, en su totalidad, una vez al día durante $(m + 6)$ días. Si el factor primo en de la forma $(x^3 - mx^2 + m)$ representa la cantidad (en miligramos) de dosis diaria de dicho antibiótico, ¿durante cuántos días fue indicado el antibiótico?

A) 7 días B) 4 días C) 3 días D) 5 días.

Solución:

$$\begin{aligned} x^5 + x + 1 &= x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) = (m + 6)(x^3 - mx^2 + m) \end{aligned}$$

Luego $m = 1$

∴ El antibiótico fue indicado por 7 días.

Rpta. : A

Lea la siguiente información, y en base a ello, responda a las preguntas 5 y 6.

Algeblos: Son bloques de madera, en la que cada uno de ellos es de la forma de un paralelepípedo rectangular (PPR), y tal que la medida de la altura para cada bloque es constante. Las dimensiones de (largo y ancho) de dichos bloques pueden variar, según las necesidades. Las medidas aritméticas de todos los bloques son de tal forma que, dichas medidas no se pueden expresar como un múltiplo de un entero de la otra medida.

5. En la figura adjunta, se muestra la superficie de un bloque que construyó Bryanna usando los Algeblos, y observó que numéricamente, la superficie del total de Algeblos excedió en 18 al valor numérico del volumen de un (PPR) que tiene Bryanna. Halle el factor primo en $\mathbb{Z}[x, y]$ que representa la medida (en metros) de la altura de este último paralelepípedo, sabiendo que dicho factor primo es el de menor término independiente.

	x^2	x	1	3
x^2				
x				
1				

A) $(x - 2)$ B) $(x - 1)$ C) $(x + 2)$ D) $(x + 1)$

Solución :

De la figura :

i) Área del bloque total :

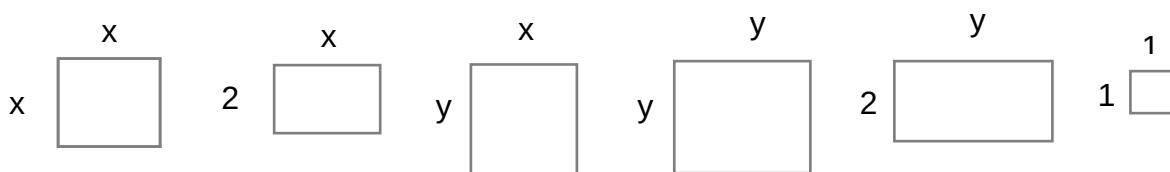
$$\begin{aligned}
 s(x) &= (x^2)(x^2) + (x^2)x + (x^2)(1) + (x^2)(3) + (x^2)x + x(x) + (1)(x) + 3x \\
 &\quad + (1)(x^2) + (1)(x) + (1)(1) + (1)(3) \\
 &= x^4 + x^3 + x^2 + 3x^2 + x^3 + x^2 + x + 3x + x^2 + x + 1 + 3 \\
 &= (x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x + 2x^2) + (3x^2 + 3x + 3) \\
 &= (x^2 + x + 1)^2 + 3(x^2 + x + 1)
 \end{aligned}$$

ii) $s(x) = \text{Vol}(\text{paralep}) + 18$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \text{Vol}(\text{paralep}) &= s(x) - 18 = (x^2 + x + 1)^2 + 3(x^2 + x + 1) - 18 \\
 &= (x^2 + x + 1 + 6)(x^2 + x + 1 - 3) \quad (\text{Por Aspa Simple}) \\
 &= (x^2 + x + 7)(x + 2)(x - 1)
 \end{aligned}$$

La altura del paralelepípedo está representada por $(x - 1)$.**Rpta. : B.**

6. Bryanna tiene una pieza de madera en forma rectangular, tal que la medida del largo (en centímetros) es $(2x + 3y + 6)$. Ella pudo recubrir, de forma exacta, la superficie de dicha pieza de madera usando los siguientes tipos de Algebloks (se muestra el valor numérico de la dimensión de cada uno de ellos)



Si Bryanna necesitó (en el orden dado de cada uno de los tipos de Algebloks) el siguiente número de piezas : 6 , 11 , 11 , 3 , 6 , 12; halle el factor primo en $\mathbb{Z}[x,y]$ que representa la medida (en centímetros) del ancho de la pieza de madera que tiene Bryanna.

- A) $(3x + y + 6)$ B) $(x + 3y + 2)$ C) $(3x + y + 2)$ D) $(3x + 2y + 3)$

Solución:

Se tiene que:

Superficie de la pieza de madera es:

$$s(x,y) = 6x^2 + 11(2)(x) + 11x(y) + 3y(y) + 6(2)(y) + 12(1)(1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 6x^2 + 11xy + 3y^2 + 22x + 12y + 12 \\
 &= (3x + y + 2) \underbrace{(2x + 3y + 6)}_{\text{largo}} \quad (\text{Por Aspa Doble})
 \end{aligned}$$

El factor primo que representa la medida del ancho de la pieza es: $(3x + y + 2)$

Rpta. : C

7. Carlos, un joven empresario, ha comprado nueve docenas de jeans, cuyo precio de costo unitario, en soles, está representado por $(x^2 - x + 6)$. Si, en total, pagó por dicha compra $(x^4 + 3x^2 + 8x - 12)$ soles, ¿cuánto debe ser el precio de venta de cada jean para que la ganancia unitaria de Carlos sea de 30 soles?

A) 92 soles B) 116 soles C) 118 soles D) 126 soles

Solución:

- i) Precio total del costo: $c(x) = x^4 + 3x^2 + 8x - 12 = m(x^2 - x + 6)$; donde m es la cantidad de jeans que compró.
 ii) Aplicamos Aspa Doble Especial en $c(x)$:

$$c(x) = x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 8x - 12 = (x^2 + x - 2)(x^2 - x + 6)$$

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} x^2 \quad \nearrow \quad -x \\ x^2 \quad \searrow \quad x \\ \quad \quad -x^2 \end{array} &
 \begin{array}{c} \quad \nearrow \quad 6 \\ \quad \searrow \quad -2 \\ \quad \quad 4x^2 \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{Luego de i) y ii): } m = (x^2 + x - 2) = (x + 2)(x - 1)$$

$$\rightarrow (x - 1)(x + 2) = m = (x^2 + x - 2) = 9(12)$$

$$\rightarrow (x - 1)(x - 1 + 3) = (x - 1)(x + 2) = 9(12) = 9(9 + 3)$$

$$\rightarrow x = 10$$

$$\text{Entonces cada jean le costó: } x^2 - x + 6 = (10)^2 - 10 + 6 = 96 \text{ soles.}$$

Cada jean deberá venderlo al precio de $96 + 30 = 126$ soles.

Rpta. : D

8. Una tienda comercial tiene en stock $(x^4 + 3x^2)$ unidades de laptops, de los cuales ha vendido en el primer, segundo y tercer mes del año, las cantidades de $(3x^3)$, $(3x)$ y 18 unidades, respectivamente. Si el dueño de dicha tienda, proyecta vender el resto de laptops en los dos meses siguientes, vendiendo $(x^3 + mx + 2m)$ unidades cada mes, siendo que esta última cantidad de unidades representa un factor primo en $\mathbb{Z}[x]$, ¿cuántas laptops vendió en los tres primeros meses del año?

A) 368

B) 408

C) 390

D) 418

Solución:

Unidades de laptops que quedan : $p(x) = (x^4 + 3x^2 - 3x^3 - 3x - 18)$

Factorizamos $p(x)$, por divisores binómicos:

i) Posibles raíces enteras : $\pm \text{Div}(18) = \pm \{1, 2, 3, \dots, 18\}$

ii) Aplicamos Ruffini :

Evaluamos en los valores de x , para hallar un factor de grado uno y, observamos que $x = 3$ es raíz,

$$\text{Luego } p(x) = x^4 + 3x^2 - 3x^3 - 3x - 18 = (x - 3)(x^3 + 3x + 6) \dots (1)$$

$$\text{Del Dato, } p(x) = 2(x^3 + mx + 2m) \quad , \quad (2)$$

Luego de (1) y (2): $x = 5 \wedge m = 3$

En los tres primeros meses vendió en total: $3x^3 + 3x + 18 = 408$.

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un profesor de álgebra pide a cada uno de sus tres estudiantes, que obtengan un polinomio irreducible en $\mathbb{R}[x]$, como resultado de multiplicar dos polinomios de $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $p_3(x)$, e inmediatamente sumarle alguna constante c_i ($i=1,2,3$); tal que el término independiente de sea el menor elemento entero positivo posible. En base a los polinomios $p_1(x)=3x-1$, $p_2(x)=2x+3$ y $p_3(x)=3x+1$, se muestra en la siguiente tabla las dos operaciones realizadas por los estudiantes Luis, Mónica y Martín,

Estudiante	Operación producto	Constante c_i que agrega
Luis	$p_1(x)p_2(x)$	c_1
Mónica	$p_2(x)p_3(x)$	c_2
Martín	$p_1(x)p_3(x)$	c_3

Halle la suma de cifras de $(c_1 \cdot c_2 \cdot c_3)$.

A) 6

B) 3

C) 9

D) 7

Solución:

Resultados Obtenidos:

i) Luis: $l(x) = 6x^2 + 7x + (-3 + c_1)$

$l(x)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x] \leftrightarrow \Delta < 0$

$\leftrightarrow \Delta = 49 - 4(6)(-3 + c_1) < 0$

$\leftrightarrow 5, \dots < c_1$

$\leftrightarrow c_1 = 6$ (menor entero positivo)

iii) Mónica: $m(x) = 6x^2 + 11x + (3 + c_2)$

$m(x)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x] \leftrightarrow \Delta < 0$

$\leftrightarrow \Delta = 121 - 24(c_2 + 3) < 0$

$\leftrightarrow 49 < 24c_2$

$\leftrightarrow c_2 = 3$ (menor entero positivo)

iii) Martín: $t(x) = 9x^2 - 1 + c_3$

$t(x)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x] \leftrightarrow \Delta < 0$

$$\leftrightarrow \Delta = -4(9)(c_3 - 1) < 0$$

$$\leftrightarrow (c_3 - 1) > 0$$

$$\leftrightarrow c_3 = 2 \text{ (menor entero positivo)}$$

La suma de cifras de $(6)(3)(2) = 36$ es 9.

Rpta.: C

2. En el conjunto de polinomios reducible en $\mathbb{Z}[x]$ y de grado mayor o igual que dos se define la siguiente operación:

$$\triangle_{Q(x)} = q_1(x)q_2(x) \quad ; \text{ donde } q_1(x) \text{ y } q_2(x) \text{ con}$$

coeficiente principal positivo, son los factores primos de $Q(x)$ en $\mathbb{Z}[x]$ con menor término independiente y mayor coeficiente en su término lineal ; respectivamente.

Si $p(x) = (ax - 1)^3 (bx - 3)^2 (x^2 - (b + 3)x + 3b)^2 \in \mathbb{Z}[x]$ tiene solo tres factores primos lineales en $\mathbb{Z}[x]$; cuyo coeficiente principal es 8; tal que b no es múltiplo de 3, y $a \neq 1$, halle el valor entero de x en,

$$\triangle_{p(x)} = 7$$

A) 4

B) 2

C) 5

D) 3

Solución:

$$\begin{aligned} p(x) &= (ax - 1)^3 (bx - 3)^2 (x^2 - (b + 3)x + 3b)^2 \\ &= (ax - 1)^3 (bx - 3)^2 (x - b)^2 (x - 3)^2, \end{aligned}$$

i) $p(x)$ tiene 3 factores primos en $\mathbb{Z}[x]$, entonces uno de sus factores es idéntico a otro de sus factores:

Casos:

$$\bullet (ax - 1) = (bx - 3) = 3\left(\frac{bx}{3} - 1\right) ; \text{ los factores primos serán equivalentes si y solo si } \left(\frac{bx}{3} - 1\right) = ax - 1 \leftrightarrow b = (3a) , \text{ lo cual contradice el dato.}$$

$$\bullet (x - b) = (bx - 3) \leftrightarrow b = 1 \wedge b = 3 \quad (\text{Contradicción})$$

• $(x-b) = (ax-1) = a\left(x-\frac{1}{a}\right)$; Los factores primos serán equivalentes si y solo si $\left(x-\frac{1}{a}\right) = x-b \leftrightarrow b = \frac{1}{a} \leftrightarrow ab = 1$, contradicción, pues a y b son enteros.

• $(x-3) = (ax-1) = a\left(x-\frac{1}{a}\right)$; Los factores primos serán equivalentes si y solo si $\left(x-\frac{1}{a}\right) = x-3 \leftrightarrow a = \frac{1}{3}$, contradicción, pues a es entero.

• $(x-b) = (x-3) \leftrightarrow b = 3$; contradicción con $b \neq 3$

• $(bx-3) = (x-3) \rightarrow b = 1$

Luego $p(x) = (ax-1)^3(x-3)^2(x-1)^2(x-3)^2 = (ax-1)^3(x-3)^4(x-1)^2$

ii) Del dato $8 = \text{Coef principal de } p(x) = a^3 \rightarrow a = 2$

Entonces $p(x) = (2x-1)^3(x-3)^4(x-1)^2 \rightarrow p_1(x) = (x-3)$, $p_2(x) = (2x-1)$

Luego $7 = (x-3)(2x-1) \rightarrow 0 = 2x^2 - 7x - 4 = (2x+1)(x-4)$

$\therefore$ El valor entero de x es 4.

Rpta.: A

3. Jaime compró para su hijo José, $g(3)$ polos de diferentes colores, al precio de $f(3)$ soles cada uno, donde $f(x)$ y $g(x)$ son los factores primos de

$$p(x) = (a+1)x^2 + (3a+1)x + 2a - 2 \quad \text{en } \mathbb{Z}[x],$$

Si $f(1) = 4$, ¿cuánto pagó Jaime por la compra de dichos polos?

- A) 50 soles B) 40 soles C) 60 soles D) 72 soles

Solución:

factorizaremos $p(x)$ por el método del Aspa Simple :

$$p(x) = (a+1)x^2 + (3a+1)x + 2a - 2$$

$$\begin{array}{cc} (a+1)x & (a-1) \\ x & 2 \end{array}$$

$$\rightarrow p(x) = ((a+1)x + a - 1)(x + 2)$$

$$\text{Entonces } f(x) = ((a+1)x + a - 1)$$

$$\rightarrow 4 = f(1) = (a+1 + a - 1) = 2a$$

$$\rightarrow 2 = a$$

$$\rightarrow f(x) = 3x + 1 \quad y \quad g(x) = (x + 2)$$

$$\text{Luego, } f(3) = 10 \quad y \quad g(3) = 5$$

Jaime pagó en total 50 soles.

Rpta.: A

4. Sea $h(x)$ el factor primo con mayor suma de coeficientes que se obtiene al factorizar $p(x) = x^6 + 9x^4 + 11x^2 - 49$ en $\mathbb{Z}[x]$.

El polinomio $f(x) = h(x) - x^3 - 15x + a - 7$, representa el costo, en cientos de soles, de x cientos de kilogramos de azúcar. Si la semana pasada compré 300 kilogramos de azúcar y pagué 800 soles, ¿cuánto pagaré ahora, si compro 600 kilogramos de azúcar?

- A) 600 soles B) 500 soles C) 1000 soles D) 1200 soles

Solución:

$$p(x) = x^6 + 9x^4 + 11x^2 - 49 = \underbrace{x^6 + 9x^4}_{(x^3 + 3x)^2} + 11x^2 + x^4 - x^4 + 14x^2 - 14x^2 - 49$$

$$= (x^6 + 10x^4 + 25x^2) - (x^4 + 14x^2 + 49) = (x^3 + 5x)^2 - (x^2 + 7)^2$$

$$= (x^3 + x^2 + 5x + 7)(x^3 - x^2 + 5x - 7)$$

Luego el factor primo con mayor suma de coeficientes es $h(x) = x^3 + x^2 + 5x + 7$

$$\text{Entonces } f(x) = x^3 + x^2 + 5x + 7 - x^3 - 15x + a - 7 = x^2 - 10x + a$$

$$\text{Para 300 kilos de azúcar (} x = 3 \text{): } f(3) = 3^2 - 10(3) + a = -21 + a = 8 \rightarrow a = 29$$

$$\text{Luego } f(x) = x^2 - 10x + 29$$

$$\text{Para 600 kilos de azúcar (} x = 6 \text{): } f(6) = 6^2 - 10(6) + 29 = 5$$

$\therefore$ El pago es de 500 soles.

Rpta. : B

5. En un campeonato de ajedrez escolar participaron $f(4,2,1) + g(2,4,2)$ estudiantes. En la primera fecha de campeonato, la cantidad de estudiantes que ganaron coincidió con el total de estudiantes que empataron. Si $f(x,y,z)$ y $g(x,y,z)$ son los factores primos de

$$p(x,y,z) = (x + y + z)^3 - 3(x^2 + xz + xy + yz)(y + z) + x^4yz + xy^4z + xyz^4, \text{ en}$$

$\mathbb{Z}[x,y,z]$ de menor y mayor término independiente, respectivamente, halle la cantidad de partidas empatadas.

- A) 17 B) 25 C) 16 D) 15

Solución:

$$i) \text{ En } p(x,y,z) = (x+y+z)^3 - 3 \underbrace{(x^2 + xz + xy + yz)}_{(x+y)(x+z)}(y+z) + x^4yz + xy^4z + xyz^4$$

$$P(x,y,z) = \underbrace{(x+y+z)^3 - 3(x^2 + xz + xy + yz)(y+z)}_{x^4yz + xy^4z + xyz^4} +$$

$$x^4yz + xy^4z + xyz^4$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + x^4yz + xy^4z + xyz^4$$

$$= \underbrace{x^3 + x^4yz}_{x^3(1+xyz)} + \underbrace{y^3 + xy^4z}_{y^3(1+xyz)} + \underbrace{z^3 + xyz^4}_{z^3(1+xyz)}$$

$$= x^3(1+xyz) + y^3(1+xyz) + z^3(1+xyz)$$

$$= (1+xyz)(x^3 + y^3 + z^3)$$

$$\rightarrow f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3, \quad g(x,y,z) = (1+xyz)$$

Luego tenemos:

$$\text{Total de participantes} = f(4,2,1) + g(2,4,2) = 90$$

Sea:

Nro. de ganadores = k ; Nro. de quienes perdieron = k ; Nro de quienes empataron = k

$$3k = 90 \rightarrow k = 30$$

$$\therefore \text{Cantidad de partidas empatadas: } \frac{k}{2} = 15.$$

Rpta.: D

6. José es un vendedor de frutas, quién dispone para la venta, $(x+y)$ manzanas y $(x-1)$ naranjas, al precio de $(x+y)$ soles cada fruta. Si José vendió el total de frutas que tenía, y del dinero obtenido gastó x soles, halle el factor primo en $\mathbb{Z}[x,y]$, de mayor suma de coeficientes del polinomio que representa, en soles, el dinero que le queda a José, después de realizar dicho gasto.

A) $(x+2y)$

B) $(x+y-1)$

C) $(2x+y)$

D) $(x-y+1)$

Solución:

Sea $p(x,y)$ el total de dinero obtenido por la venta de frutas:

$$\rightarrow p(x,y) = (x+y)(x+y) + (x+y)(x-1) - x$$

$$= 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 0$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & y & 0 \\ x & y & -1 \end{array}$$

$$\rightarrow p(x,y) = (2x+y)(x+y-1)$$

$\therefore$ El factor primo con mayor suma de coeficientes es $(2x+y)$

Rpta. : C

Lea la siguiente información, y en base a ello, responda las preguntas 7 y 8.

Software Matemático: El software matemático Arturo permite hallar los factores primos de un polinomio en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{Z}[x]$, ingresando cinco polinomios, con los que dicho software suma los tres primeros polinomios, y luego resta los dos últimos polinomios, dando como resultado el polinomio . Inmediatamente después se usa el comando $\text{facp}(\mathbb{R})$ para obtener los factores primos de en $\mathbb{R}[x]$ o el comando $\text{facp}(\mathbb{Z})$ para los factores primos en $\mathbb{Z}[x]$.

7. Bryanna ingresó los polinomios x^5 , $x^3 + 24$, $3x^2$, $3x^4$, $26x$, en el orden dado, y luego usó el comando $\text{facp}(\mathbb{R})$. Halle la suma de los coeficientes del factor primo de mayor grado, que obtuvo Bryanna, usando dicho Software.

- A) -1 B) 0 C) 4 D) -2

Solución:

$$\begin{aligned} m(x) &= x^5 + x^3 + 24 + 3x^2 - 3x^4 - 26x \\ &= x^5 - 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 26x + 24 \\ &= (x-1)(x+2)(x-3)\underbrace{(x^2 - x + 4)}_{\Delta < 0} \dots (\text{por divisores binómicos}) \end{aligned}$$

Luego el factor primo de mayor grado es: $q(x) = (x^2 - x + 4)$

Por tanto la suma de coeficientes de $q(x)$ es 4.

Rpta.: C

8. Bryanna ahora conoce que el volumen (en metros cúbicos) de un paralelepípedo rectangular recto, lo puede expresar, ingresando (en ese orden) los polinomios: $3x^4$, $2x^2$, $7x$, 2 , 0 ; y luego usa el comando $\text{facp}(\mathbb{Z})$. Si la medida de la altura (en metros) de dicho paralelepípedo está representado por el factor primo, cuyo coeficiente de su término lineal es 3, halle el área de la base de dicho paralelepípedo.

- A) $(3x^2 - x + 1)m^2$ B) $(x^2 - x + 2)m^2$
C) $(x^2 + x + 2)m^2$ D) $(2x^2 - x + 1)m^2$

Solución:

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^4 + 2x^2 + 7x - 2 \\ &= 3x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 7x - 2 \dots (\text{aplicamos aspa doble especial}) \\ &= (3x^2 + 3x - 1)(x^2 - x + 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto el área de la base de dicho paralelepípedo es $(x^2 - x + 2)m^2$

Rpta.: B

Álgebra

EJERCICIOS

1. Miguel y Noelia tienen respectivamente $x^4 + x^2 + 1$ y $x^3 + 1$ caramelos ($x \in \mathbb{Z}^+$). Al expresar la cantidad de caramelos que tienen juntos como un producto de factores primos en $\mathbb{Z}[x]$, indique la suma de los términos lineales de dichos factores primos.

A) x B) $2x$ C) $3x$ D) $-x$ E) $-4x$

Solución:

Entre los dos:

$$\begin{aligned} (x^4 + x^2 + 1) + (x^3 + 1) &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + (x + 1)(x^2 - x + 1) \\ &= (x^2 - x + 1) \left[(x^2 + x + 1) + (x + 1) \right] \\ &= \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{f.p.}} \underbrace{(x^2 + 2x + 2)}_{\text{f.p.}} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum \text{términos lineales} = -x + 2x = x$$

Rpta.: A

2. Halle un factor primo de $P(x, y) = (x^2 + y^2 - 6xy)^2 - 4xy(x + y)^2$ en $\mathbb{Z}[x, y]$.

A) $x + y$ B) $x^2 - 14xy + y^2$ C) $x - 4y$
D) $x^2 + 3xy - y^2$ E) $x + 2y$

Solución:

$$P(x, y) = (x^2 + y^2 - 6xy)^2 - 4xy(x + y)^2$$

Hacemos el siguiente cambio de variable

$a = x^2 + y^2$, $b = xy$, luego se tiene:

$$\begin{aligned} (a - 6b)^2 - 4b(a + 2b) &= a^2 - 16ab + 28b^2 \\ &= (a - 14b)(a - 2b) \end{aligned}$$

$$\rightarrow P(x, y) = (x^2 + y^2 - 14xy)(x - y)^2$$

Rpta.: B

3. Una iglesia se encargará de repartir esta Navidad 2019, juguetes a $r(40)$ niños que viven en extrema pobreza, con el apoyo de una institución que donará $s(6)$ juguetes, sabiendo que $r(x)$ es el factor primo común y $s(x)$ es la suma de factores primos de los polinomios $p(x) = x^4 - 82x^2 + 81$ y $q(x) = x^3 + 10x^2 + 3x - 54$ en $\mathbb{Z}[x]$, halle el número de regalos que sobrarán, si cada niño recibe un juguete.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 1 E) 2

Solución:

I) Factorizando por aspa simple

$$p(x) = x^4 - 82x^2 + 81 = (x^2 - 1)(x^2 - 81) = (x+1)(x-1)(x+9)(x-9)$$

II) Factorizando por divisores binómicos

$$q(x) = x^3 + 10x^2 + 3x - 54 = (x-2)(x+3)(x+9)$$

el factor primo común de los polinomios es: $r(x) = x + 9$

La cantidad de niños es $40 + 9 = 49$

$$s(x) = 7x + 10$$

$$s(6) = 52$$

Por lo tanto

Le sobrarían $52 - 49 = 3$ juguetes

Rpta.: C

4. Indique la suma de los coeficientes de uno de los factores primos de

$$p(x,y) = \beta x^2 + \gamma xy - \alpha y^2 - (2\beta + 1)x + 2\alpha y - 3\gamma \text{ en } \mathbb{Z}[x,y]; \text{ si cumple que: } p(1,1) = 0;$$

$$y \quad \beta - 1 = \gamma = \frac{\alpha}{4}.$$

A) -1 B) -4 C) -2 D) 1 E) 4

Solución:

$$I. p(1,1) = \beta + \gamma - \alpha - (2\beta + 1) + 2\alpha - 3\gamma = 0 \Rightarrow \alpha - \beta - 2\gamma - 1 = 0$$

$$II. \Rightarrow \alpha - \left(\frac{\alpha}{4} + 1\right) - 2\left(\frac{\alpha}{4}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 8, \beta = 3, \gamma = 2$$

Entonces:

$$p(x,y) = 3x^2 + 2xy - 8y^2 - 7x + 16y - 6$$

Aplicando el aspa doble

$$p(x,y) = \left(\underbrace{3x - 4y + 2}_{\substack{\text{factor primo} \\ \sum \text{coeficientes}=1}} \right) \left(\underbrace{x + 2y - 3}_{\substack{\text{factor primo} \\ \sum \text{coeficientes}=0}} \right)$$

Rpta: D

5. Al factorizar $p(x) = x^5 + x + 1$ en $\mathbb{Z}[x]$ se obtienen $f(x)$ y $g(x)$ factores primos con grado mayor y menor grado respectivamente, si $f(2) = a$ y $g(2) = b$, entonces el perímetro de un rectángulo de lados $\frac{z^{a-1}+1}{b-5}$ cm y $\frac{z^{a-3}+b-7}{2}$ cm es:

- A) $(z^2 + z + 1)^2$ cm B) $(z^2 + z + 1)$ cm
 C) $(z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1)$ cm D) $(z^2 + 1)^2$ cm
 E) $(z^2 - z + 1)^2$ cm

Solución:

$$p(x) = x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) =$$

$$= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 1(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1, \quad g(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow f(2) = a = 5, \quad g(2) = b = 7$$

Entonces el perímetro de un rectángulo de lados

$$\frac{z^{a-1}+1}{b-5} = \frac{z^4+1}{2} \text{ cm y}$$

$$\frac{z^{a-3}+b-7}{2} = \frac{z^2}{2} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \text{Perímetro} = z^4 + z^2 + 1 = (z^4 + 2z^2 + 1) - z^2 = (z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1) \text{ cm}$$

Rpta.: C

6. Halle el opuesto del producto de la suma de la mayor y menor raíz, con la raíz restante del polinomio $p(x) = 14 + 16x^2 - 33x + 3x^3$.

- A) $\frac{19}{3}$ B) $\frac{35}{3}$ C) 4 D) $-\frac{35}{3}$ E) -4

Solución:

Factorizando el polinomio usando el método de divisores binómicos

$$p(x) = 14 + 16x^2 - 33x + 3x^3 = 3x^3 + 16x^2 - 33x + 14$$

$$= (x - 1)(x + 7)(3x - 2)$$

Luego

$1, -7$ y $\frac{2}{3}$ son raíces del polinomio

Por lo tanto

El opuesto del producto de la suma de la mayor y menor raíz, con la raíz restante

$$-[1 + (-7)] \cdot \frac{2}{3} = 4$$

Rpta.: C

7. El índice de masa corporal (IMC) es un método utilizado para estimar la cantidad de grasa corporal que tiene una persona.

Para ello se usa la fórmula:

$$IMC = \frac{PESO(Kg)}{ALTURA^2(m)}$$

Al factorizar $p(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ en $\mathbb{Z}[x]$, la suma de los términos independientes de los factores de $p(x)$ resulta el valor de "a"

Determine el IMC (kg/m²) de una persona que pesa $\overline{a(a+1)}$ kg y mide $\overline{1(a+1)0}$ cm

- A) 21,875 B) 22,67 C) 24,13 D) 21,75 E) 23,1

Solución:

Sea : $p(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$

Aplicando aspa doble especial se tiene:

$$p(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3x + 2) = (x - 1)(x + 3)(x + 2)(x + 1)$$

Luego la suma de los términos independientes de los factores primos es $a = 5$

Entonces:

Peso : 56kg

Talla : 160cm = 1,60m

$$\therefore IMC = 21,875$$

Rpta.: A

8. Halle el número de factores del polinomio $p(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 26x + 24$ en $\mathbb{Z}[x]$.

- A) 8 B) 12 C) 9 D) 15 E) 7

Solución:

I. Factorizamos utilizando el método de divisores binómicos

$$p(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 26x + 24 = (x-1)(x+2)(x-3)(x^2 - x + 4)$$

$$\therefore \text{Número de factores: } [1+1][1+1][1+1][1+1] - 1 = 15$$

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcule el número de factores primos del polinomio $P(x) = -10 - 9x - 9x^3 + x^2 + 2x^4 + x^6$ en $\mathbb{R}[x]$

A) 4 B) 3 C) 5 D) 6 E) 2

Solución:

Agrupando los términos del polinomio

$$P(x) = (x^6 + 2x^4 + x^2) - 9(x^3 + x) - 10$$

$$= (x^3 + x)^2 - 9(x^3 + x) - 10 \text{ por aspa simple}$$

$$\begin{array}{ccc} (x^3 + x) & \swarrow & -10 \\ (x^3 + x) & \searrow & 1 \end{array}$$

$$P(x) = (x^3 + x - 10) \underbrace{(x^3 + x + 1)}_{\text{factor primo}}$$

$$P(x) = (x - 2) \underbrace{(x^2 + 2x + 5)}_{\text{factor primo}} (x^3 + x + 1)$$

$\therefore P(x)$ tiene 3 factores primos.

Rpta.: B

2. Vilma ha preparado $(x^4 + 5x^3 + 4x^2)$ porciones de gelatina para vender, donde $x \in \mathbb{Z}$ de las que hasta las 10 am ha vendido $[(2m+1)x + m]$ porciones. Si calcula que para las 3pm podría vender todas las porciones restantes de gelatina, vendiendo $(x^2 + 3x + 1)$ porciones por hora, ¿cuántas porciones de gelatina preparó Vilma?

A) 74 B) 252 C) 55 D) 168 E) 72

Solución:

Resta por vender $(x^4 + 5x^3 + 4x^2) - [(2m+1)x + m] = (x^4 + 5x^3 + 4x^2) - (2m+1)x - m$

Como cada hora vende $(x^2 + 3x + 1)$ porciones

$$(x^4 + 5x^3 + 4x^2) - (2m+1)x - m$$

usando el método del aspa doble especial

$$x^4 + 5x^3 + 4x^2 - (2m+1)x - m$$

$$x^2 \quad + 3x \quad + 1$$

$$x^2 \quad + \left(\frac{m+3}{3}\right)x \quad - m \Rightarrow m = 3$$

De 10 am a 3 pm transcurre 5 horas entonces en 5 horas vende las porciones restantes

$$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 2x - 3) \Rightarrow (x^2 + 2x - 3) = 5$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -4 \vee x = 2$$

Por lo tanto

$$(2^4 + 5(2)^3 + 4(2)^2) = 72$$

Rpta.: E

3. Ana y Claudia son dos amigas que cumplen años el mismo día, sin embargo Ana es mayor que Claudia por $[h(-2) - h(2) + 35]$ años; donde $h(x)$ es aquel factor primo del polinomio $p(x) = (x^6 + 6x^3 + 8)(x^6 - 2x^3) - 9$ en $\mathbb{Z}[x]$ con menor suma de coeficientes. Determine la edad de Claudia, sabiendo que Ana cumplió 19 años.

A) 16 años B) 17 años C) 18 años D) 15 años E) 14 años

Solución:

$$p(x) = (x^6 + 6x^3 + 8)(x^6 - 2x^3) - 9$$

$$\begin{array}{c} x^3 \quad \uparrow \quad 4 \\ \quad \swarrow \quad \searrow \\ x^3 \quad \quad 2 \end{array}$$

$$p(x) = (x^3 + 4)(x^3 + 2)(x^3)(x^3 - 2) - 9 = (x^6 + 2x^3 - 8)(x^6 + 2x^3) - 9$$

Hacemos un cambio de variable $u = x^6 + 2x^3$

$$(u - 8)u - 9 = u^2 - 8u - 9 = (u - 9)(u + 1)$$

Reemplazando

$$p(x) = (x^6 + 2x^3 - 9)(x^6 + 2x^3 + 1) = (x^6 + 2x^3 - 9)(x^3 + 1)^2$$

$$= (x^6 + 2x^3 - 9)(x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$$

$$\Rightarrow h(x) = x^6 + 2x^3 - 9$$

$$h(-2) - h(2) + 35 = (-2)^6 + 2(-2)^3 - 9 - [(2)^6 + 2(2)^3 - 9] + 35 = 3$$

$\therefore$ La edad que cumplió la menor es 16 años.

Rpta.: A

4. Victoria y Roberto son dos investigadores que se conocieron por Facebook. Ellos comparten sus investigaciones a través de este medio. Este año Roberto recibió de Victoria una cantidad de publicaciones que coincide con el número de factores primos del polinomio: $p(x, y, z) = x^6(y^3 - z^3) + y^6(z^3 - x^3) + z^6(x^3 - y^3)$ en $\mathbb{Z}[x, y, z]$ ¿Cuántas publicaciones recibió este año Roberto de Victoria?

A) 5 B) 3 C) 6 D) 4 E) 9

Solución:

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= x^6y^3 - x^6z^3 + y^6z^3 - y^6x^3 + z^6(x^3 - y^3) \\ &= (x^6y^3 - y^6x^3) - (x^6z^3 - y^6z^3) + z^6(x^3 - y^3) \\ &= x^3y^3(x^3 - y^3) - z^3(x^6 - y^6) + z^6(x^3 - y^3) \\ &= x^3y^3(x^3 - y^3) - z^3(x^3 + y^3)(x^3 - y^3) + z^6(x^3 - y^3) \\ &= (x^3 - y^3)(x^3y^3 - z^3x^3 - z^3y^3 + z^6) \\ &= (x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(x^3 - z^3) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(y - z)(y^2 + yz + z^2)(x - z)(x^2 + xz + z^2) \end{aligned}$$

Recibió este año Roberto de Victoria 6 publicaciones.

Rpta.: C

5. Al factorizar $p(x, y) = x^3 + [(x + y)^2 - xy][x^2 + y^2 + y - 3x] - y^3$ en $\mathbb{Z}[x, y]$, se obtiene un factor primo $q(x, y)$ que tiene un término lineal, halle el valor de $q(-1, 2)$.

A) 6 B) 4 C) 9 D) 7 E) 3

Solución:

Factorizando

$$\begin{aligned}
 \text{I) } p(x,y) &= (x^3 - y^3) + [x^2 + y^2 + 2xy - xy][x^2 + y^2 + y - 3x] \\
 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) + [x^2 + xy + y^2][x^2 + y^2 + y - 3x] \\
 &= (x^2 + xy + y^2)((x - y) + [x^2 + y^2 + y - 3x]) \\
 &= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - 2x + y^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II) } q(x,y) &= x^2 - 2x + y^2 \\
 \Rightarrow q(-1,2) &= (-1)^2 - 2(-1) + (2)^2 = 7
 \end{aligned}$$

Rpta.: D

6. En un examen de admisión a San Marcos el puntaje mínimo requerido para alcanzar una vacante fue de 1630 puntos. Jorge obtuvo $(1620 + a)$ puntos ; donde a es la suma de los cuadrados de los módulos de cada término independiente de los factores primos en $\mathbb{C}[x]$ de $p(x) = x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 3x + 10$, entonces podemos afirmar que Jorge:

- A) No alcanzó vacante y su puntaje fue de 1444 puntos
- B) Alcanzó vacante y su puntaje fue de 1634 puntos
- C) Alcanzó vacante y su puntaje fue de 1642 puntos
- D) No alcanzó vacante y su puntaje fue de 1628 puntos
- E) Alcanzó vacante y su puntaje fue de 1644 puntos

Solución:

Factorizando usando el método de aspa doble especial

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 3x + 10 = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 10)$$

$$p(x) = (x + i)(x - i) \left[x - \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2}i \right) \right] \left[x - \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2}i \right) \right]$$

$$\text{Las raíces son: } i, -i, \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2}i \right) \text{ y } \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2}i \right)$$

$$a = |i|^2 + |-i|^2 + \left| \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2}i \right|^2 + \left| \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2}i \right|^2 = 1 + 1 + 10 + 10 = 22$$

Jorge obtuvo $(1620 + a) = 1620 + 22 = 1642$ puntos

Por lo tanto

Alcanzó vacante y su puntaje fue de 1642 puntos

Rpta.: C

7. Jesús es un joven chalaco que ha sido seleccionado para un concurso de Matemáticas a realizarse en Comas, por la lejanía su mamá lo acompañará a dicho concurso.

Si al factorizar el polinomio

$$p(x,y) = (3x + 2y)^3 - (x + y)^3 + (2x + y)^2 - (3x + 2y)(3x + 3y)(2x + y) \text{ en } \mathbb{Z}[x,y]$$

la mayor y menor suma de los coeficientes de los factores primos representan, respectivamente, el número de veces que su mamá lo acompañará al concurso y el costo de cada pasaje en soles, ¿cuánto dinero invertirá la mamá de Jesús en los pasajes?

- A) 48 soles B) 24 soles C) 36 soles D) 16 soles E) 30 soles

Solución:

Hacemos un cambio de variable $m = x + y$, $n = 2x + y$, $\rightarrow m + n = 3x + 2y$

Reemplazando en el polinomio

$$(m + n)^3 - m^3 + n^2 - 3(m + n)(m)(n)$$

$$= m^3 + n^3 + 3mn(m + n) - m^3 + n^2 - 3mn(m + n) = n^3 + n^2 = n^2(n + 1)$$

$$p(x,y) = \left(\underbrace{2x + y}_{\substack{\text{factor primo} \\ \Sigma \text{coef.} = 3}} \right)^2 \left(\underbrace{2x + y + 1}_{\substack{\text{factor primo} \\ \Sigma \text{coef.} = 4}} \right)$$

su mamá lo acompañará al concurso 4 veces

y el costo de cada pasaje será: 3 soles $\Rightarrow$ ida y vuelta: 6 soles

Por lo tanto:

gastará en total su mamá: $2(6)(4) = 48$ soles

Rpta.: A

8. Halle la suma de los coeficientes de un factor primo en $\mathbb{Z}[x]$ del polinomio

$$p(x) = x^6 - 6x^4 + 2x^3 - 55x^2 - 6x + 1.$$

- A) 10 B) 4 C) 23 D) 7 E) -8

Solución:

Agrupando los términos

$$p(x) = (x^6 + 2x^3 + 1) + (-6x^4 - 6x) - 55x^2 = (x^3 + 1)^2 - 6x(x^3 + 1) - 55x^2$$

Usando el método del aspa simple

$$p(x) = [(x^3 + 1) - 11x][(x^3 + 1) + 5x]$$

$$\Rightarrow p(x) = \left(\underbrace{x^3 - 11x + 1}_{\substack{\text{factor primo} \\ 1 - 11 + 1 = -9}} \right) \left(\underbrace{x^3 + 5x + 1}_{\substack{\text{factor primo} \\ 1 + 5 + 1 = 7}} \right)$$

Rpta: D

Álgebra

EJERCICIOS

1. Sofía está de cumpleaños y sus amigos matemáticos quieren acertar con su edad. Ella les dice que su edad es $\overline{ab}$ años, donde a y b son los valores numéricos para $x=1$ de los factores primos de menor y mayor grado absoluto respectivamente del polinomio $p(x) = x^5 + x + 1$ en $\mathbb{Z}[x]$. ¿Cuántos años está cumpliendo Sofía?

A) 23 B) 30 C) 31 D) 42 E) 33

Solución:

$$p(x) = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$p(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

Por dato $\left\{ \begin{array}{l} a = (1)^2 + (1) + 1 = 3 \\ b = (1)^3 - (1) + 1 = 1 \end{array} \right.$

$$b = (1)^3 - (1) + 1 = 1$$

Sofía está cumpliendo 31 años.

Rpta.: C

2. Si $m(x,y,z)$ y $n(x,y,z)$ son los factores primos de mayor y menor grado respectivamente de $p(x,y,z) = [(x+y+z)^2 - 2(xy + (x+y)z)]^2 + x^3yz + xy^3z + xyz^3$ en $\mathbb{Z}[x,y,z]$, determine $m(1,0,-2) + GA[n(x,y,z)]$.

A) 7 B) 16 C) 9 D) 12 E) 8

Solución:

$$p(x, y, z) = \left[(x + y + z)^2 - 2(xy + (x + y)z) \right]^2 + x^3yz + xy^3z + xyz^3$$

$$p(x, y, z) = \left[(x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) \right]^2 + xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$p(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$p(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 + xyz)$$

$$m(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz \quad y \quad n(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{Piden } m(1, 0, -2) + GA[n(x, y, z)] = 5 + 2 = 7$$

Rpta.: A

3. El área en metros cuadrados de una sala rectangular de teatro está representado por $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ donde x metros es el exceso del largo de la sala del teatro respecto al ancho de la sala del teatro. Halle la medida del ancho de la sala del teatro, si ésta está determinada por uno de los factores primos de $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$.

A) $(x^2 + x + 1)$ m

B) $(x^2 + 1)$ m

C) $(x^2 + x)$ m

D) $(x^2 - x)$ m

E) $(x^2 - x + 1)$ m

Solución:

$$p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \Rightarrow p(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1) \dots \text{aspa doble especial}$$

identificando factores $\left\{ \begin{array}{l} \text{largo: } l(x) = x^2 + x + 1 \\ \text{ancho: } a(x) = l(x) - x = x^2 + 1 \end{array} \right.$

Rpta.: B

4. La menor raíz positiva del polinomio mónico $p(x) = mx^3 - 15x^2 - (3m+1)x + 480$ representa la edad en años de Julio. Halle la edad de su abuelo Rubén, sabiendo que estas edades se diferencian en 40 años.

A) 45 años B) 48 años C) 50 años D) 55 años E) 60 años

Solución:

$p(x)$ es mónico $\Rightarrow m = 1: p(x) = x^3 - 15x^2 - 4x + 480$

Por divisores binómicos: $p(x) = (x+5)(x-8)(x-12)$

C.S. = $\{-5, 8, 12\}$

Edad de Julio: 8 años

Edad del abuelo Rubén: 48 años

Rpta.: B

5. José es un comerciante que diariamente vende la misma cantidad de chompas a un costo unitario de x soles. Si $p(x)$ representa la cantidad de chompas vendidas y el polinomio $l(x) = x^6 + 4x^4 + 16x^2 + 2x^5 + 8x^3 + 32x$ representa el ingreso en soles obtenidos en $(x+2)$ días. Podemos afirmar:

I. $p(x)$ tiene dos factores primos en $\mathbb{R}[x]$.

II. $p(x)$ tiene 4 factores en $\mathbb{R}[x]$.

III. José vende $x^2 + 2x + 4$ chompas en $x^3 + 8$ días.

A) I B) II C) III D) I y II E) I y III

Solución:

$$l(x) = x(x^5 + 4x^3 + 16x) + 2(x^5 + 4x^3 + 16x) = (x+2).x.\underbrace{(x^4 + 4x^2 + 16)}_{p(x)}$$

$$p(x) = x^4 + 4x^2 + 16 = (x^4 + 8x^2 + 16) - 4x^2 = (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4) \text{ en } \mathbb{R}[x]$$

fact primos de $p(x) = 2 \dots (V)$

total de fact primos de $p(x) = 3 \dots (F)$

$$\text{luego } l(x) = \underline{(x+2).x.(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)}$$

$$l(x) = (x^3 + 8).x.(x^2 + 2x + 4)$$

chompas que venden en $x^3 + 8$ días: $x^2 + 2x + 4 \dots (V)$

Rpta.: E

6. Calcule la suma de los factores primos de $p(x,y) = (x^2 + y + 1)^3 - (x^2 + 1)(x^2 - 3y + 1)^2$ en $\mathbb{Z}[x,y]$.

A) $3x^2 + y + 3$ B) $x^2 - y + 1$ C) $y + 3$ D) $3x^2 + 3$ E) $x^2 + y + 1$

Solución:

cambio de variable : $u = x^2 + 1$

$$(u + y)^3 - u(u - 3y)^2 = u^3 + 3u^2y + 3uy^2 + y^3 - u(u^2 - 6uy + 9y^2)$$

$$= 9u^2y - 6uy^2 + y^3 = y(9u^2 - 6uy + y^2) = y(3u - y)^2$$

$$\text{luego } p(x,y) = y(3x^2 - y + 3)^2$$

$$\text{Piden } (3x^2 - y + 3) + y = 3x^2 + 3$$

Rpta.: D

7. Se tiene la cantidad exacta de cemento para construir dos paralelepípedos de volúmenes $x^2(x+z)$ y $yz(x+y)$ metros cúbicos, en dos lugares diferentes de un gran parque. El arquitecto Lunié sugiere que para ahorrar espacio en el gran parque se construya un solo paralelepípedo sobre una base rectangular de volumen y^3 metros cúbicos. Si $p(x,y,z)$ representa el volumen del paralelepípedo construido y se utilizó todo el cemento inicial, halle un factor primo de $p(x,y,z)$ en $\mathbb{Z}[x,y,z]$.

Dato: $\{x,y,z\} \subset \mathbb{Z}^+$ tal que $x+z > y$.

A) $x - y + z$ B) $x^2 - y^2 + z^2$ C) $x^2 - y + z$ D) $x - y$ E) $x^2 - xy + y^2$

Solución:

$$p(x,y,z) = x^2(x+z) + yz(x+y) - y^3$$

$$p(x,y,z) = \underline{x^3} + xyz + x^2z + y^2z - \underline{y^3}$$

$$p(x,y,z) = (x-y)(x^2 + xy + y^2) + z(x^2 + xy + y^2)$$

$$p(x,y,z) = (x^2 + xy + y^2)(x - y + z) \text{ m}^3$$

Rpta.: A

8. En una maratón Carlos debe correr en total $f(2,1)$ km para llegar a la meta pero solo recorrió $h(1,1)$ km. Si $f(x,y)$ y $h(x,y)$ son los factores primos con mayor término independiente y con menor término independiente del polinomio $p(x,y) = 6x^2 - 5xy - 6y^2 + 10x + 11y - 4$ en $\mathbb{Z}[x,y]$, ¿cuántos kilómetros le faltó recorrer a Carlos para llegar a la meta?

A) 1,1 km B) 1,4 km C) 2,5 km D) 1 km E) 3 km

Solución:

$$p(x, y) = 6x^2 - 5xy - 6y^2 + 10x + 11y - 4$$

$$p(x, y) = (3x + 2y - 1)(2x - 3y + 4)$$

$$f(x, y) = 2x - 3y + 4 \quad y \quad h(x, y) = 3x + 2y - 1$$

$$f(2, 1) = 5 \Rightarrow \text{total de km a recorrer en la maratón} = 5 \text{ km}$$

$$h(1, 1) = 4 \Rightarrow \text{total de km recorrido por Carlos en la maratón} = 4 \text{ km}$$

A Carlos le faltó 1 km para llegar a la meta.

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si el producto de los factores primos en $\mathbb{Z}[x]$ del polinomio $p(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 7x + 6$ evaluados en su respectivo término independiente representa el número de árboles talados diariamente en un bosque de la Selva peruana, ¿cuántos árboles serán talados en 5 días de trabajo en la Selva peruana?

A) 550 B) 960 C) 540 D) 320 E) 470

Solución:

Factorizando por divisores binómicos

$$p(x) = (x + 2)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 3)$$

los factores primos de $p(x)$ son:

$$p_1(x) = x + 2, \quad p_2(x) = x^2 + x + 1 \quad y \quad p_3(x) = x^2 - x + 3$$

$$\text{Número de árboles talados en 1 día: } p_1(2) \cdot p_2(1) \cdot p_3(3) = (4)(3)(9) = 108$$

En 5 días se talan $108 \times 5 = 540$ árboles.

Rpta.: C

2. El primo de mi prima obtiene un factor lineal de término independiente positivo del polinomio $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ que mis tios factorizaron en $\mathbb{Z}[x]$. Halle la suma de los términos independientes de los factores primos diferentes al que encontró el primo de mi prima del polinomio que factorizó el hermano de mi papá.

A) 1 B) 0 C) -1 D) -2 E) 3

Solución:

Factorizando por aspa doble especial

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = (x^2 - x - 6)(x^2 - x + 1)$$

$$p(x) = (x - 3)(x + 2)(x^2 - x + 1)$$

$x + 2$ es el factor primo que obtiene el primo de mi prima

$$\sum \text{términos independientes} = -3 + 1 = -2$$

Rpta.: D

3. Jesús aprovecha el verano para vender raspadilla de pura fruta. Al factorizar el polinomio $p(x,y) = x^3 + 28y^3 + 3xy(x+y)$ en $\mathbb{Z}[x,y]$ se encuentra que la mayor suma de coeficientes de un factor primo coincide con el número de raspadillas que vende Jesús en la semana (en cientos) y la menor suma de coeficientes coincide con el precio (en soles) de cada raspadilla. ¿Cuánto ganó Jesús en dicha semana?

A) S/ 4120 B) S/ 2400 C) S/ 3500 D) S/ 2700 E) S/ 2800

Solución:

$$p(x,y) = (x^3 + 3xy(x+y) + y^3) + 27y^3 = (x+y)^3 + (3y)^3$$

$$p(x,y) = [x+4y][(x+y)^2 - 3y(x+y) + 9y^2]$$

$$p(x,y) = \underbrace{(x+4y)}_{\sum \text{coef}=5} \underbrace{(x^2 - xy + 7y^2)}_{\sum \text{coef}=7}$$

de raspadillas preparadas en 1 semana = 700

precio de cada raspadilla = 5 soles

Ganó en 1 semana = $(700)(5) = 3500$ soles

Rpta.: C

4. La recaudación de los dos primeros días de una película de estreno fueron respectivamente $(x^4 + 9x^3 + 20x^2)$ soles y $(8x^2 + 38x + 24)$ soles. Manuel solo pudo ver 1h 15 min de dicha película. Si $p(x)$ representa la recaudación en ambos días, además el menor término independiente de uno de los factores primos lineales de $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ representa las horas que dura la película. ¿Cuánto tiempo le faltará a Manuel para poder terminar de ver toda la película?

A) 1h 45 min B) 1 h 20 min C) 2 h 45 min D) 2 h 15 min E) 1 h 25 min

Solución:

$$p(x) = (x^4 + 9x^3 + 20x^2) + (8x^2 + 38x + 24)$$

$$p(x) = x^4 + 9x^3 + 28x^2 + 38x + 24$$

Factorizando por aspa doble especial

$$p(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 7x + 12) = (x^2 + 2x + 2)(x+3)(x+4)$$

Duración de la película: 3 horas

Manuel vió la película: 1h 15 min

A Manuel le falta 1h 45 min para terminar de ver la película completa

Rpta.: A

5. En una clase de álgebra, el profesor Luis informa a sus $\overline{1a}$ estudiantes que el polinomio $p(x,y) = 6x^2 - (a+1)xy - ay^2 + (2a-1)x - 2y + 2$ se puede descomponer en dos factores lineales por lo que pregunta ¿cuál es la suma de los coeficientes de la variable "y" de los dos factores primos?

A) -3 B) 5 C) -8 D) 3 E) 4

Solución:

$$p(x,y) = 6x^2 - (a+1)xy - ay^2 + (2a-1)x - 2y + 2 \text{ con } a \in \mathbb{Z}^+$$

factorizando por aspa doble

$$p(x,y) = (3x + my + 2)(2x + ny + 1)$$

$$\text{Tenemos } \begin{cases} 2m + 3n = -a - 1 \dots (1) \\ m + 2n = -2 \dots (2) \\ m \cdot n = -a \dots (3) \end{cases}$$

$$\text{De (1) y (2): } m = 4 - 2a \text{ y } n = a - 3$$

$$\text{En (3): } (4 - 2a)(a - 3) = -a \Rightarrow a = 4$$

$$\text{Piden } m + n = (-4) + (1) = -3$$

Rpta.: C

6. Determine un factor primo de $p(x) = (x-3)^4 + (x-2)^3 + (x-1)^2 - 7(x-2) + 2$ en $\mathbb{Q}[x]$.
- A) $x^2 - 9$ B) $x^2 + 4$ C) $x - 3$
 D) $x^2 + 5x - 10$ E) $x^4 + 5x^2 + 10$

Solución:

$$p(x) = (x-3)^4 + (x-2)^3 + (x-1)^2 - 7(x-2) + 2$$

cambio de variable: $u = x - 3$

$$u^4 + (u+1)^3 + (u+2)^2 - 7(u+1) + 2$$

$$= u^4 + (u^3 + 3u^2 + 3u + 1) + (u^2 + 4u + 4) - 7u - 7 + 2$$

$$= u^4 + u^3 + 4u^2 = u^2(u^2 + u + 4)$$

$$p(x) = (x-3)^2 [(x-3)^2 + (x-3) + 4]$$

$$p(x) = (x-3)^2 (x^2 - 5x + 10)$$

Rpta.: C

7. La suma de los coeficientes del factor primo con mayor término independiente del polinomio $p(x) = x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 14x^2 + 44x - 40$ en $\mathbb{Z}[x]$ representa el precio (en soles) de un kilo de pescado. Si Helena compra 5 kg de dicho pescado, ¿cuánto deberá pagar en total?

A) 40 soles
D) 50 soles

B) 20 soles
E) 60 soles

C) 35 soles

Solución:

$$p(x) = x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 14x^2 + 44x - 40$$

Por divisores binómicos $p(x) = (x - 2)^3(x^2 + 2x + 5)$ en $\mathbb{Z}[x]$

$$\text{Tomamos } q(x) = x^2 + 2x + 5$$

Precio de 1 kg de pescado: $q(1) = 8$ soles

Helena pagará $5 \times 8 = 40$ soles

Rpta.: A

8. Halle el factor primo de menor grado al factorizar $p(x) = (x^2 + 1)^7 + 2(x^2 + 1) + x^4$ en $\mathbb{Z}[x]$.

A) $x^4 + x^2 + 2$ B) $x^4 - x^2 + 1$ C) $x^4 + 3x^2 + 3$ D) $x^4 + x^2 + 7$ E) $x^4 - 3x^2 + 3$

Solución

Factorizando por divisores binómicos

$$p(x) = (x^2 + 1)^7 + (x^4 + 2x^2 + 1) + 1 = (x^2 + 1)^7 + (x^2 + 1)^2 + 1$$

Cambio de variable: $u = x^2 + 1$

$$u^7 + u^2 + 1 = (u^7 - u) + (u^2 + u + 1) = u(u^3 + 1)(u^3 - 1) + (u^2 + u + 1)$$

$$= u(u^3 + 1)(u - 1)\underline{(u^2 + u + 1)} + \underline{(u^2 + u + 1)}$$

$$= (u^2 + u + 1)[u(u^3 + 1)(u - 1) + 1] = (u^2 + u + 1)[(u^3 + 1)(u^2 - u) + 1]$$

$$= (u^2 + u + 1)(u^5 - u^4 + u^2 - u + 1)$$

entonces

$$p(x) = [(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 1) + 1][(x^2 + 1)^5 - (x^2 + 1)^4 + (x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1) + 1]$$

$$p(x) = (x^4 + 3x^2 + 3)[(x^2 + 1)^5 - (x^2 + 1)^4 + (x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1) + 1]$$

Rpta.: C

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

11

semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (MCM) de dos o más polinomios

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios no nulos.

DEFINICIÓN

Decimos que el polinomio $d(x)$ es el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ si se cumple las dos condiciones siguientes:

- I). $d(x)$ divide a $p(x)$ y $d(x)$ divide a $q(x)$; es decir, $d(x)$ es divisor común de $p(x)$ y $q(x)$.
- II). Si $D(x)$ divide a $p(x)$ y $D(x)$ divide a $q(x)$, entonces, $D(x)$ divide a $d(x)$.

En este caso denotamos: $d(x) = \text{MCD} [p(x), q(x)]$

OBSERVACIÓN

- 1). $d(x) = \text{MCD} [p(x), q(x)]$ es mónico, existe y es único en $K[x]$, donde $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.
- 2). El $\text{MCD} [p(x), q(x)]$ divide a $[p(x) - q(x)]$.

DEFINICIÓN

Decimos que el polinomio $m(x)$ es el mínimo común múltiplo de $p(x)$ y $q(x)$ si se cumple las dos condiciones siguientes:

- I). $p(x)$ divide a $m(x)$ y $q(x)$ divide a $m(x)$; es decir, $m(x)$ es múltiplo común de $p(x)$ y $q(x)$.
- II). Si $p(x)$ divide a $M(x)$ y $q(x)$ divide a $M(x)$, entonces, $m(x)$ divide a $M(x)$.

En este caso denotamos: $m(x) = \text{MCM} [p(x), q(x)]$

PASOS PARA HALLAR EL MCD Y EL MCM DE DOS O MÁS POLINOMIOS

1. Factorizamos los polinomios en sus factores primos en el conjunto $K[x]$ especificado, es decir, debe cumplirse el teorema de la factorización única.
2. Para el MCD, multiplicamos solo los factores primos comunes en los polinomios cada uno de ellos elevado a su menor exponente.
3. Para el MCM, multiplicamos los factores primos comunes y no comunes en los polinomios cada uno de ellos elevado a su mayor exponente.

PROPIEDAD

$$\text{MCD} [p(x), q(x)] \cdot \text{MCM} [p(x), q(x)] = p(x) \cdot q(x)$$

Ejemplo 1:

Si $d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x), r(x)]$ en $\mathbb{Z}[x]$ de los polinomios $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, $q(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$ y $r(x) = x^3 + 2x^2 - 19x - 20$, halle el resto de dividir $[d(x)]^3$ entre $(x + 2)$.

Solución:

Factorizando en $\mathbb{Z}[x]$:

$$1). p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow p(x) = (x+2)(x-1)(x+1)$$

$$2). q(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9 = x^2(x+1) - 9(x+1) = (x+1)(x^2 - 9)$$

$$\Rightarrow q(x) = (x+1)(x-3)(x+3)$$

$$3). r(x) = x^3 + 2x^2 - 19x - 20 = (x^3 + x^2) + (x^2 - 19x - 20) = x^2(x+1) + (x-20)(x+1)$$

$$\Rightarrow r(x) = (x+1)(x^2 + x - 20)$$

$$\Rightarrow r(x) = (x+1)(x+5)(x-4)$$

$$\Rightarrow d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x), r(x)] = x + 1.$$

Hallando el r(x) el resto de dividir $(x+1)^3$ entre $(x+2)$. Por el teorema del resto :

$$i). x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$ii). r(x) = (-2+1)^3 = -1.$$

Ejemplo 2:

Dados los polinomios $p(x, y) = (x + 2y - 1)^2 - x - 2y - 5$ y $q(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 - 3y - 1$, determine la suma de los coeficientes del factor primo con mayor término independiente del $\text{MCM}[p(x, y), q(x, y)]$ en $\mathbb{Z}[x, y]$.

Solución:

Factorizando en $\mathbb{Z}[x, y]$ los polinomios:

$$1). \quad p(x, y) = (x + 2y - 1)^2 - x - 2y - 5 = (x + 2y - 1)^2 - (x + 2y - 1) - 6$$

$$p(x, y) = (x + 2y - 1)^2 - (x + 2y - 1) - 6 = [(x + 2y - 1) - 3][(x + 2y - 1) + 2]$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ (x + 2y - 1) & & -3 \\ (x + 2y - 1) & & +2 \end{array}$$

$$\Rightarrow p(x, y) = (x + 2y - 4)(x + 2y + 1)$$

$$2). \quad q(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 - 3y - 1$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & & +2y \\ x & & -y \end{array} \begin{array}{ccc} \nearrow & & \nearrow \\ +2y & & +1 \\ -y & & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow q(x, y) = (x + 2y + 1)(x - y - 1)$$

$$\text{Luego: } \text{MCM}[p(x), q(x)] = (x + 2y + 1)(x + 2y - 4)(x - y - 1)$$

$\Rightarrow$ Los factores primos son: $x + 2y + 1$, $x + 2y - 4$, $x - y - 1$.

$\Rightarrow$ El factor primo con mayor término independiente es: $x + 2y + 1$

$\therefore$ La suma de sus coeficientes es: $1 + 2 + 1 = 4$.

Ejemplo 3:

Si $p(x).q(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 3$ y $\text{MCD}[p(x), q(x)] = x^2 + 2x - 3$ en $\mathbb{Z}[x]$, halle la suma de coeficientes del $\text{MCM}[p(x), q(x)]$.

Solución:

1). Factorizando en $\mathbb{Z}[x]$:

$$\bullet \quad p(x).q(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 3$$

Utilizando divisores binómicos, se obtiene:

$$p(x).q(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2(x + 3)$$

$$\bullet \quad \text{MCD}[p(x), q(x)] = (x + 3)(x - 1)$$

2). Se sabe que:

$$\text{MCD}[p(x), q(x)] \text{MCM}[p(x), q(x)] = p(x).q(x)$$

$$\Rightarrow \cancel{(x + 3)} \cancel{(x - 1)} \text{MCM}[p(x), q(x)] = \cancel{(x - 1)}^2 \cancel{(x + 1)}^2 \cancel{(x + 3)}$$

$$\Rightarrow m(x) = \text{MCM}[p(x), q(x)] = (x - 1)(x + 1)^2$$

$$\Rightarrow m(1) = (1 - 1)(1 + 1)^2 = (0)(4) = 0.$$

$\therefore$ La suma de coeficientes del $m(x)$, es 0.

Álgebra

EJERCICIOS

1. Sean los polinomios $p(x) = (x-2)(x^3 + 2x - 3x^2)$ y $q(x) = (x-2)(x^2 - 2x) + x - 2$. Juan compra cierto número de polos representado por el $\text{MCD}[p(x), q(x)]$ evaluado en $x = 5$, cuyo precio de cada polo en soles esta dado por el $\text{MCM}[p(x), q(x)]$ evaluado en $x = 3$, determine cuanto fue el gasto total en soles de Juan.

A) S/ 144

B) S/ 142

C) S/ 140

D) S/146

Solución:

Factorizando:

$$1). \quad p(x) = (x-2)(x^3 + 2x - 3x^2) = (x-2)^2(x-1)x$$

$$2). \quad q(x) = (x-2)(x^2 - 2x) + x - 2 = (x-2)(x-1)^2$$

Luego, obtenemos :

$$\bullet \quad d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x)] = (x-1)(x-2) \Rightarrow d(5) = (4)(3) = 12$$

$$\bullet \quad m(x) = \text{MCM}[p(x), q(x)] = (x-1)^2(x-2)^2x \Rightarrow m(3) = (4)(1)(3) = 12$$

$\therefore$ Juan compro 12 polos y como cada polo cuesta S / 12, el gasto total de Juan, fue de : S / 144.

Rpta.: A

2. Franchesca es menor de edad y cumplió hoy 18 de junio del 2019, $(3n+4)$ años. Determine cuantos años le faltan a Franchesca para obtener su libreta militar, la cual se obtiene a los 17 años, sabiendo que $d(x) = x^2 - x + 2$ es el máximo común divisor de los polinomios $p(x) = ax^4 + 2bx^2 - 5x + 6$ y $q(x) = x^4 - ax^2 + 2bx + n - 2$.

A) 3

B) 5

C) 2

D) 7

Solución:

Por definición del MCD $[p(x), q(x)] = d(x)$:

1). $p(x)$ es divisible por $d(x)$, luego de dividir por Horner inverso se obtiene :

$$b - 1 = 0 \quad \wedge \quad a - b + 2 = 0$$

$$\Rightarrow b = 1 \quad \wedge \quad a = -1.$$

2). $q(x)$ es divisible por $d(x)$, luego de dividir por Horner se obtiene :

$$n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$$

Luego, Francesca cumplió el 18 de junio del 2019, 10 años.

$\therefore$ Para obtener su libreta militar le faltan 7 años.

Rpta.: D

3. Para el 22 de marzo del 2020 la pandemia del coronavirus (COVID-19) tuvo cerca de 300 mil casos de contagio en 172 países, y fallecieron más de 12 700 personas. Llamó mucho la atención a nivel mundial la tasa de mortalidad causada por el virus, se estimó que aproximadamente el número de fallecidos hombres y el número de fallecidos de mujeres fueron de $\overline{b+1}0\%$ y $\overline{a-1}0\%$ respectivamente. Sabiendo que $m(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ es el mínimo común múltiplo en de los polinomios $p(x) = (x-2)(x+1)$ y $q(x)$, determine la relación entre la tasa de fallecidos hombres y el de mujeres en ese orden.

A) 2 a 3

B) 9 a 1

C) 3 a 2

D) 7 a 3

Solución:

Por definición del MCM, el $MCM[p(x), q(x)]$ es divisible por $p(x) = x^2 - x - 2$. Luego de dividir por Horner:

$$a + 2 = 0 \quad \wedge \quad b + 8 = 0$$

$$\Rightarrow a = -2 \quad \wedge \quad b = -8$$

Sea k el número de muertos.

Luego, la tasa de fallecidos hombres es de $70\%k$ y el de mujeres es $30\%k$.

$$\Rightarrow \frac{\text{Hombres fallecidos}}{\text{Mujeres fallecidas}} = \frac{70\%k}{30\%k} = \frac{7}{3}.$$

$\therefore$ Por cada 7 hombres fallecidos, hay 3 mujeres fallecidas.

Rpta.: D

4. Si $D(x)$ es el mínimo común múltiplo de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ en $\mathbb{Z}[x]$ donde

$$D(x) = 2(x-1)(x+1)(x^2+1) + (x^4 - x^2)(x^4 - 1),$$

$p(x) = (x^4 + ax^2 + b)(x-a)(x-1)$; $a \neq b$ y $q(x) = (x^2 + mx + n)(x+r)$; $r \neq -1$, calcule el valor de $H = p(b) - q(r)$.

A) 35

B) 40

C) 43

D) 38

Solución:

Factorizando en $\mathbb{Z}[x]$:

$$\begin{aligned} D(x) &= 2(x^2 - 1)(x^2 + 1) + x^2(x^2 - 1)(x^2 - 1)(x^2 + 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1) \left[2 + x^2(x^2 - 1) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4 - x^2 + 2)$$

Luego, analizando cada factor primo de $p(x)$ y $q(x)$ en $\mathbb{Z}[x]$, y por definición del MCM, se obtiene:

$$a = -1; b = 2; m = 0; n = 1; r = 1.$$

Reemplazando:

$$p(x) = (x^4 - x^2 + 2)(x+1)(x-1)$$

$$q(x) = (x^2 + 1)(x+1)$$

$$\Rightarrow H = p(2) - q(1) = 42 - 4 = 38.$$

$$\therefore H = 38.$$

Rpta.: D

5. Dados los polinomios

$$p(x, z) = 2x^2 + 11z - 12 - 2z^2 + 5x \quad \text{y} \quad q(x, z) = 3x^2 + 20x - 2z^2 - xz + 32$$

en $\mathbb{Z}[x, z]$, halle la suma de los factores primos del polinomio $\frac{\text{MCM}[p(x, z), q(x, z)]}{\text{MCD}[p(x, z), q(x, z)]}$.

A) $3x - 2z + 5$

B) $5x + 4z + 5$

C) $4x - 5z + 3$

D) $4x - 4z + 4$

Solución:

Factorizando en , usando aspa doble:

$$1). p(x, z) = 2x^2 + 0xz - 2z^2 + 5x + 11z - 12 \\ \Rightarrow p(x, z) = (2x + 2z - 3)(x - z + 4)$$

$$2). q(x, z) = 3x^2 + 20x - 2z^2 - xz + 32 \\ \Rightarrow q(x, z) = (3x + 2z + 8)(x - z + 4)$$

Calculando :

$$\frac{\text{MCM}[p(x, z), q(x, z)]}{\text{MCD}[p(x, z), q(x, z)]} = \frac{\cancel{(x - z + 4)}(2x + 2z - 3)(3x + 2z + 8)}{\cancel{x - z + 4}} \\ \Rightarrow \frac{\text{MCM}[p(x, z), q(x, z)]}{\text{MCD}[p(x, z), q(x, z)]} = (2x + 2z - 3)(3x + 2z + 8)$$

$\Rightarrow$ Los factores primos en son : $2x + 2z - 3$, $3x + 2z + 8$.

$\therefore$ La suma de los factores primos, es : $5x + 4z + 5$.

Rpta.: B

6. Sean los polinomios $q(x)$ y $p(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$ tales que en su máximo común divisor y mínimo común múltiplo son respectivamente, $d(x) = x^2 - 3x + 2$ y $m(x) = x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 55x^2 - 126x + 72$. Si $t(x)$ es la suma de los factores primos en de $q(x)$, halle el valor de $|t(1) - 1|$.

A) 5

B) 1

C) 4

D) 7

Solución:

Factorizando:

$$1). d(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$2). p(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)$$

$$3). m(x) = x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 55x^2 - 126x + 72 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x + 3)(x - 4)$$

Se sabe que :

$$\text{MCD}[p(x), q(x)] \text{MCM}[p(x), q(x)] = p(x) \cdot q(x)$$

$$\Rightarrow \cancel{(x - 1)} \cancel{(x - 2)} (x - 1)(x - 2)(x - 3) \cancel{(x + 3)} \cancel{(x - 4)} = \cancel{(x - 1)} \cancel{(x - 2)} \cancel{(x + 3)} \cancel{(x - 4)} q(x)$$

$$\Rightarrow q(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$\Rightarrow$ Los factores primos de $q(x)$ son : $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$.

$$\Rightarrow t(x) = 3x - 6.$$

$$\therefore |t(1) - 1| = |-3 - 1| = |-4| = 4.$$

Rpta.: C

7. En una clase de repostería, Anita dispone de una cantidad de paquetes de azúcar rubia y de azúcar blanca, ambas cantidades están representadas respectivamente por los polinomios $p(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$ y $q(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1$ en con $x > 1$. Ella distribuirá, de forma exacta, el total de paquetes de azúcar rubia y de azúcar blanca en mesas. Si Anita distribuye de manera equitativa, tanto la cantidad de paquetes de azúcar rubia como los de blanca, y usa el mayor número de mesas posibles, ¿en cuánto excede la cantidad de paquetes de azúcar blanca a la cantidad de paquetes de azúcar rubia, en cada mesa?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 3

Solución:

Factorizando en :

$$1). p(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$$

$$2). q(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1 = (x-1)(x+1)^2(x^2-x+1)$$

Luego, por dato deducimos que el número de mesas se obtiene de :

$$\text{MCD}[p(x), q(x)] = (x-1)(x+1).$$

Entonces :

- El número de paquetes de azúcar rubia en cada mesa se obtiene de :

$$\frac{p(x)}{d(x)} = \frac{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = (x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$$

- El número de paquetes de azúcar blanca en cada mesa se obtiene de :

$$\frac{q(x)}{d(x)} = \frac{(x-1)(x+1)^2(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)} = (x+1)(x^2-x+1) = x^3 + 1$$

$$\Rightarrow (x^3 + 1) - (x^3 - 1) = x^3 + 1 - x^3 + 1 = 2$$

∴ En cada mesa hay dos paquetes de azúcar blanca más que de los paquetes de azúcar rubia.

Rpta.: B

8. El Doctor Jorge, luego de auscultar a Julisa le receta dos medicamentos (Paracetamol y Sertal), una de estas pastillas la debe tomar cada $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$ horas, y la otra cada $(x^4 + x^3 - x - 1)$ horas (con $x > 1$ en). Si empieza el tratamiento tomando las dos pastillas (Paracetamol y Sertal) juntas, determine cada cuantas horas como mínimo tomará nuevamente las pastillas juntas.

A) $2(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$ B) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$
C) $(x+1)(x^2+x+1)$ D) $2(x+1)(x^2+x+1)$

Solución:

Factorizando:

1). $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$

2). $x^4 + x^3 - x - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

Luego, por dato debemos considerar el MCM de los polinomios dados :

$$(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

∴ Después de $(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$ horas, vuelve a tomar las dos pastillas juntas.**Rpta.: B****EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. El precio de un bolígrafo de tinta líquida (en soles) viene dado por la suma de coeficientes del máximo común divisor de $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 16x + 6$, $q(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 - 14x - 4$ y $r(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 25x + 10$ en , determine cuánto se debe pagar por la compra de una docena de esos bolígrafos líquidos.

A) S/ 60

B) S/ 36

C) S/ 48

D) S/ 72

Solución:

Factorizando en :

1). $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 16x + 6 = (x^2 - 2x + 6)(x^2 + 3x + 1)$

2). $q(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 - 14x - 4 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 2x - 4)$

3). $r(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 25x + 10 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 5x + 10)$

$$\Rightarrow d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x), r(x)] = x^2 + 3x + 1.$$

Luego, el precio de un bolígrafo, es : $S / (1 + 3 + 1) = S / 5$.∴ Se debe pagar por una docena de bolígrafos $S / 60$.**Rpta.: A**

2. En la clase del Prof. Teodoro asistieron $(a + b + c - d)$ alumnos, él desea formar una comisión de c alumnos. Sabiendo que $\text{MCD}[p(x), q(x)] = x^2 + 3x - 5$ para los polinomios $p(x) = x^4 + 3x^3 + ax^2 + 9x + b$ y $q(x) = x^4 + cx^3 - 12x^2 + dx + 35$ en ¿De cuántas maneras el Prof. Teodoro puede formar dicha comisión?

A) 35

B) 45

C) 25

D) 15

Solución:Por definición del $\text{MCD}[p(x), q(x)] = d(x)$:

1). $p(x)$ es divisible por $d(x)$, luego de dividir por Horner se obtiene :

$$9 - 3(a + 5) = 0 \wedge b + 5(a + 5) = 0$$

$$\Rightarrow a = -2 \wedge b = -15.$$

2). $q(x)$ es divisible por $d(x)$, luego de dividir por Horner se obtiene :

$$d + 14c - 21 = 0 \wedge 45 - 15c = 0$$

$$\Rightarrow d = -21 \wedge c = 3.$$

Luego, asistieron a la clase del Prof. Teodoro 7 alumnos.

$\therefore$ Puede formar la comisión de 3 alumnos de $\binom{7}{3}$ maneras = 35 maneras.

Rpta.: A

3. Juan Carlos interviene en un juego de azar, el cual paga el doble de lo que apuesta al ganador, arriesgándose sucesivamente en apostar S/ 1, S/ 2, S/ 3, S/ 4, ..., con tal suerte que gana los tiros en que interviene excepto el último, retirándose entonces con una ganancia de n soles, donde n es la suma de los coeficientes del máximo común divisor de los polinomios $p(x) = 7x^4 + 24x^3 - 57x^2 - 202x - 96$ y $q(x) = 7x^4 + 10x^3 - 63x^2 + 14x + 32$ en . ¿Cuántos tiros ganó Juan Carlos?

A) 10

B) 11

C) 13

D) 12

Solución:

Factorizando:

$$1). p(x) = 7x^4 + 24x^3 - 57x^2 - 202x - 96$$

$$\Rightarrow p(x) = (x + 2)(x - 3)(7x^2 + 31x + 16)$$

$$2). q(x) = 7x^4 + 10x^3 - 63x^2 + 14x + 32$$

$$\Rightarrow q(x) = (x - 1)(x - 2)(7x^2 + 31x + 16).$$

Luego, tenemos : $d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x)] = 7x^2 + 31x + 16$

$$\Rightarrow n = d(1) = 7 + 31 + 16 = 54.$$

Sea x el número de tiros en que interviene, por lo tanto habrá apostado :

$$1 + 2 + 3 + \dots + x = \frac{x(x+1)}{2}$$

Como ganó $(x - 1)$ juegos :

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2(x - 1) = x(x - 1)$$

$$\text{Luego, por dato : } x(x - 1) - \frac{x(x+1)}{2} = 54$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 108 = 0 \Rightarrow x = 12 \vee x = -9.$$

$\therefore$ Juan Carlos ganó $(12 - 1)$ tiros = 11 tiros.

Rpta.: B

4. Sabiendo que $m(x,z) = \text{MCM}[p(x,z), q(x,z)]$ de los siguientes polinomios

$$p(x,z) = 5x^4z - 18x^2z^2 - 9x^2z - 8z^3 - 30z^2 - 18z \quad \text{y}$$

$$q(x,z) = x^3 + x^2z - 4xz - 4z^2 - 3x - 3z$$

en $\mathbb{Z}[x,z]$, calcule la suma de coeficientes de $m(x,z)$.

A) -124

B) -250

C) -156

D) -198

Solución:

- 1). Factorizando $p(x,z)$ en $\mathbb{Z}[x,z]$ por factor común y aspa doble :

$$p(x,z) = 5x^4z - 18x^2z^2 - 9x^2z - 8z^3 - 30z^2 - 18z$$

$$\Rightarrow p(x,z) = z(5x^4 - 18x^2z - 9x^2 - 8z^2 - 30z - 18)$$

$$\Rightarrow p(x,z) = z(5x^4 - 18x^2z - 8z^2 - 9x^2 - 30z - 18)$$

$$\Rightarrow p(x,z) = z(5x^2 + 2z + 6)(x^2 - 4z - 3)$$

- 2). Factorizando $q(x,z)$ en $\mathbb{Z}[x,z]$

$$q(x,z) = x^3 + x^2z - 4xz - 4z^2 - 3x - 3z$$

$$\Rightarrow q(x,z) = (x^3 - 4xz - 3x) + (x^2z - 4z^2 - 3z)$$

$$\Rightarrow q(x,z) = x(x^2 - 4z - 3) + z(x^2 - 4z - 3)$$

$$\Rightarrow q(x,z) = (x^2 - 4z - 3)(x + z)$$

- 3). Calculando :

$$m(x,z) = \text{MCM}[p(x,z), q(x,z)] = (x^2 - 4z - 3)z(5x^2 + 2z + 6)(x + z)$$

$$\Rightarrow m(1,1) = (1 - 4 - 3)(1)(5 + 2 + 6)(1 + 1) = (-6)(13)(2) = -156$$

$$\therefore m(1,1) = -156.$$

Rpta.: C

5. Sean los polinomios $p(x) = x^9 + 1$ y $q(x) = x^5 + x - 1$. Halle el número de factores algebraicos del $\text{MCM}[p(x), q(x)]$ en $\mathbb{Z}[x]$.

A) 14

B) 8

C) 15

D) 7

Solución:

Factorizando en $\mathbb{Z}[x]$:

1). $p(x) = x^9 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^6 - x^3 + 1)$

2). $q(x) = x^5 + x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$

$$\Rightarrow \text{MCM}[p(x), q(x)] = (x^2 - x + 1)(x + 1)(x^6 - x^3 + 1)(x^3 + x^2 - 1)$$

$\therefore$ El número de factores algebraicos, es :

$$(2)(2)(2)(2) - 1 = 15.$$

Rpta.: C

6. Si los factores primos del mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios

$$p(x) = x(x^2 + 3x) - 10(x + 5) + 5(x^2 + 3x),$$

$$q(x) = (x - 2)^2 x + 3x^2 - 12x + 12 \text{ y } r(x) = 2x^2 + 16x + 30,$$

en $\quad$ representan respectivamente, en metros, el largo, ancho y altura de un paralelepípedo rectangular con $x > 2$. Halle el mayor perímetro que puede tomar una de las caras de dicho paralelepípedo rectangular.

A) $(4x + 8) \text{ m}$

B) $(4x + 6) \text{ m}$

C) $(4x + 16) \text{ m}$

D) $(8x + 32) \text{ m}$

Solución:

Factorizando en $\quad$:

$$1). p(x) = x(x^2 + 3x) - 10(x + 5) + 5(x^2 + 3x) = (x^2 + 3x)(x + 5) - 10(x + 5)$$

$$\Rightarrow p(x) = (x + 5)(x^2 + 3x - 10) = (x + 5)[(x + 5)(x - 2)]$$

$$\Rightarrow p(x) = (x - 2)(x + 5)^2$$

$$2). q(x) = (x - 2)^2 x + 3x^2 - 12x + 12 = (x - 2)^2 x + 3(x^2 - 4x + 4)$$

$$\Rightarrow q(x) = (x - 2)^2 x + 3(x - 2)^2$$

$$\Rightarrow q(x) = (x - 2)^2 (x + 3)$$

$$\Rightarrow q(x) = (x - 2)^2 (x + 3)$$

$$3). r(x) = 2x^2 + 16x + 30 = 2(x^2 + 8x + 15) = 2(x + 5)(x + 3)$$

$$\Rightarrow D(x) = \text{MCM}[p(x), q(x), r(x)] = 2(x - 2)^2 (x + 5)^2 (x + 3)$$

Luego, los factores primos de $D(x)$ son: $x - 2$, $x + 5$ y $x + 3$.

$\therefore$ El mayor perímetro se obtiene de aquella cara de lados $x + 5$ y $x + 3$, cuyo perímetro, se obtiene de: $2[(x + 3) + (x + 5)] \text{ m} = (4x + 16) \text{ m}$.

Rpta.: C

7. La suma de coeficientes del $\text{MCD}[p(x), q(x)]$ representa la edad de Walter hace cuatro años donde $\frac{\text{MCM}[p(x), q(x)]}{\text{MCD}[p(x), q(x)]} = (x^2 + 4)^2 - 16x^2$, y además se cumple

$p(x)q(x) = (x^6 - 64)^2$. Si el año actual es 2020, ¿Cuál será la edad de Walter el 2024?

A) 31 años

B) 26 años

C) 33 años

D) 29 años

Solución:

- Factorizando :

$$1). (x^2 + 4)^2 - 16x^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2.$$

$$2). (x^6 - 64)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)^2(x^2 + 2x + 4)^2.$$

$$\bullet \text{ Como : } \frac{\text{MCM}[p(x), q(x)]}{\text{MCD}[p(x), q(x)]} = (x - 2)^2(x + 2)^2$$

$$\Rightarrow \text{MCM}[p(x), q(x)] = (x - 2)^2(x + 2)^2 \text{MCD}[p(x), q(x)]$$

- Se sabe que :

$$\text{MCD}[p(x), q(x)] \text{MCM}[p(x), q(x)] = p(x) \cdot q(x)$$

$$\Rightarrow \{ \text{MCD}[p(x), q(x)] \}^2 \cancel{(x-2)^2} \cancel{(x+2)^2} = \cancel{(x-2)^2} \cancel{(x+2)^2} (x^2 - 2x + 4)^2 (x^2 + 2x + 4)^2$$

$$\Rightarrow \{ \text{MCD}[p(x), q(x)] \}^2 = (x^2 - 2x + 4)^2 (x^2 + 2x + 4)^2$$

$$\Rightarrow d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x)] = (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$$

Si $x = 1$ entonces la edad de Luis, es : $(1 - 2 + 4)(1 + 2 + 4)$ años = 21 años.

$\Rightarrow$ Walter en el 2020 tiene $(21 + 4)$ años = 25 años.

$\therefore$ En el 2024, Walter tendrá 29 años.

Rpta.: D

8. Luisa festejará a la hora del recreo el cumpleaños de su hija en el aula del colegio donde ella estudia. Luisa necesita llevar la torta, bocaditos y, sobre todo, debe trasladar $p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 20x + 12$ botellas de chicha morada y $q(x) = 2x^3 - 8x - 3x^2 - 3$ botellas de limonada, y para el traslado se utilizarán cajas del mismo tamaño y forma, donde cada caja tendrá la misma cantidad de botellas. Si cada caja se llena con la mayor cantidad de botellas de la misma bebida, ¿cuántas cajas en total necesitará Luisa de tal manera que no falte ni sobren botellas? ($x \in \mathbb{Z}$ tal que $x > 3$)

A) $x^2 + x - 3$

B) $x^2 - x - 3$

C) $x^2 + x + 5$

D) $x^2 - x + 3$

Solución:

Factorizando en :

$$1). p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 20x + 12 = (2x + 1)(x - 3)(x - 2)(x + 2)$$

$$2). q(x) = 2x^3 - 8x - 3x^2 - 3 = (x + 1)(2x + 1)(x - 3)$$

$$\Rightarrow d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x), r(x)] = x^2 + 3x + 1$$

Luego, por dato debemos considerar :

$$\text{Número botellas por caja : } d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x)] = (2x + 1)(x - 3)$$

Entonces :

- El número de cajas para chicha morada se obtiene de :

$$\frac{p(x)}{d(x)} = \frac{\cancel{(2x+1)} \cancel{(x-3)} (x-2)(x+2)}{\cancel{(2x+1)} \cancel{(x-3)}} = (x-2)(x+2) = x^2 - 4$$

- El número de cajas para limonada se obtiene de :

$$\frac{q(x)}{d(x)} = \frac{(x+1) \cancel{(2x+1)} \cancel{(x-3)}}{\cancel{(2x+1)} \cancel{(x-3)}} = x+1$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4) + (x + 1) = x^2 + x - 3$$

∴ El número total de cajas, es : $x^2 + x - 3$.

Rpta.: A

Álgebra

Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común

EJERCICIOS

1. Sea $d(x) = ax^2 + bx + c$ el máximo común divisor de los polinomios $p(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$ y $q(x) = x^4 - 10x^2 - 20x - 16$, en $\mathbb{R}[x]$. Indique la suma de los factores primos del polinomio $t(x) = ax^4 - cx^2 - b^3$, al factorizarlo en $\mathbb{R}[x]$.

- A) $x^2 + 2x$ B) $x^2 + 2$ C) $x^2 + 2x + 2$ D) $x^2 - x + 2$

Solución:

1. Factorizando $p(x)$ y $q(x)$

$$q(x) = x^4 - 10x^2 - 20x - 16 = (x - 4)(x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

$$p(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6 = (x - 3)(x^2 + 2x + 2)$$

2. Luego $d(x) = (x^2 + 2x + 2) = (ax^2 + bx + c)$
por dato

$$\Rightarrow a = 1, b = 2, c = 2$$

3. Así $t(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

$$\Rightarrow t(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 2) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 2)$$

$\Rightarrow$ observamos que $t(x)$ tiene 3 factores primos en $\mathbb{R}[x]$.

4. Suma de sus factores primos de $t(x)$: $x - 2 + x + 2 + x^2 + 2 = x^2 + 2x + 2$.

Rpta.: C

2. Con el fin de distribuir sus cuyes por raza y color, Carlos dividirá su terreno de forma rectangular en parcelas cuadradas (todas de la misma dimensión) de modo que éstas tengan la máxima superficie posible y no se desperdicie espacio alguno. Si las dimensiones, en metros, de dicho terreno están dadas por $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ y $q(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 16$, con $x \in \mathbb{Z}$ y $3 < x < 10$, indique el polinomio que represente el área de dichas parcelas.

- A) $(x^2 + 2)^2 \text{ m}^2$ B) $2(x^2 - 2) \text{ m}^2$ C) $(x^2 - 4) \text{ m}^2$ D) $(x^2 - 4)^2 \text{ m}^2$

Solución:

1. Factorizando

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x + 2)(x - 2)^2$$

$$q(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = (x + 2)^3(x - 2)$$

2. $\text{MCD}[p(x), q(x)] = (x + 2)(x - 2) = (x^2 - 4)m$ es el lado de la parcela3. Área máxima posible de las parcelas cuadradas: $(x^2 - 4)^2 \text{ m}^2$ **Rpta.: D**

3. Los factores primos del máximo común divisor de los polinomios $p(x) = (x - 3)(x^2 + 2x - 1)^4(x^2 - 2x - 1)$ y $q(x) = (x^3 - x^2 + 3)(x - 3) + 21x - 7x^2$ en $\mathbb{R}[x]$, representan las medidas en centímetros, de las dimensiones de un paralelepípedo cuando hacemos $x=4$. ¿Cuál es la medida del radio de la mayor esfera que se puede colocar al interior del paralelepípedo?

A) $\frac{1}{2} \text{ cm}$

B) $\frac{1}{4} \text{ cm}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$

D) $\frac{5 - \sqrt{2}}{2} \text{ cm}$

Solución:

1. Factorizando los polinomios :

$$p(x) = (x - 3)(x^2 + 2x - 1)^4(x^2 - 2x - 1)$$

$$= (x - 3)(x + 1 - \sqrt{2})^4(x + 1 + \sqrt{2})^4(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$$

$$q(x) = (x^3 - x^2 + 3)(x - 3) + 21x - 7x^2$$

$$= (x^3 - x^2 + 3)(x - 3) - 7x(x - 3)$$

$$= (x - 3)(x^3 - x^2 - 7x + 3) = (x - 3)^2(x^2 + 2x - 1)$$

$$= (x - 3)^2(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$$

2. Así $\text{MCD}[p(x), q(x)] = (x - 3)(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$ $\Rightarrow$ para $x = 4$, las dimensiones del paralelepípedo son: 1 , $5 - \sqrt{2}$ y $5 + \sqrt{2}$.

3. Como la esfera debe estar al interior del paralelepípedo, el diámetro no debe

superar al menor de los lados, por tanto el radio es $\frac{1}{2} \text{ cm}$.**Rpta.: A**

4. Benjamín tiene cierto número de panetones en su puesto del mercado. Se sabe que por dicha cantidad de panetones el pagó un monto de $Q(x) = x^4 - 7x^2 - 6x$ soles. Benjamín encargo la venta de los panetones a su abuelito, éste vendió unos cuantos panetones obteniendo $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ soles y cobrando por cada panetón el mismo precio que le había costado a su nieto. Si el precio de estos panetones fue el mayor posible, halle cuántos panetones le queda aún a Benjamín.

- A) $x^2 - 4$ B) $3x^2 + 1$ C) $x^2 + 4$ D) $2x + 5$

Solución:

- $Q(x) = (\text{Número de panetones que compró})(\text{precio de costo de cada panetón})$
 $P(x) = (\text{Número de panetones que vendió})(\text{precio de venta de cada panetón})$
 por dato : precio de costo de cada panetón = precio de venta de cada panetón
- Factorizamos
 $Q(x) = x^4 - 7x^2 - 6x = (x-3)(x+1)(x+2)x$
 $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = (x-3)(x+4)(x+2)$
- Por dato el precio de cada panetón debe ser el mayor posible, entonces
 precio de costo de cada panetón = precio de venta de cada panetón
 $= \text{MCD}[Q(x), P(x)] = (x-3)(x+2)$
- Por tanto el número de panetones que le queda a Benjamín es igual a
 $(\text{Número de panetones que compró}) - (\text{Número de panetones que vendió}) =$
 $= x(x+1) - (x+4)$
 $= x^2 + x - (x+4) = x^2 - 4.$

Rpta.: A

5. Dados los polinomios $p(x) = (x^3 - 1)^2(x - 2)$ y $q(x) = (x^3 - 5x^2 + 6x)^2$, con respecto al $\text{MCM}[p(x), q(x)]$ en $\mathbb{R}[x]$, indique todas las proposiciones que son verdaderas :
- Tiene un factor primo cuadrático.
 - El mayor termino independiente de sus factores primos lineales es cero.
 - La suma de sus factores primos lineales es $2(2x-3)$.
 - El resto de dividir el $\text{MCM}[p(x), q(x)]$ por $(x+1)$ es 576.

- A) Solo iv B) i) y iii) C) Todas D) i) y iv)

Solución:

Factorizando los polinomios $p(x)$ y $q(x)$:

$$p(x) = (x^3 - 1)^2(x - 2) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2(x - 2)$$

$$q(x) = (x^3 - 5x^2 + 6x)^2 = (x^2 - 5x + 6)^2 x^2 = (x - 2)^2(x - 3)^2 x^2$$

$$\Rightarrow \text{MCM}[p(x), q(x)] = (x - 2)^2(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2(x - 3)^2 x^2$$

Se observa que el $\text{MCM}[p(x), q(x)]$ en $\mathbb{R}[x]$, tiene 5 factores primos, de los cuales hay uno es cuadrático: $x^2 + x + 1$, y cuatro son lineales: $x-2$, $x-1$, $x-3$, x .

Así, la suma de sus factores primos lineales es $2(2x-3)$ y el factor primo lineal con mayor termino independiente es x .

Por el teorema del resto, si $m(x) = \text{MCM}[p(x), q(x)]$ entonces $m(-1) = 576$.

Luego todas las proposiciones son verdaderas.

Rpta.: C

6. Hoy Juan, Julio y Carmen, fueron a visitar a su hermano Rogger, quien estuvo muy contento por la visita. El desea que sus hermanos lo visiten con más frecuencia, aunque sabe que por motivos de trabajo no lo pueden hacer seguido. Se sabe que Juan lo visita cada $p(x) = (x-5)(x-6)(x-7) + (x-5)(x-6) - (x-5)$ días, Carmen cada $r(x) = (x-5)(x-7)$ días y Julio cada $q(x) = x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 82x + 35$ días. Si Rogger se da cuenta que su hermana lo visita cada 3 días, ¿dentro de cuántos días volverá a tener la visita de sus tres hermanos juntos?

- A) 414 B) 413 C) 147 D) 441

Solución:

Factorizando

1. $p(x) = (x-5)(x-6)(x-7) + (x-5)(x-6) - (x-5) = (x-5)^2(x-7)$
2. $q(x) = x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 82x + 35 = (x-5)(x-7)(x-1)^2$
3. $r(x) = (x-5)(x-7)$
4. Luego volveran a visitar a Rogger en $\text{MCM}[p(x), q(x), r(x)] = (x-5)^2(x-7)(x-1)^2$ días
5. Por dato $(x-5)(x-7) = 3 \Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$
 $\Rightarrow x = 8 \vee x = 4$ (no puede ser, pues $p(x)$ sería negativo)
6. Así $x = 8 \Rightarrow \text{MCM}[p(8), q(8), r(8)] = (8-5)^2(8-7)(8-1)^2 = 9(1)(49) = 441$ días
7. En 441 días, Rogger recibirá la visita de sus hermanos juntos otra vez.

Rpta.: D

7. Con respecto a los polinomios $p(x) = x^4 + 4x^3 + (n-4)x^2 - 5x - n + 6$ y $q(x) = x^4 + 5x^3 + (n-3)x^2 - 13x + 10 - n$, se sabe que el $\text{MCD}[p(x), q(x)]$ en $\mathbb{Q}[x]$ es un polinomio de segundo grado. Sabiendo que Sofía es mayor en n años que Susana, y la suma de las edades de ellas es 68 años, ¿cuál es la edad de Sofía?

- A) 32 B) 34 C) 36 D) 38

Solución:

Sea $d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x)]$ el polinomio de segundo grado, entonces $d(x)$ también divide a $q(x) - p(x)$, entonces:

$$\begin{aligned}\Rightarrow q(x) - p(x) &= x^3 + x^2 - 8x + 4 \\ &= (x - 2)(x^2 + 3x - 2)\end{aligned}$$

observamos que hay 2 factores primos en $\mathbb{Q}[x]$

y como por dato $d(x)$ es de 2do grado

$$\Rightarrow d(x) = x^2 + 3x - 2$$

Efectuando la división de $p(x)$ o $q(x)$ entre $d(x)$, usando el método de Horner, resulta $n = 4$.

Entonces si Susana tiene m años, Sofía tiene $m+4$ años, por dato $m + (m+4) = 68$, así $m = 32$, por lo tanto Sofía tiene 36 años.

Rpta.: C

8. Dados los polinomios $p(x) = x^2 + mx - 6$, $q(x) = x^2 + nx + 12$, $d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x)]$ y $\text{MCM}[p(x), q(x)] = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$, en $\mathbb{Z}[x]$. Se tiene que $d(20)$ representa la cantidad total (en decenas de soles) que Petra lleva consigo para comprar fruta, reservando de éste monto 10 soles para sus pasajes. Como es una comerciante minorista en la venta de frutas, ella comprará $p(5)$ kilogramos de fresa, cuyo precio por kilogramo es $\frac{q(1)}{10}$ soles, y con el resto del dinero que aún le queda, comprará la máxima cantidad de kilogramos de palta que le alcance. Si cada kilogramo de palta cuesta $\frac{n-m}{2}$ soles. ¿Cuántos kilogramos de palta pudo comprar Petra?

- A) 57 B) 62 C) 53 D) 45

Solución:

- Como $p(x)$ y $q(x)$ dividen al $\text{MCM}[p(x), q(x)] = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$, efectuando las divisiones por el método de Horner, encontramos que $m=1$ y $n=7$.
- Así $p(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ y $q(x) = x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$ luego compró $p(5) = 24$ kg de fresa a $\frac{q(1)}{10} = \frac{20}{10} = 2$ soles por kg.
- En fresas gastó $24(2) = 48$ soles, si agregamos los 10 soles de pasajes, hasta allí sus gastos fueron de 58 soles.
- Como el $d(x) = x+3$, entonces $d(20) = 23$. Así, Petra tenía al principio 230 soles.

5. Para comprar las paltas le queda: $230 - 58 = 172$ soles, y como el kilogramo cuesta $\frac{n-m}{2} = 3$ soles, luego le alcanzará para 57 kilogramos de palta.

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Con respecto al máximo común divisor en $\mathbb{Z}[x]$, de los polinomios $p(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 17x - 10$ y $q(x) = x^5 + 12x^4 + 46x^3 + 60x^2 + 25x$, se puede afirmar que:
- A) la suma de sus factores primos es $2x-5$.
 - B) tiene un factor primo cuadrático.
 - C) el factor primo con menor término independiente evaluado en -2 , es 1.
 - D) la suma de sus coeficientes es 24.

Solución:

1. Factorizando

$$p(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 17x - 10 = (x+1)^2(x+5)(x-2)$$

$$q(x) = x^5 + 12x^4 + 46x^3 + 60x^2 + 25x = (x+5)^2(x+1)^2x$$

2. $\text{MCD}[p(x), q(x)] = (x+5)(x+1)^2$

3. Se observa que en el $\text{MCD}[p(x), q(x)]$, hay 2 factores primos lineales en $\mathbb{Z}[x]$

No hay factores primos cuadráticos.

La suma de los factores primos es $2x+6$ y el factor primo con menor término independiente es $s(x) = x+1$, por tanto $s(-2) = -1$.

4. La suma de coeficientes del MCD es $(1+5)(1+1)^2 = 24$.

Rpta.: D

2. Mi abuelo tiene un terreno de forma rectangular, cuyas dimensiones, en metros, están representadas por los polinomios :

$$p(x) = x^3 - 19x - 30 \text{ y } q(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30, \text{ con } x \in \mathbb{Z} \text{ y } 5 < x < 10.$$

Él desea dividir este terreno en parcelas de forma cuadrada, todas de igual dimensión, para luego alquilarlas. Indique el polinomio que represente a la cantidad de parcelas obtenidas, si éstas son de área máxima.

A) $x^4 - 36$

B) $x^4 + 13x^2 + 36$

C) $x^4 - 13x^2 + 36$

D) $x^4 - 10x^2 + 20$

Solución:

1. Factorizando los polinomios :

$$p(x) = x^3 - 19x - 30 = (x - 5)(x + 2)(x + 3)$$

$$q(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = (x - 5)(x - 2)(x - 3)$$

2. El lado de la parcela cuadrada, tendrá que ser el mayor divisor común de los lados del terreno.

3. Así el lado está dado por el MCD $[p(x), q(x)] = x - 5$

$$\begin{aligned} \text{4. Número de parcelas} &= \frac{\text{área del terreno}}{\text{área de la parcela}} \\ &= \frac{(x - 5)^2(x^2 - 4)(x^2 - 9)}{(x - 5)^2} = (x^2 - 4)(x^2 - 9) \\ &= x^4 - 13x^2 + 36 \end{aligned}$$

Rpta.: C

3. Jesús tiene una fuerte faringitis y por indicaciones del médico compró un jarabe al precio de $(-m + 15)$ soles y 15 pastillas de cierto antibiótico por el precio de n soles. Si $x^2 - 5x + 6$ es el máximo común divisor en $\mathbb{Z}[x]$, de los polinomios $p(x) = x^4 + mx - 9x^2 + n$ y $q(x)$, ¿cuál fue el gasto total de Jesús en la compra de la receta médica?

A) S/ 95

B) S/ 110

C) S/ 85

D) S/ 105

Solución:

1. Como $x^2 - 5x + 6$ divide a $p(x) = x^4 + mx - 9x^2 + n$, utilizando el método de Horner para la división de los polinomios, obtendremos que $m = -20$ y $n = 60$.
2. El precio del jarabe $= -m + 15 = 35$ soles y el precio de las 15 pastillas $= n = 60$.
3. Gastó en la receta : $35 + 60 = 95$ soles.

Rpta.: A

4. En una bodega hay tres toneles de vino que tienen $\left(x^2(x^2 + 2y^2) + (y^2 + z^2)(y + z)(y - z)\right)$, $\left((x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2z^2) + z^4\right)$ y $\left((x^2 + z^2)^2 - y^4\right)$ litros de capacidad. Se desea trasladar todo el vino para su venta, en botellas de igual medida y modelo. ¿Cuál es la menor cantidad de botellas que se empleará en dicho traslado sin que se desperdicie el vino?

A) $x^2 + y^2 - z^2$

B) $(x^2 - z^2)^2$

C) $2x^2 + 3y^2 - 4z^2$

D) $3x^2 + y^2 + z^2$

Solución:

$$\begin{aligned}
 1. \quad x^2(x^2+2y^2)+(y^2+z^2)(y+z)(y-z) &= \underbrace{x^4+2x^2y^2+y^4}_{(x^2+y^2)^2} - z^4 \\
 &= (x^2+y^2)^2 - (z^2)^2 \\
 &= (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2-z^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad (x^2+y^2)(x^2+y^2+2z^2)+z^4 &= x^4+x^2y^2+2x^2z^2+x^2y^2+y^4+2y^2z^2+z^4 \\
 &= x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2 \\
 &= (x^2+y^2+z^2)^2
 \end{aligned}$$

$$3. (x^2+z^2)^2 - y^4 = (x^2+z^2+y^2)(x^2+z^2-y^2)$$

$$\Rightarrow \text{MCD} = x^2+y^2+z^2 \dots\dots (\text{cantidad de vino en cada botella})$$

$\therefore$ el número de botellas necesarias será:

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2-z^2)}{x^2+y^2+z^2} + \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{(x^2+z^2+y^2)(x^2+z^2-y^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= x^2+y^2-z^2+x^2+y^2+z^2+x^2+z^2-y^2 = 3x^2+y^2+z^2$$

Rpta.: D

5. A una reunión de promoción del Colegio Nacional Túpac Amaru asistieron en total $(2m+3n+30)$ alumnos. Después de 2 horas se retiraron $(3m-4n+18)$ alumnos. Dados los polinomios $p(x)=x^4+7x^3+20x^2+30x+12$, $r(x)=x^3+3x^2+6x$ y $q(x)=2x^4+11x^3+24x^2+21x-18$ ¿Cuántos alumnos se quedaron en la reunión, sabiendo que m es el producto de los coeficientes del $\text{MCD}[p(x),q(x)]$ en $\mathbb{Z}[x]$ y n es igual al 10% de la suma de los coeficientes del $\text{MCM}[p(x),r(x)]$ en $\mathbb{Z}[x]$?

- A) 44 B) 43 C) 53 D) 34

Solución:

1. $p(x) = x^4 + 7x^3 + 20x^2 + 30x + 12 = (x^2 + 3x + 6)(x^2 + 4x + 2)$
2. $q(x) = 2x^4 + 11x^3 + 24x^2 + 21x - 18 = (2x^2 + 5x - 3)(x^2 + 3x + 6)$
3. $r(x) = x^3 + 3x^2 + 6x = x(x^2 + 3x + 6)$
4. $\text{MCD}[p(x), q(x)] = x^2 + 3x + 6 \Rightarrow \text{producto de coef.} = 1 \cdot 3 \cdot 6 = 18$
5. $\text{MCM}[p(x), r(x)] = (x^2 + 3x + 6)(x^2 + 4x + 2)x \Rightarrow \text{suma de coef.} = 10 \cdot 7 \cdot 1 = 70$
6. Así $m = 18$ y $n = 10\%70 = 7$
7. total de alumnos que asistieron a la reunión : 87
8. total de alumnos que se retiraron a la reunión : 44
9. Se quedaron en la reunión: $87 - 44 = 43$ alumnos.

Rpta.: B

6. Dados los polinomios con coeficientes enteros $p(x) = ax^2 + x + b$ y $q(x) = ax^2 - 11x - b$, donde $b < 0 < a$. Considerando el $\text{MCM}[p(x), q(x)] = 3x^3 - 5x^2 - 12x + 20$ y el $\text{MCD}[p(x), q(x)]$, ambos en $\mathbb{Q}[x]$, calcule el polinomio mónico de segundo grado cuyas raíces son a y b .

- A) $x^2 - 7x - 30$ B) $x^2 - 7x + 30$
 C) $x^2 - 4x - 28$ D) $x^2 + 7x - 30$

Solución:

1. $\text{MCM}[p(x), q(x)] = 3x^3 - 5x^2 - 12x + 20 = (x + 2)(3x - 5)(x - 2)$
2. Recordemos que : $\text{MCD}[p(x), q(x)] \cdot \underbrace{\text{MCM}[p(x), q(x)]}_{\text{tiene grado 3}} = \underbrace{p(x) \cdot q(x)}_{\text{tiene grado 4}}$
3. Entonces $\text{MCD}[p(x), q(x)]$ debe ser de 1er grado.
4. Como el $\text{MCD}[p(x), q(x)]$ divide a $[p(x) - q(x)] \Rightarrow p(x) - q(x) = 12(x + \frac{b}{6})$
5. Como b es un entero negativo $\Rightarrow \underbrace{x + \frac{b}{6}}_{b=-12} = x - 2$ o $\underbrace{x + \frac{b}{6}}_{b=-10} = x - \frac{5}{3}$
6. Si $b = -12$, $p(x) = ax^2 + x - 12$ y $q(x) = ax^2 - 11x + 12$ tienen como factor a $(x - 2)$, luego $a = \frac{5}{2}$ (lo cual es contradictorio pues $a \in \mathbb{Z}$).

7. A si $b = -10$, $p(x) = ax^2 + x - 10$ y $q(x) = ax^2 - 11x + 10$ tienen como factor

a $(x - \frac{5}{3})$, luego $a = 3$ (lo cual esta bien, pues $a \in \mathbb{Z}$).

8. Luego el polinomio mónico de segundo grado cuyas raíces son a y b : $x^2 + 7x - 30$.

Rpta.: D

7. Al simplificar la expresión $\frac{1}{3x-6} - \frac{\frac{1}{3}x^2 + x - 6}{8-2x^2} - \frac{1}{x+2}$ se obtiene $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ tienen coeficientes enteros y $\text{MCD}[p(x), q(x)] = 1$, calcule $p(x) + q(x)$.

A) $7x + 13$

B) $2x + 13$

C) $7x + 3$

D) $2x + 3$

Solución:

1. Hallaremos el MCM de los denominadores en:

$$\frac{1}{3x-6} - \frac{\frac{1}{3}x^2 + x - 6}{8-2x^2} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3x-6} + \frac{\frac{1}{3}x^2 + x - 6}{2x^2 - 8} - \frac{1}{x+2}$$

2. $\text{MCM}(\underbrace{3x-6}_{3(x-2)}, \underbrace{2x^2-8}_{2(x-2)(x+2)}, x+2) = 3 \cdot 2 \cdot (x-2)(x+2)$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Luego } \frac{1}{3x-6} + \frac{\frac{1}{3}x^2 + x - 6}{2x^2 - 8} - \frac{1}{x+2} &= \frac{2x + 4 + x^2 + 3x - 18 - (6x - 12)}{3 \cdot 2 \cdot (x-2)(x+2)} \\ &= \frac{x^2 - x - 2}{3 \cdot 2 \cdot (x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)(x+1)}{3 \cdot 2 \cdot (x-2)(x+2)} \\ &= \frac{x+1}{6(x+2)} = \frac{p(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

4. Por lo tanto $p(x) + q(x) = x + 1 + 6x + 12 = 7x + 13$.

Rpta.: A

8. Dados los polinomios con coeficientes reales

$$s(x) = x^4 + ax^3 - 7a^2x^2 - a^3x + 6a^4, \quad t(x) = x^3 + 6ax^2 + 11a^2x + 6a^3.$$

Si $m(x) = \text{MCD}[s(x), t(x)]$ y $p(x) = \frac{s(x)t(x)}{m(x)}$, halle el resto de dividir $p(x)$ por $x - a$.

A) $8a$

B) $6a^2$

C) $8a^2$

D) $4a$

Solución:

1. Por el método de divisores factorizamos $s(x)$ y $t(x)$:

$$\Rightarrow s(x) = x^4 + ax^3 - 7a^2x^2 - a^3x + 6a^4 = (x-a)(x+a)(x-2a)(x+3a) \text{ y}$$

$$t(x) = x^3 + 6ax^2 + 11a^2x + 6a^3 = (x+a)(x+2a)(x+3a)$$

2. $\text{MCD}[s(x), t(x)] = (x+a)(x+3a)$

3. Por dato $p(x) = \frac{s(x)t(x)}{m(x)}$

$$= \frac{\text{MCD}[s(x), t(x)]m(x)}{m(x)}$$

$$\Rightarrow p(x) = \text{MCD}[s(x), t(x)] = (x+a)(x+3a)$$

4. Por lo tanto el resto de dividir $p(x)$ por $(x-a)$ es $p(a) = (2a)(4a) = 8a^2$.

Rpta.: C

Álgebra

Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (MCM) de dos o más polinomios

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios no nulos.

DEFINICIÓN

Decimos que el polinomio $d(x)$ es el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ si se cumple las dos condiciones siguientes:

- I) $d(x)$ divide a $p(x)$ y $d(x)$ divide a $q(x)$; es decir, $d(x)$ es divisor común de $p(x)$ y $q(x)$.
- II) Si $D(x)$ divide a $p(x)$ y $D(x)$ divide a $q(x)$, entonces, $D(x)$ divide a $d(x)$.

En este caso denotamos

$$d(x) = \text{MCD} [p(x), q(x)]$$

OBSERVACIÓN

$d(x) = \text{MCD} [p(x), q(x)]$ es mónico, existe y es único en $K[x]$, donde $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

DEFINICIÓN

Decimos que el polinomio $m(x)$ es el mínimo común múltiplo de $p(x)$ y $q(x)$ si se cumple las dos condiciones siguientes:

- I) $p(x)$ divide a $m(x)$ y $q(x)$ divide a $m(x)$; es decir, $m(x)$ es múltiplo común de $p(x)$ y $q(x)$.
- II) Si $p(x)$ divide a $M(x)$ y $q(x)$ divide a $M(x)$, entonces, $m(x)$ divide a $M(x)$.

En este caso denotamos

$$m(x) = \text{MCM} [p(x), q(x)]$$

PASOS PARA HALLAR EL MCD Y EL MCM DE DOS O MÁS POLINOMIOS

1. Factorizamos los polinomios en sus factores primos en el conjunto $K[x]$ especificado.
2. Para el MCD, multiplicamos solo los factores primos comunes elevados a su menor exponente.
3. Para el MCM, multiplicamos los factores primos comunes y no comunes elevados a su mayor exponente.

Ejemplo: Dados los polinomios

$$p(x) = (x^2 - 16)^3 (x - 2) (x - 4)^5 (x + 7) \quad \text{y} \quad q(x) = (x^2 - 6x + 8)^2 (x + 4)^2 (x^2 + 7),$$

halle la suma de factores primos del $\text{MCD}[p(x), q(x)]$ en $\mathbb{Z}[x]$.

Solución:

$$i) p(x) = (x^2 - 16)^3 (x - 2) (x - 4)^5 (x + 7) = [(x+4)(x-4)]^3 (x-2)(x-4)^5 (x+7)$$

$$\rightarrow p(x) = (x+4)^3 (x-4)^8 (x-2)(x+7)$$

$$ii) q(x) = (x^2 - 6x + 8)^2 (x+4)^2 (x^2 + 7) = [(x-4)(x-2)]^2 (x+4)^2 (x^2 + 7)$$

$$\rightarrow q(x) = (x+4)^2 (x-4)^2 (x-2)^2 (x^2 + 7)$$

$$\rightarrow \text{MCD}[p(x), q(x)] = (x+4)^2 (x-4)^2 (x-2)$$

$\rightarrow$ Los factores primos del $\text{MCD}[p(x), q(x)]$ son : $(x+4)$, $(x-4)$ y $(x-2)$

$\therefore \sum \text{fact. Primos es} = 3x - 2.$

PROPIEDAD

$$\boxed{\text{MCD}[p(x), q(x)] \cdot \text{MCM}[p(x), q(x)] = p(x) \cdot q(x)}$$

EJERCICIOS

1. Simplifique la expresión: $F = \frac{7x}{3(x+y)} + \frac{2x-y}{x-y} - \frac{12x^2 - 4xy - 2y^2}{3(x^2 - y^2)}.$

A) 6 B) $\frac{1}{3}$ C) 7 D) $\frac{1}{x-y}$ E) $\frac{2y}{x+y}$

2. Sean los polinomios $p(x) = x^3 + ax^2 - x - 3$ y $q(x) = x^3 - (c+3)x^2 + x - a + 2$. Si $\text{MCD}[p(x), q(x)] = x - 1$ en $\mathbb{Z}[x]$, determine uno de los factores primos de $r(x) = x^4 + (a+c)x^2 + c$ en $\mathbb{Z}[x]$.

A) $x^2 + 1$ B) $x + 2$ C) $x^2 - 2$ D) $x + 1$ E) $x - 2$

3. Si se tiene que $\text{MCM}[p(x), q(x)] \cdot \text{MCD}[p(x), q(x)] = (x-3)(x^4 + x^2 + 1)$ en $\mathbb{Z}[x]$ para los polinomios $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ y $q(x)$, halle el valor numérico de $q(x)$ para $x = 3$.

A) 16 B) 13 C) 19 D) 23 E) 21

4. Si $d(x) = x^2 - 2x - 15$ es el máximo común divisor de los polinomios $p(x) = x^3 + 3x^2 - 25x - 75$ y $q(x) = x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15$, halle $m(-2)$ sabiendo que $m(x) = \text{MCM}[p(x), q(x)]$.
- A) 14 B) - 63 C) - 32 D) 18 E) - 49
5. Si el producto del MCM con el MCD de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ en $\mathbb{Z}[x]$ es $x^5 - x^3$ y la suma de ambos polinomios es $x^3 + x$, determine el $\text{MCM}[p(x), q(x)]$.
- A) $x^4 + x^2$ B) $x^4 - x^2$ C) $x^3 + x$ D) $x^3 - x$ E) $x^2 + 1$
6. En un zoológico la cantidad de gacelas, leones y monos están representados por las expresiones polinómicas $p(x, y) = x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3$, $q(x, y) = 3x^3 + 5x^2y + xy^2 - y^3$ y $r(x, y) = x^4 + xy^3 + x^3y + y^4$ respectivamente donde $\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^+$. Si a todos estos animales se les quiere trasladar a otro zoológico en jaulas con el mismo número de animales y donde quepan la mayor cantidad de animales de la misma especie, halle el polinomio que representa el número de jaulas usadas y de como respuesta la suma de sus coeficientes.
- A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9
7. Se tiene un rectángulo de lados $(x+y)^2$ m y $(x^2 - y^2)^2$ m además de un círculo de radio $(x^3 - y^3)$ m. Si $p(x, y)$ y $q(x, y)$ representan en metros cuadrados, las áreas del rectángulo y del círculo respectivamente, determine el número de factores primos del máximo común divisor de $\pi p(x, y) - q(x, y)$ y $p(x, y)$ en $\mathbb{Z}[x, y]$.
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
8. Sea $d(x)$ el máximo común divisor y $m(x)$ el mínimo común múltiplo de los polinomios $p(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$ y $q(x) = x^3 - 13x - 12$. Si $d(0)$ representa el precio en soles de un kilo de tunas, ¿cuántos cajones de tunas como máximo puede comprar Diego con $m(0)$ soles?, si cada cajón contiene 8 kilos de tunas.
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Simplifique la expresión $L = \frac{3}{2(x^2 + 2x - 3)} + \frac{3}{2(1 + 2x - 3x^2)} + \frac{x}{(3x^2 + 10x + 3)}$ con $x \in \mathbb{R} - \left\{ -3, -\frac{1}{3}, 1 \right\}$.
- A) $\frac{1}{3x+1}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{x-1}{x+2}$ E) $\frac{1}{(x-1)(x+3)}$
2. Si $(x+3)$ es el máximo común divisor de los polinomios $p(x) = x^3 + (n-3)x^2 + 7x + m$ y $q(x) = x^4 - 2(n+1)x^2 + m^4$ con $\{m, n\} \subset \mathbb{Z}^+$, halle el número de divisores de $\text{MCM}[p(x), q(x)]$ en $\mathbb{Q}[x]$.
- A) 26 B) 17 C) 7 D) 35 E) 14
3. Si $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ y $\text{MCM}[p(x), q(x)] \cdot \text{MCD}[p(x), q(x)] = x^3(x+1)^2(x+2)^4$ en $\mathbb{Z}[x]$, halle la suma de coeficientes de $q(x)$.
- A) 54 B) 50 C) 48 D) 40 E) 24
4. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios tales que: $p(x) \cdot q(x) = (x+2)(x+4)(x-1)^2(x-3)^2$ y $\frac{\text{MCM}[p(x), q(x)]}{\text{MCD}[p(x), q(x)]} = x^2 + 6x + 8$ en $\mathbb{Z}[x]$. Determine $(x-2)^2 - \text{MCD}[p(x), q(x)]$.
- A) $2x^2 - 3x$ B) $2x - 5$ C) 1 D) 6 E) $x^2 + 8$
5. Si $\text{MCD}[p(x), q(x)] = (x-2)(x-3)$ de los polinomios $p(x)$ y $q(x) = (x+2)(x^2 - 5x + 6)$ tales que $p(x) + q(x) = \frac{2x \cdot \text{MCM}[p(x), q(x)]}{x^2 - 4}$, halle el término independiente del $\text{MCM}[p(x), q(x)]$.
- A) 24 B) -24 C) 13 D) 12 E) -12

6. Si $d(x) = x^2 - x + 2$ es el máximo común divisor en $\mathbb{Z}[x]$ de los polinomios $p(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ y $q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ y $m(x) = \text{MCM}[p(x), q(x)]$ en $\mathbb{Z}[x]$, halle $m(b - a + c + d)$.
- A) -6 B) 0 C) 4 D) -10 E) 2
7. En la Escuela de estudios generales del área de Ingeniería de la UNMSM, en el aula A se han matriculado $\left(\frac{m}{4} - 2n\right)$ estudiantes mientras que en el aula B están matriculados $\left(\frac{m}{10} + n\right)$ estudiantes. Si m y n son respectivamente la suma de coeficientes del MCM y del MCD de los polinomios $p(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$ y $q(x) = x^4 - 3x^3 - 26x^2 + 48x + 160$ en $\mathbb{Z}[x]$, halle el número total de estudiantes matriculados en las 2 aulas mencionadas.
- A) 120 B) 100 C) 112 D) 111 E) 80
8. Por motivos de trabajo los hermanos Román y Genaro viajan a Huarochirí cada cierto tiempo. Román viaja cada $(2x^2 + 1 - x^2(1 - x^2))$ días, mientras que su hermano Genaro viaja cada $((x^2 + x - 3)(x^2 - 1 + x) - 8)$ días. Si el día 07 de agosto han coincidido en Huarochirí y el 28 del mismo mes se encuentran por segunda vez en dicha ciudad, ¿qué día del mes de julio, Román viajó a Huarochirí? ($x \in \mathbb{Z}^+$ y $x \neq 1$).
- A) 17 B) 20 C) 19 D) 21 E) 18

Álgebra

EJERCICIOS

1. Sea $m(x)$, el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ y $q(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$. Si $\frac{m(1)}{3}$ representa el número de dígitos que tiene la contraseña actual del correo personal de Gloria y por medidas de seguridad ha pensado en incrementar dos dígitos, halle el número de dígitos que tendrá la nueva contraseña de Gloria.

A) 5 B) 6 C) 10 D) 7 E) 9

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = (x^2 + 1)(x + 2) \\ q(x) = (x^2 + 1)(x + 3) \end{array} \right\} \rightarrow m(x) = (x^2 + 1)(x + 2)(x + 3)$$

$$\rightarrow \text{Número de dígitos de la contraseña actual: } \frac{m(1)}{3} = \frac{2(3)(4)}{3} = 8.$$

$\therefore$ La nueva contraseña tendrá 10 dígitos.

Rpta.: C

2. Sean $p(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 12$ y $q(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ dos polinomios, tales que $r(x) = p(x + 3)$, calcule la suma de los coeficientes del $\text{MCD}[r(x), q(x)]$, en $\mathbb{Q}[x]$.

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) 4

Solución:

$$\text{i) } p(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - 4) \rightarrow r(x) = p(x + 3) = (x + 4)(x + 2)x(x - 1)$$

$$q(x) = (x + 3)(x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

$$\text{ii) } \text{MCD}[r(x), q(x)] = (x + 2)(x - 1)$$

$\therefore$ Suma de coeficientes del MCD es 0.

Rpta.: D

3. Si $d(x) = x^2 - x - 1$ es el máximo común divisor de los polinomios $p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b$ y $q(x) = x^4 + (4a + b)x^3 - 2x^2 + mx + n$ en $\mathbb{Q}[x]$, halle el término independiente del $\text{MCM}[p(x), q(x)]$ en $\mathbb{Q}[x]$.

A) -2 B) -4 C) 2 D) 4 E) 1

Solución:

i) Utilizando el método de Horner en $p(x) \div d(x)$;

1	1	-4	4	a	b	
1		1	1			
1		-3	-3	-3		$\rightarrow a = 1, b = -2$
			2	2	2	
	1	-3	2	a-1	b+2	

$$p(x) = (x^2 - x - 1)(x - 1)(x - 2)$$

ii) Utilizando el método de Horner en $q(x) \div d(x)$;

1	1	2	-2	m	n	
1		1	1			
1		3	3	3		$\rightarrow m = -5, n = -2$
			2	2	2	
	1	3	2	m+5	n+2	

$$q(x) = (x^2 - x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

$$\text{iii) } \text{MCM}[p(x), q(x)] = (x^2 - x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$$

$\therefore$ El término independiente del MCM, es: $(-1)(1)(-1)(2)(-2) = -4$.

Rpta.: B

4. Si $d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x)]$ en $\mathbb{C}[x]$ representa el ingreso en miles de soles de una compañía por la producción y venta de x artículos en un mes, donde $p(x) = x^4 - 3x^2 - 10$ y $q(x) = x^4 - 4$, determine la utilidad de dicha compañía en el mes de agosto si se producen y venden 15 artículos y los costos totales fueron de 27000 soles.

A) S/ 200000 B) S/ 180000 C) S/ 150000 D) S/ 25000 E) S/ 100000

Solución:

i) Factorizando por aspa simple y diferencia de cuadrados

$$p(x) = (x^2 - 5)(x^2 + 2) = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

$$q(x) = (x^2 + 2)(x^2 - 2) = (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

$$\text{ii) } d(x) = (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) = x^2 + 2 \rightarrow d(15) = 227$$

$\rightarrow$ Ingreso: S/ 227000 , Costos: S/ 27000.

$\therefore$ Utilidad: S/ 200000.

Rpta.: A

5. Sean los polinomios $p(x) = (x - a)(x^2 - b^2)(x - c)$ y $q(x) = (x^2 - a^2)(x^2 + b)(x^2 - c^2)$ con a, b y c en $\mathbb{Z}^+$. Si $t(x) = \frac{\text{MCM}[p(x), q(x)]}{\text{MCD}[p(x), q(x)]}$, halle el valor de $t(0)$.

A) abc^2 B) $-ab^3$ C) $-ab^3c$ D) ab^3 E) $-ab^2c$

Solución:

$$\text{i) } p(x) = (x - a)(x - b)(x + b)(x - c)$$

$$q(x) = (x - a)(x + a)(x^2 + b)(x + c)(x - c)$$

$$\text{ii) } \text{MCD}[p(x), q(x)] = (x - a)(x - c)$$

$$\text{MCM}[p(x), q(x)] = (x - a)(x + a)(x - b)(x + b)(x - c)(x + c)(x^2 + b).$$

$$\text{iii) } t(x) = (x + a)(x - b)(x + b)(x + c)(x^2 + b)$$

$$\therefore t(0) = -ab^3c.$$

Rpta.: C

6. Si el mínimo común múltiplo de los polinomios $p(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ y $q(x)$ es $(x^4 - 29x^2 + 100)$ y su máximo común divisor es $(x + 2)$, halle $q(6)$.

A) 28 B) 8 C) 44 D) 14 E) 33

Solución:

$$i) p(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = x^2(x + 5) - 4(x + 5) = (x + 5)(x + 2)(x - 2)$$

$$\text{MCM}[p(x), q(x)] = (x^4 - 29x^2 + 100) = (x + 2)(x - 2)(x + 5)(x - 5)$$

$$\text{MCD}[p(x), q(x)] = x + 2.$$

$$ii) \text{ Por propiedad: } p(x) \cdot q(x) = \text{MCD}[p(x), q(x)] \cdot \text{MCM}[p(x), q(x)]$$

$$(x + 5)(x + 2)(x - 2)q(x) = (x + 2)(x + 2)(x - 2)(x + 5)(x - 5)$$

$$\rightarrow q(x) = (x + 2)(x - 5)$$

$$\therefore q(6) = (6 + 2)(6 - 5) = 8.$$

Rpta.: B

7. Las capacidades de dos autobuses interprovinciales que hacen la ruta Lima – Ica de la empresa de transportes CVW S.A.C. esta modelada por los siguientes polinomios $p(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$ y $q(x) = x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 14x + 20$. Si el 21 de enero del 2016 ambos buses iniciaron el recorrido pero estando próximos a llegar a Ica, se desbordó el río Mala provocando que ambos autobuses queden varados, y para continuar con el viaje la empresa contrató combis, de tal manera que cada combi lleve la máxima cantidad de pasajeros varados. Determine el polinomio que represente la cantidad de combis que contrató dicha empresa para que todos sus pasajeros llegaran a su destino (se entiende que el número de pasajeros de una combi es menor que el de un autobús).

A) $x^2 - 7x + 10$ B) $x^2 + x - 2$ C) $x^2 - 3x + 4$
D) $x^2 - 6x + 8$ E) $2x^2 - 6x + 8$

Solución:

$$i) p(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4 \rightarrow p(x) = (x^2 + 2)(x + 2)(x - 1)$$

$$q(x) = x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 14x + 20 \rightarrow q(x) = (x^2 + 2)(x - 5)(x - 2)$$

$$ii) \text{MCD}[p(x); q(x)] = x^2 + 2$$

$$iii) \text{ El número de combis que contrató es:}$$

$$(x + 2)(x - 1) + (x - 5)(x - 2) = 2x^2 - 6x + 8$$

Rpta.: E

8. Andrés por prescripción médica debe de tomar Ibuprofeno cada $p(x)$ horas, Amoxicilina cada $q(x)$ horas y Valisona durante $r(x)$ días, donde $p(x) = (x^2 + 1)^2 + 3x^2 + 5$ y $q(x) = \left[(x^2 + 1)^2 - 1 \right] + (x^2 + 2)$ y $r(x) = 2x + 6$; $x \in \mathbb{Z}^+$.

Si Andrés tomó los dos primeros medicamentos juntos el lunes a las 8 a. m. y volvió a tomar ambos medicamentos por segunda vez al día siguiente y a la misma hora, ¿durante cuántos días Andrés deberá tomar Valisona?

- A) 8 B) 12 C) 10 D) 6 E) 14

Solución:

$$\begin{aligned} \text{i) } p(x) &= (x^2 + 1)^2 + 3x^2 + 5 = (x^2 + 1)^2 + 3(x^2 + 1) + 2 \\ &= (x^2 + 2)(x^2 + 3) \quad (\text{por aspa simple}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } q(x) &= \left[(x^2 + 1)^2 - 1 \right] + (x^2 + 2) \\ \rightarrow q(x) &= x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2). \end{aligned}$$

Entonces el $\text{MCM} = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$ representa el número de horas en que vuelven a coincidir la toma de los dos primeros medicamentos, que por dato es después de 24 horas.

$$\text{Luego: } (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3) = 24 = 2(3)(4).$$

$$\text{Entonces } x^2 = 1 \rightarrow x = 1.$$

Por tanto, la Valisona lo toma durante: $r(x) = 2(1) + 6 = 8$ días.

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si el máximo común divisor de los polinomios $p(x) = x^4 - 9x^2 + mx + n$ y $q(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + ax + b$ en $\mathbb{Z}[x]$, es $d(x) = x^2 - 5x + 6$, halle la suma de los coeficientes del polinomio $h(x) = (m + 22)x^3 + (n - 48)x^2 + (a + 48)x - \frac{1}{4}b + 58$.

- A) -2 B) 20 C) 14 D) 19 E) 16

Solución:i) Utilizando el método de Horner en $p(x) \div d(x)$:

1	1	0	-9	m	n	
5	5	-6				
-6	5	25	-30			$\rightarrow m = -20, n = 60$
		<u>10</u>	50		-60	
	1	5	10	m+20	n-60	

ii) Utilizando el método de Horner en $q(x) \div d(x)$:

1	1	2	-7	a	b	
5	5	-6				
-6	7	35	-42			$\rightarrow a = -68, b = 132$
		<u>22</u>	110		-132	
	1	7	22	a+68	b-132	

iii) $h(x) = 2x^3 + 12x^2 - 20x + 25$
 $\therefore h(1) = 19.$

Rpta.: D

2. Si $m(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ es el mínimo común múltiplo de los polinomios $p(x) = x^2 - 4x + 3$ y $q(x) = x^2 + ax - 3$, halle el $\text{MCD}[p(x), q(x)]$.

A) $x+3$ B) $x+1$ C) $2x+1$ D) $2x-1$ E) $x-1$

Solución:

i) $p(x) = x^2 - 4x + 3 \rightarrow p(x) = (x-1)(x-3)$

$m(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 \rightarrow m(x) = (x-1)(x+3)(x-3)$

ii) Al efectuar la división de $m(x)$ entre $q(x)$, por el método de Horner, obtenemos que $a = 2$, entonces $q(x) = x^2 + 2x - 3 \rightarrow q(x) = (x-1)(x+3)$.

iii) Por propiedad: $m(x)\text{MCD}[p(x), q(x)] = p(x)q(x)$
 $\rightarrow (x-1)(x+3)(x-3)\text{MCD}[p(x), q(x)] = (x-1)(x-3)(x-1)(x+3)$
 $\therefore \text{MCD}[p(x), q(x)] = x-1.$

Rpta.: E

3. Sabiendo que $d(x, y) = \text{MCM}[p(x), q(x)]$ donde $p(x, y) = 5x^4 - 18x^2y - 9x^2 - 8y^2 - 30y - 18$ y $q(x, y) = x^3 + x^2y - 4xy - 4y^2 - 3x - 3y$, en $\mathbb{Z}[x, y]$, calcule $d(2, -1)$.

A) 5 B) 11 C) -3 D) 10 E) -4

Solución:

i) Factorizando por aspa doble:

$$p(x,y) = 5x^4 - 18x^2y - 8y^2 - 9y^2 - 30y - 18$$

$$p(x,y) = (5x^2 + 2y + 6)(x^2 - 4y - 3).$$

ii) Factorizando:

$$q(x,y) = x^3 - 4xy - 3x + x^2y - 4y^2 - 3y$$

$$q(x,y) = x(x^2 - 4y - 3) + y(x^2 - 4y - 3) \rightarrow q(x,y) = (x^2 - 4y - 3)(x + y).$$

iii) $d(x,y) = x^2 - 4y - 3$

$$\therefore d(2, -1) = (2)^2 - 4(-1) - 3 = 5.$$

Rpta.: A

4. Dados los polinomios $p(x) = (x^4 - 1)^2(x^2 + x - 6)$ y $q(x) = (x + 1)^2(x^2 + 4x + 3)(x - 7)$. El número de factores algebraicos del $\text{MCD}[p(x), q(x)]$ en $\mathbb{Z}[x]$, representa el porcentaje del total de puestos de trabajo que faltan por cubrir en una empresa que solicitaba 300 trabajadores. ¿Cuántos puestos de trabajo ya han sido cubiertos?

- A) 291 B) 255 C) 270 D) 276 E) 285

Solución:

$$* p(x) = (x^4 - 1)^2(x^2 + x - 6) = (x^2 + 1)^2(x + 1)^2(x - 1)^2(x + 3)(x - 2).$$

$$* q(x) = (x + 1)^2(x^2 + 4x + 3)(x - 7) = (x + 1)^2(x + 3)(x + 1)(x - 7)$$

$$\rightarrow q(x) = (x + 1)^3(x + 3)(x - 7).$$

$$\text{Así, tenemos: } \text{MCD}[p(x), q(x)] = (x + 1)^2(x + 3)$$

$$\rightarrow \text{El número de FA es } (3)(2) - 1 = 5.$$

$$\therefore \text{Puestos cubiertos: } 95\%(300) = 285.$$

Rpta.: E

5. Sea $d(x) = \text{MCD}[p(x), q(x)]$ y $m(x) = \text{MCM}[p(x), q(x)]$ en $\mathbb{Z}[x]$, tal que $d(x)$ es un polinomio mónico y de término independiente -3 . Si $q(x)$ es un polinomio mónico y de segundo grado y $p(x) - q(x) = 3x^3 - 7x^2 - 11x + 15$ contiene a $d(x)$, halle el valor de

$$\sqrt{\frac{m(0)}{2}}.$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 4

Solución:

$$i) p(x) - q(x) = 3x^3 - 7x^2 - 11x + 15$$

$$\rightarrow p(x) - q(x) = (3x + 5)(x - 3)(x - 1) \cdots (\alpha)$$

El $d(x)$ divide en (α) y tiene término independiente -3 entonces $d(x) = x - 3$

ii) $q(x)$ es mónico, de 2do. grado y contiene a $d(x)$

$$\rightarrow q(x) = (x - 3)(x - 1) \cdots (\beta)$$

iii) De (β) en (α) :

$$p(x) - (x - 3)(x - 1) = (3x + 5)(x - 3)(x - 1) \rightarrow p(x) = 3(x + 2)(x - 3)(x - 1)$$

$$iv) m(x) = 3(x + 2)(x - 3)(x - 1) \rightarrow m(0) = 18$$

$$\therefore \sqrt{\frac{m(0)}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3.$$

Rpta.: C

6. Dados los polinomios $p(x) = (x + 4)^4 + 3(x + 2)(x + 6) + 8$ y $q(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$ en

$$\mathbb{Z}[x] \text{ y } t(x) = \frac{\text{MCM}[p(x), q(x)]}{\text{MCD}[p(x), q(x)]}, \text{ calcule } t(2).$$

A) 80

B) -40

C) -32

D) 40

E) -30

Solución:

$$i) p(x) = (x + 4)^4 + 3(x^2 + 4x + 12) + 8 \rightarrow p(x) = (x + 4)^4 + 3(x + 4)^2 - 4$$

$$p(x) = [(x + 4)^2 + 4][(x + 4)^2 - 1] \rightarrow p(x) = (x^2 + 8x + 20)(x + 5)(x + 3).$$

$$ii) q(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30 \rightarrow q(x) = (x + 5)(x + 3)(x - 2)$$

$$iii) t(x) = \frac{(x^2 + 8x + 20)(x + 5)(x + 3)(x - 2)}{(x + 5)(x + 3)} = (x^2 + 8x + 20)(x - 2)$$

$$\therefore t(2) = (4 + 16 + 20)(2 - 3) = -40.$$

Rpta.: B

7. Andrea dispone de las siguientes bolas de collares: $(x^3 - 5x^2 + 6x)$ bolas blancas, $(x^3 - 4x^2 + x + 6)$ bolas rojas y $(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6)$ bolas celestes, con $x > 3$, $x \in \mathbb{Z}[x]$. Si Andrea debe fabricar la máxima cantidad de collares con las bolas de cada color, que contengan la misma cantidad de bolas y sin que sobre ninguna. ¿Cuántas bolas de color celeste utilizará Andrea para fabricar un collar?

A) $x^2 - 5x + 6$ B) $x^2 + 6$ C) $x^2 + x$ D) $x^2 + 1$ E) $x^2 - 6x + 5$

Solución:

Número de bolas blancas: $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x \rightarrow p(x) = x(x-2)(x-3)$

Número de bolas rojas: $q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \rightarrow q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

Número de bolas celestes: $r(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 \rightarrow r(x) = (x^2 + 1)(x-2)(x-3)$

$\rightarrow$ El número de collares que fabrica, es: $\text{MCD}[p(x), q(x), r(x)] = (x-2)(x-3)$

$\therefore$ El número de bolas celestes en un collar, es: $\frac{r(x)}{\text{MCD}} = \frac{(x^2 + 1)(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = x^2 + 1$.

Rpta.: D

8. Se requiere poner piso con piezas cuadradas de mayólica, todas de igual dimensión, para una cocina de forma rectangular de dimensiones $(x^3 + 3x^2 - 13x - 15)$ y $(x^3 + 5x^2 - 17x - 21)$ metros, ambas con $x > 3, x \in \mathbb{R}$. Indique el polinomio que representa la mínima cantidad de piezas de mayólica que se deberán usar de modo que se utilicen piezas enteras en el piso de la cocina.

A) $x^2 - 2x + 3$ B) $x^2 + 12x + 35$ C) $x^2 + 4x - 21$ D) $x^2 + 8x + 7$ E) $x^2 + 17x + 30$

Solución:

i) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15 \rightarrow p(x) = (x-3)(x+1)(x+5)$

$q(x) = x^3 + 5x^2 - 17x - 21 \rightarrow q(x) = (x-3)(x+1)(x+7)$.

ii) $\text{MCD}[p(x), q(x)] = (x-3)(x+1)$

iii) Cantidad mínima de piezas de mayólica = $\left(\frac{p(x)}{\text{MCD}[p(x), q(x)]} \right) \left(\frac{q(x)}{\text{MCD}[p(x), q(x)]} \right)$

$\therefore$ Cantidad mínima de piezas de mayólica, es: $x^2 + 12x + 35$.

Rpta.: B

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

12
semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Las siguientes ecuaciones son algunos ejemplos de ecuaciones de grado superior:

$$* x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

$$* x^4 - 25x^2 + 50x - 25 = 0$$

$$* x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$* x^6 - 1 = 0$$

$$* x^6 + 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720 = 0$$

En general son de la siguiente forma :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ con } a_n \neq 0, n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 2 \quad (I)$$

con $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in K$; donde $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$

TEOREMA DE CARDANO Y VIETTE

Sea la ecuación (I), con n soluciones $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ entonces se cumple:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = - \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + \dots + x_{n-1} \cdot x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + \dots + x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n = - \frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Observaciones

1. Si la ecuación (I) tiene coeficientes reales, las soluciones complejas se presentan por pares conjugados.
2. Si la ecuación (I) tiene coeficientes racionales, las soluciones irracionales se presentan por pares conjugados.
3. Para resolver la ecuación (I), generalmente se utiliza algún método de factorización

Ejemplo 1

Halle el conjunto solución de la ecuación $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

Solución

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$

Se observa que "1" verifica la ecuación.

Aplicando el método de Ruffini, resulta

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -13 & 15 \\ 1 & \downarrow & 1 & -2 & -15 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 15) = 0 \rightarrow (x-1)(x-5)(x+3) = 0 \rightarrow x = -3; x = 1; x = 5$$

$$\therefore \text{CS} = \{-3; 1; 5\}.$$

Ejemplo 2

El volumen y la altura de un caja en forma de paralelepípedo rectangular miden 56cm^3 y $(10-3a)\text{cm}$. Si las longitudes de sus aristas básicas miden tres y cinco

centímetros menos, respectivamente, de la longitud de su altura, ¿cuál es la medida del perímetro de la base de la caja?

Solución

$$\text{Volumen}_{\text{CAJA}} = (10 - 3a)(7 - 3a)(5 - 3a) = 56$$

$$\rightarrow p(a) = 27a^3 - 198a^2 + 465a - 294 = 0$$

Como $p(1) = 0 \rightarrow a = 1$ es solución real de la ecuación cúbica.

Aristas básicas: 4 cm y 2 cm

$\therefore$ La medida del perímetro de la base de dicha caja es 12 cm.

Ejemplo 3

Halle el conjunto solución de $x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 41x - 30 = 0$.

Solución

Factorizando por aspa doble especial o divisores binómicos se tiene

$$(x-1)(x+3)(x-5)(x-2) = 0 \rightarrow x=1, x=-3, x=5, x=2$$

$$\therefore \text{CS} = \{-3; 1; 2; 5\}$$

Observación:

Sea la ecuación cuártica $ax^4 + Mx^3 + bx^2 + Nx + c = 0 \dots (II)$.

Si hacemos en (II): $M = N = 0$, se tiene

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0 \dots (III)$$

(III) es conocida como ecuación bicuadrada o bicuadrática.

ECUACIONES BICUADRÁTICAS

Forma general

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0 \quad (II)$$

Esta ecuación tiene soluciones de la forma: $\alpha, -\alpha, \beta$ y $-\beta$; y se resuelve en forma similar a una ecuación de segundo grado.

Por el **teorema de Cardano y Viette** se obtiene lo siguiente:

$$1. \alpha + (-\alpha) + \beta + (-\beta) = 0$$

$$2. \alpha^2 + \beta^2 = -\frac{b}{a}$$

$$3. \alpha^2 \cdot \beta^2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplo 4

Halle el conjunto solución de $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

Solución

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

Factorizando por aspa simple se tiene $(x^2 - 3)(x^2 - 2) = 0$

$$\rightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore \text{CS} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}.$$

Ejemplo 5

Determine una ecuación bicuadrada en variable "x", cuyas soluciones están en progresión aritmética de razón 2 y el número 1 sea una de sus soluciones.

Solución:

Sean sus soluciones

$$\alpha = 1, -\alpha = -1, \beta = 1 + 2 = 3, -\beta = -3$$

Soluciones en P.A.

$$-3; -1; 1; 3$$

Luego, la ecuación será

$$x^4 - (1^2 + 3^2)x^2 + (1)^2(3)^2 = 0$$

$$\therefore \text{La ecuación es } x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

ECUACIONES BINÓMICAS

Son aquellas ecuaciones enteras que solamente tienen dos términos.

Forma general

$$ax^n + b = 0, a \neq 0$$

Ejemplo 6

Halle el conjunto solución de $x^3 + 1 = 0$.

Solución

Factorizando $(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$$\rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\rightarrow (x+1)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$$

$$\therefore \text{CS} = \left\{ -1; \frac{1+\sqrt{3}i}{2}; \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right\}.$$

ECUACIONES CON RADICALES EN R

Son aquellas ecuaciones que tienen la variable dentro de algún radical.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} &= 4 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} &= 5\end{aligned}$$

Propiedades

$$1. \sqrt{p(x)} \geq 0, \forall p(x) \geq 0.$$

$$2. \sqrt{p(x)} = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0.$$

Veamos la siguiente ecuación

$$\sqrt[n]{p(x)} = q(x) \dots (*) ; n \in \mathbb{Z}^+ \text{ par } \dots (*)$$

Procedimiento para resolver

1º Resolvemos: * $p(x) \geq 0$, y se obtiene el conjunto solución U_1

* $q(x) \geq 0$, y se obtiene el conjunto solución U_2

2º Resolvemos la ecuación $p(x) = [q(x)]^n$ y se obtiene el conjunto solución U_3

Luego el conjunto solución de (*) es $U_1 \cap U_2 \cap U_3$.

Observaciones

1) De manera análoga al procedimiento anterior se resuelve una ecuación en la que aparecen varios radicales de índice par.

2) Para resolver la ecuación $\sqrt[n]{p(x)} = q(x) \dots (**); n \in \mathbb{Z}^+ \text{ impar}$, se procede como en 2º, obteniéndose el conjunto U_3 y los elementos del conjunto solución serán aquellos elementos de U_3 que verifiquen (**).

Ejemplo 7

Resuelva la ecuación $\sqrt{2x^2 - 8} = 4$.

Solución

$$\sqrt{2x^2 - 8} = 4 \quad \dots(1)$$

i) Existencia: $2x^2 - 8 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2 \vee x \leq -2$

ii) Elevando al cuadrado en (1), resulta

$$2x^2 - 8 = 16 \Rightarrow x^2 = 12$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3}$$

De i) y ii) se tiene

$$CS = \{2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$$

Ejemplo 8

Halle el conjunto solución de $\sqrt{11-3x} - \sqrt{3} = -\sqrt{3x-8}$.

Solución

$$\sqrt{11-3x} - \sqrt{3} = -\sqrt{3x-8} \quad \dots(1)$$

i) Existencia

$$U_1 : 11-3x \geq 0 \rightarrow U_1 = \left(-\infty, \frac{11}{3}\right]$$

$$U_2 : 3x-8 \geq 0 \rightarrow U_2 = \left[\frac{8}{3}, +\infty\right)$$

ii) Elevando al cuadrado en (1), se tiene

$$\sqrt{11-3x} + \sqrt{3x-8} = \sqrt{3}$$

$$11-3x+3x-8+2\sqrt{11-3x}\sqrt{3x-8}=3$$

$$\text{Cancelando se tiene } \sqrt{11-3x}\sqrt{3x-8}=0$$

$$\text{Entonces } 11-3x=0 \vee 3x-8=0$$

$$\text{Luego } x = \frac{11}{3} \vee x = \frac{8}{3}, \text{ es decir } U_3 = \left\{\frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right\}$$

$$\therefore CS = U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \left\{\frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right\}$$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Recordando la definición de valor absoluto para $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Propiedades

1. $|p(x)| = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$
2. $|-p(x)| = |p(x)|$ y $|p(x)|^2 = (p(x))^2$
3. $|p(x) \cdot q(x)| = |p(x)| \cdot |q(x)|$
4. $|p(x)| = q(x) \Leftrightarrow [q(x) \geq 0 \text{ y } (p(x) = q(x) \text{ ó } p(x) = -q(x))]$
5. $|p(x)| = |q(x)| \Leftrightarrow [p(x) = q(x) \text{ ó } p(x) = -q(x)]$
6. $|p(x)| + |q(x)| = 0 \Leftrightarrow [p(x) = 0 \text{ y } q(x) = 0]$

Ejemplo 9 : Halle el conjunto solución de la ecuación $15 = |7x - 21| + 2|x - 3|^2$.

Solución

$$\begin{aligned} 15 = |7x - 21| + 2|x - 3|^2 &\rightarrow 2|x - 3|^2 + 7|x - 3| - 15 = 0 \\ &\rightarrow (2|x - 3| - 3)(|x - 3| + 5) = 0 \\ &\rightarrow |x - 3| = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{9}{2} \vee x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{CS} = \left\{ \frac{9}{2}; \frac{3}{2} \right\}$$

Álgebra

EJERCICIOS

1. Con respecto a la ecuación $x^3 - 8x^2 + (19,75)x - 15 = 0$, se sabe que una de sus soluciones es igual a la suma de las otras dos soluciones. Determine la menor diferencia positiva de dos de sus soluciones.

A) 1

B) 2

C) 1,5

D) 2,5

Solución:

Sean x_1, x_2 y x_3 las soluciones de la ecuación de modo que $x_1 + x_2 = x_3$

Por el teorema de Cardano Viette, se tiene

$$i) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 8 \rightarrow 2x_3 = 8 \rightarrow x_3 = 4$$

ii) Aplicando el método de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 19,75 & -15 \\ 4 & \downarrow & 4 & -16 & 15 \\ \hline & 1 & -4 & 3,75 & 0 \end{array}$$

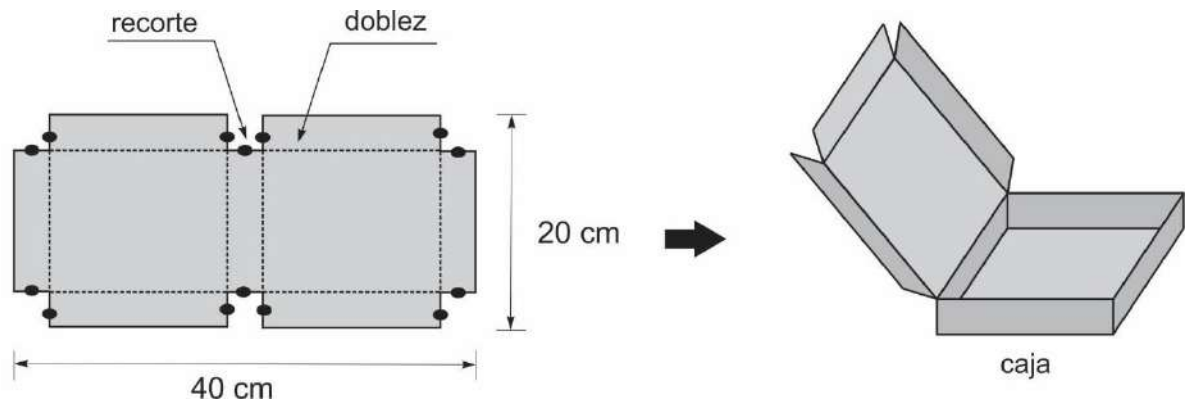
Luego, x_1 y x_2 deben ser soluciones de $x^2 - 4x + 3,75 = 0$

$$\rightarrow \quad x_1 = 1,5 \quad \wedge \quad x_2 = 2,5$$

$\therefore$ Menor diferencia positiva $= |x_2 - x_1| = 1$
de dos soluciones

Rpta. : A

2. Con una pieza rectangular de cartulina de 40×20 cm se desea construir una caja, para ello se marcan líneas de dobléz y se recortan algunas partes, tal como se muestra en la figura. Calcule la cantidad (entera) de cartulina recortada, de manera que el volumen de la caja construída sea de 625 cm^3 .



- A) 180 cm^2 B) 150 cm^2 C) 120 cm^2 D) 135 cm^2

Solución:

De la figura, $V_{\text{CAJA}} = (x) \left(\frac{40 - 3x}{2} \right) (20 - 2x)$

Pero $625 = V_{\text{CAJA}} = (x) \left(\frac{40 - 3x}{2} \right) (20 - 2x)$

$$\rightarrow 3x^3 - 70x^2 + 400x - 625 = 0$$

Factorizando por divisores binómicos, se concluye que "5" es la única solución entera.

$$\therefore \text{Cantidad de cartulina recortada} = 6(x)^2 = 6(25) = 150 \text{ cm}^2$$

Rpta. : B

3. Tres números consecutivos positivos tienen la siguiente propiedad: el cuadrado del producto de los dos números menores excede en 214 al doble del cubo del mayor de ellos. De estos tres números, determine el número intermedio.

A) 9 B) 8 C) 6 D) 7

Solución:

Sean los tres números consecutivos y positivos : $x-1$, x , $x+1$

$$\text{Condición: } ((x-1)(x))^2 - 214 = 2(x+1)^3$$

$$(x^2 - x)^2 - 214 = 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^3$$

$$(x^2 - x)^2 - 214 = 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$$

$$\rightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 214 = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$$

$$\rightarrow x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 6x - 216 = 0$$

$$\rightarrow (x-6) \cdot \underbrace{(x^3 + 2x^2 + 7x + 36)}_{\text{No tiene soluciones enteras}} = 0 \rightarrow x = 6$$

$\therefore$ Los números son 5; 6 y 7.

Rpta. : C

4. Si la ecuación bicuadrada

$$4x^4 - 5 \left| k^2 - 7k + 7 \right| x^2 + 36 = 0 \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

tiene dos soluciones enteras cuyo producto es -4 , halle la suma del menor valor de k con una solución no entera.

A) $-1,5$ B) $-4,5$ C) $1,5$ D) $4,5$

Solución:

Sean α y $-\alpha$ dos soluciones enteras $\rightarrow \beta$ y $-\beta$ son las otras soluciones no enteras

Por dato, $\alpha \cdot (-\alpha) = -4 \rightarrow \alpha^2 = 4$, luego aplicando el teorema de Cardano-Viete se tiene

$$\text{I. } \alpha^2 \cdot \beta^2 = 9 \rightarrow (4) \cdot \beta^2 = 9 \rightarrow \beta^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{II. } \alpha^2 + \beta^2 = \frac{5 \left| k^2 - 7k + 7 \right|}{4} \rightarrow 4 + \frac{9}{4} = \frac{5 \left| k^2 - 7k + 7 \right|}{4}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{25}{4} &= \frac{5|k^2 - 7k + 7|}{4} \rightarrow 5 = |k^2 - 7k + 7| \\ \rightarrow 5 &= k^2 - 7k + 7 \quad \vee \quad -5 = k^2 - 7k + 7 \\ \rightarrow \underbrace{k^2 - 7k + 2 = 0}_{k \notin \mathbb{Z}} &\quad \vee \quad k^2 - 7k + 12 = 0 \\ \rightarrow k &= 3 \quad \vee \quad k = 4 \end{aligned}$$

Luego, la ecuación original es $4x^4 - 5|k^2 - 7k + 7|x^2 + 36 = 0$ con $k \in \mathbb{Z}$

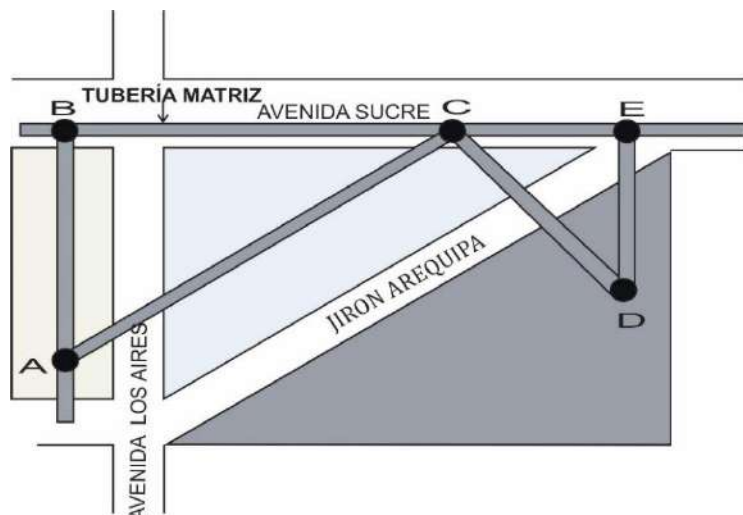
$$\begin{aligned} 4x^4 - 25x^2 + 36 &= 0 \\ \text{Usando el aspa simple,} \quad (4x^2 - 9)(x^2 - 4) &= 0 \\ \rightarrow x &= \frac{3}{2}; x = -\frac{3}{2}; x = 2; x = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore k_{\text{menor}} + (\text{una solución entera}) = \begin{cases} 3 + 1,5 = 4,5 \\ 3 + (-1,5) = 1,5 \end{cases}$$

Rpta. : D

5. En la figura, se representa parte de un plano de una ciudad donde se realizará un mantenimiento de la tubería de agua y desagüe. Se observa que la avenida Sucre y la avenida Los Aires son perpendiculares mutuamente y las medidas, en metros, de los tuberías representadas por BE, AB, AC y CE son 54, $(x-1)$, $(2x)$ y $(x+7)$. ¿Cuál es la longitud de la tubería CE?

- A) 24 m
B) 22 m
C) 28 m
D) 26



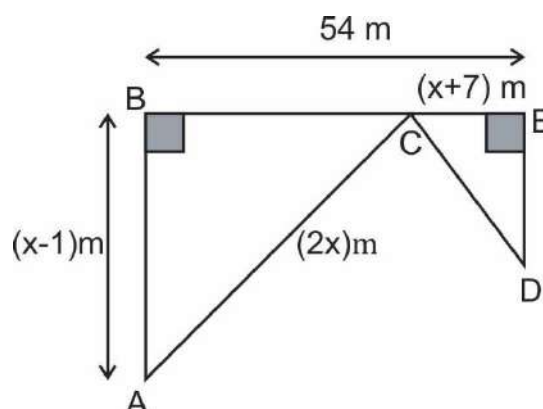
Solución:

Aplicando el teorema de Pitágoras en el Triángulo rectángulo CED, se tiene

$$CE = \sqrt{(2x)^2 - (x-1)^2} = \sqrt{3x^2 + 2x - 1}$$

Luego, del gráfico se observa

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 + 2x - 1} + x + 7 &= 54 \\ \rightarrow \sqrt{3x^2 + 2x - 1} &= 47 - x \quad \dots(1) \end{aligned}$$



i) Existencia de (1)

$$3x^2 + 2x - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad 47 - x \geq 0 \quad \wedge \quad x > 0 \quad \rightarrow \quad x \in \langle 0; 47 \rangle$$

ii) Elevando al cuadrado en (1), se tiene

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x - 1 &= 2209 - 94x + x^2 \\ 2x^2 + 96x - 2210 &= 0 \\ x^2 + 48x - 1105 &= 0 \\ \rightarrow x &= -65 \quad \vee \quad x = 17 \end{aligned}$$

De i) y ii) se tiene que $x = 17$

$\therefore$ La longitud de la tubería CE es 24 m

Rpta. : A

6. Si $(2+i)$ es una solución con multiplicidad dos de la ecuación

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 50 = 0 \quad \text{con } \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$$

¿cuál es el valor de $(a+b+c+d)$?

A) - 37

B) - 39

C) 40

D) - 41

Solución:

Como $(2+i)$ es una solución con multiplicidad dos, entonces por el teorema de la paridad $(2-i)$ es también solución con multiplicidad dos.

Sean $(2+i)$, $(2+i)$, $(2-i)$, $(2-i)$ y m las soluciones de la ecuación, entonces

$$\begin{aligned}
& [x - (2 + i)][x - (2 + i)][x - (2 - i)][x - (2 - i)][x - m] = 0 \\
& [(x - 2) - i][(x - 2) - i][(x - 2) + i][(x - 2) + i](x - m) = 0 \\
& [(x - 2) - i]^2 [(x - 2) + i]^2 (x - m) = 0 \\
& (x^2 - 4x + 5)^2 (x - m) = 0 \\
& (x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25)(x - m) = 0 \rightarrow m = -2 \\
& \rightarrow x^5 - 6x^4 + 10x^3 + 12x^2 - 55x + 50 = 0 \\
& \rightarrow a = -6, b = 10, c = 12 \text{ y } d = -55 \\
& \therefore a + b + c + d = -39.
\end{aligned}$$

Rpta. : B

7. Sea $p(x)$ un polinomio mónico, con coeficientes enteros, de menor grado posible cuyas raíces son $-\sqrt{2}$ y $4i$. Calcule la suma de los productos binarios de todas las soluciones de $T(x) = 0$, donde $T(x) = (x^{26} - 1) \cdot p(x)$.

A) 14 B) -16 C) -14 D) 16

Solución:

Si $-\sqrt{2}$ y $4i$ raíces de $p(x)$ entonces $\sqrt{2}$ y $(-4i)$ son también raíces de $p(x)$.

$$\text{Luego, } p(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 4i)(x + 4i) = (x^2 - 2)(x^2 + 16)$$

$$p(x) = x^4 + 14x^2 - 32$$

$$\rightarrow T(x) = (x^{26} - 1)(x^4 + 14x^2 - 32) = x^{30} + 14x^{28} - 32x^{26} - x^4 - 14x^2 + 32$$

$$\rightarrow x^{30} + 14x^{28} - 32x^{26} - x^4 - 14x^2 + 32 = 0$$

Aplicando el teorema de Cardano-Viette, se tiene

$\therefore$ Suma de productos binarios = -14.

Rpta. : C

8. Halle el valor de x que verifica la ecuación $|x - 3| = 2 - \sqrt{9 - x^2}$.

A) $\frac{1 - \sqrt{17}}{2}$ B) $\frac{1 + \sqrt{17}}{5}$ C) $\frac{2 + \sqrt{17}}{2}$ D) $\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$

Solución:

$$|x-3| = 2 - \sqrt{9-x^2}$$

$$* \text{ Existencia: } 2 - \sqrt{9-x^2} \geq 0 \quad \wedge \quad 9-x^2 \geq 0$$

$$\rightarrow 2 \geq \sqrt{9-x^2} \quad \wedge \quad x^2 \leq 9$$

$$\rightarrow 4 \geq 9-x^2 \quad \wedge \quad x^2 \leq 9$$

$$\rightarrow x \geq \sqrt{5} \vee x \leq -\sqrt{5} \quad \wedge \quad -3 \leq x \leq 3$$

$$\rightarrow x \in [-3; \sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; 3]$$

$$\rightarrow x-3 \leq 0 \rightarrow |x-3| = 3-x$$

$$** \quad 3-x = 2 - \sqrt{9-x^2} \rightarrow \sqrt{9-x^2} = x-1, x \geq 1$$

$$\text{Elevando al cuadrado} \rightarrow 9-x^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\rightarrow x^2 - x - 4 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{De (*) y (**), se tiene } CS = \left\{ \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right\}.$$

Rpta. : D**EJERCICIOS PROPUESTOS**

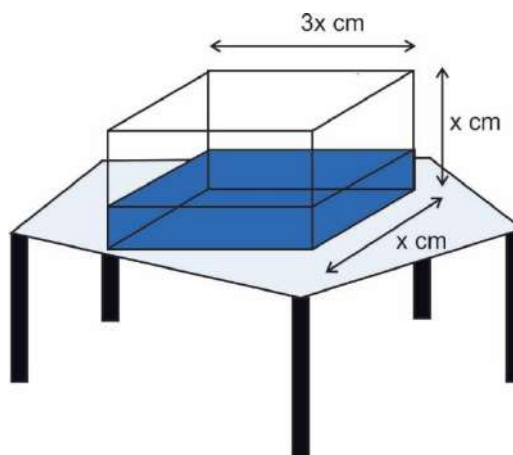
1. En la figura, se representa un terrario con agua salada en forma de paralelepípedo rectangular. Si la diferencia entre la capacidad del terrario y la cantidad de agua salada que hay en él, es de $20\,400 \text{ cm}^3$; y además la profundidad del agua es exactamente 3 cm, ¿a qué intervalo pertenece el valor del perímetro, en cm, de la base del terrario?

A) $\langle 156; 162 \rangle$

B) $[150; 155]$

C) $\langle 140; 150 \rangle$

D) $\langle 160; 162 \rangle$



Solución:

$$\text{Capacidad}_{\text{TERRARIO}} = (x)(x)(3x) = 3x^3 \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Condición: } \text{Capacidad}_{\text{TERRARIO}} - \text{Cantidad de agua} = 20\,400$$

$$\rightarrow 3x^3 - (x)(3x)(3) = 20\,400$$

$$\rightarrow x^3 - 3x^2 - 6800 = 0$$

Factorizando por divisores binómicos, se tiene

$$(x - 20)(\underbrace{x^2 + 17x + 340}_{x \notin \mathbb{R}}) = 0 \rightarrow x = 20$$

$$\text{Perímetro}_{\text{BASE}} = 8(20) = 160 \text{ cm}$$

$$\therefore 160 \in [156; 162]$$

Rpta. : A

2. Kittzay tenía x^4 soles, gastó $(6x^3 + 8x^2)$ soles y, con el dinero que le quedaba, compró un televisor. Si el precio, en soles, de dicho televisor está dado por $|14x^2 + 39x + 54|$, ¿cuánto dinero tenía inicialmente Kittzay?

A) S/ 10 000

B) S/ 6561

C) S/ 4096

D) S/ 14 641

Solución:

Inicialmente, Kittzay tiene x^4 soles con $x \in \mathbb{R}^+$

Gastó: $(6x^3 + 8x^2)$ soles

Queda: $(x^4 - 6x^3 - 8x^2)$ soles

$$\text{Condición: } x^4 - 6x^3 - 8x^2 = |14x^2 + 39x + 54| \quad \dots(1)$$

$$\text{Se observa que } 14x^2 + 39x + 54 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow |14x^2 + 39x + 54| = 14x^2 + 39x + 54$$

Luego, de (1) se tiene

$$x^4 - 6x^3 - 22x^2 - 39x - 54 = 0$$

Factorizando por el aspa doble especial, resulta

$$\rightarrow (x - 9)(x + 2)(\underbrace{x^2 + x + 3}_{x \notin \mathbb{C}}) = 0, x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow x = 9$$

$\therefore$ Kittzay tenía inicialmente S/ 6561.

Rpta. : B

3. Dada la ecuación bicuadrada

$$x^4 - (a^2 - 8a + 16)x^3 + (b - 2a)x^2 + (b^4 - 13b^2 + 36)x + a = 0 \text{ con } b \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } a \neq 2b.$$

, calcule la suma de los valores absolutos de las soluciones de dicha ecuación.

- A) 8 B) 10 C) 6 D) 4

Solución:

Por ser una ecuación bicuadrada, se cumple

$$\begin{aligned} & a^2 - 8a + 16 = 0 \quad \wedge \quad b^4 - 13b^2 + 36 = 0 \\ \rightarrow & \quad \quad \quad a = 4 \quad \wedge \quad b = \pm 2 \vee b = \pm 3 \end{aligned}$$

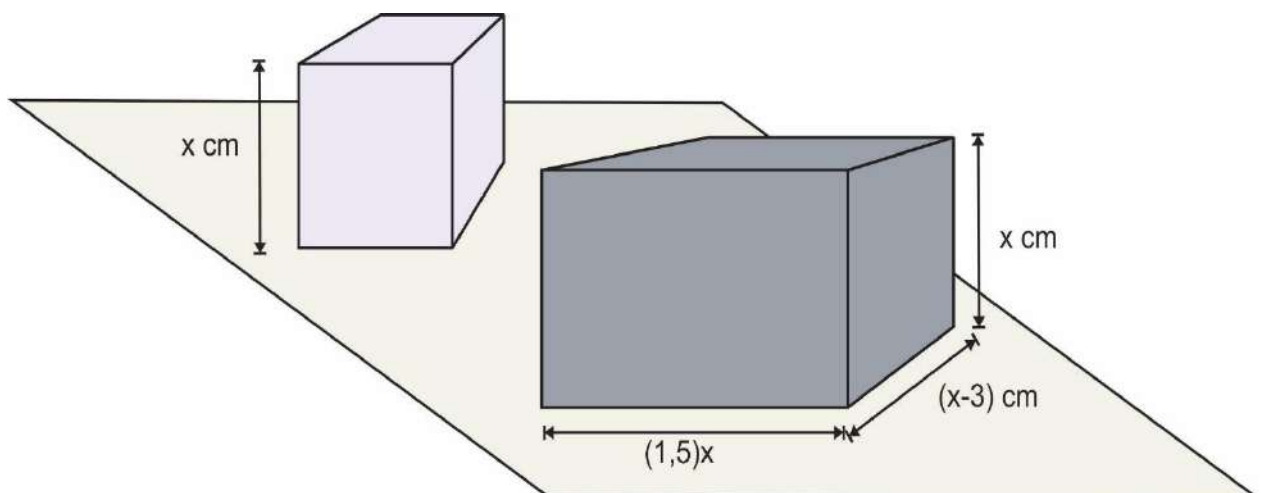
Como $b \in \mathbb{Z}^+$ y $a \neq 2b \rightarrow a = 4, b = 3$

$$\rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \rightarrow \text{CS} = \{2; -2; 1; -1\}$$

$$\therefore |2| + |-2| + |1| + |-1| = 6$$

Rpta. : C

4. En la figura, se representa un cubo y un paralelepípedo rectangular con sus respectivas dimensiones. Indique un valor que admite "x" de manera que el volumen del cubo exceda en 32 cm^3 al volumen del paralelepípedo.



- A) $\frac{1+\sqrt{33}}{4}$ B) $\frac{1+\sqrt{37}}{2}$ C) $\frac{1+\sqrt{35}}{2}$ D) $\frac{1+\sqrt{33}}{2}$

Solución:

De la figura, se obtiene $V_{\text{CUBO}} = x^3$, $V_{\text{PARALELEPIPEDO}} = (15x)(x-3)(x)$, $x > 0$

Condición: $V_{\text{CUBO}} - V_{\text{PARALELEPIPEDO}} = 32$

$$\rightarrow x^3 - (15x)(x)(x-3) = 32 \rightarrow x^3 - 9x^2 + 64 = 0$$

Factorizando por divisores binómicos, se tiene $(x-8)(x^2 - x - 8) = 0$

Luego, las soluciones son $x_1 = 8$, $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}$

Como $x > 0 \rightarrow \text{CS} = \left\{ 8; \frac{1+\sqrt{33}}{2} \right\}$

$\therefore$ Un valor de x es $\frac{1+\sqrt{33}}{2}$.

Rpta. : D

5. Si m es la solución real de la ecuación

$$x^2 + 3\sqrt{3-3x} + |x^2 + x + 3| - x = 6 + x^2$$

, calcule $2m + 3$.

A) $\sqrt{21}$

B) $\sqrt{23}$

C) $3\sqrt{21}$

D) $2\sqrt{23}$

Solución:

$$x^2 + 3\sqrt{3-3x} + |x^2 + x + 3| - x = 6 + x^2 \quad \dots(1)$$

* $x^2 + x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow |x^2 + x + 3| = x^2 + x + 3$

** Existencia $3-3x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$

De (1) se tiene

$$x^2 + 3\sqrt{3-3x} = 3 \quad \dots(2)$$

Haciendo $a = \sqrt{3-3x} \geq 0 \rightarrow a^2 = 3-3x \rightarrow x = \frac{3-a^2}{3}$ reemplazando en (2)

$$\left(\frac{3-a^2}{3}\right)^2 + 3a = 3 \rightarrow a^4 - 6a^2 + 27a - 18 = 0 \rightarrow a = \frac{\sqrt{21}-3}{2} \quad (\text{Pues } a \geq 0)$$

Luego,

$$a = \sqrt{3-3x} \rightarrow \frac{\sqrt{21}-3}{2} = \sqrt{3-3x} \rightarrow x = \frac{\sqrt{21}-3}{2} = m \text{ (única solución real)}$$

$$\therefore 2m+3 = \sqrt{21}$$

Rpta. :A

6. Halle el número de soluciones de la ecuación $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = 3 - x$ en $\mathbb{R}$.

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

Solución:

$$\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = 3 - x \quad \dots(1)$$

$$* \text{ Existencia: } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0 \quad \wedge \quad 3 - x \geq 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x-2)(x-1) \geq 0 \quad \wedge \quad 3 \geq x$$

$$\rightarrow x \in [1;2] \cup \{3\}$$

** Elevando al cuadrado en (1), resulta

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (3-x)^2$$

$$(x-1)(x-2)(x-3) - (x-3)^2 = 0$$

$$(x-3)[(x-1)(x-2) - (x-3)] = 0$$

$$(x-3)(x^2 - 4x + 5) = 0 \rightarrow x = 3 \vee x = 2 - i \vee x = 2 + i$$

De (*) y (**), se concluye que "3" es la única solución real.

Rpta. :B

7. Con respecto a la ecuación $(x-3)(x-5)(x+1)(x+3) = -36$, se sabe que "a" es la mayor solución y "b" es la menor solución, ¿cuál es el valor de (a+b)?

A) 3

B) -4

C) 2

D) -2

Solución:

$$(x+1)(x-3)(x-5)(x+3) + 36 = 0$$

$$(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 15) + 36 = 0$$

→

$$(x^2 - 2x)^2 - 18(x^2 - 2x) + 81 = 0$$

→

$$\left((x^2 - 2x) - 9\right)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 9 = 0.$$

Luego a y b son soluciones de $x^2 - 2x - 9 = 0$.

$\therefore$ El valor de $(a+b)$ es 2.

Rpta. : C

8. Si a, b, c y d son las soluciones de la ecuación $x^4 = 3x^3 - 1$, calcule el valor de

$$L = \frac{\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} + \frac{1}{c^6} + \frac{1}{d^6}}{a+b+c+d}.$$

A) -15

B) 27

C) 15

D) 9

Solución:

$$x^4 - 3x^3 + 1 = 0$$

Usando el teorema de Cardano - Viette, resulta

i) $a+b+c+d=3$

ii) $ab+ac+ad+bc+bd+cd=0$

iii) $abcd=1$

Entonces, $(a+b+c+d)^2 = 3^2$

$\rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)=9$

$\rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=9$

Por otro lado, $x^3(x-3)=-1 \rightarrow 3-x=\frac{1}{x^3} \rightarrow x^2-6x+9=\frac{1}{x^6}$

Luego, $\rightarrow a^2-6a+9=\frac{1}{a^6}$

$\rightarrow b^2-6b+9=\frac{1}{b^6}$

$\rightarrow c^2-6c+9=\frac{1}{c^6}$

$\rightarrow d^2-6d+9=\frac{1}{d^6}$

Sumando miembro a miembro, se tiene

$\rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2-6(a+b+c+d)+4(9)=\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}+\frac{1}{c^6}+\frac{1}{d^6}$

$\rightarrow 9-6(3)+4(9)=\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}+\frac{1}{c^6}+\frac{1}{d^6}$

$\therefore L = \frac{27}{3} = 9.$

Rpta. : D

Álgebra

EJERCICIOS

1. Las distancias recorridas, en kilómetros, de dos móviles M y N están modeladas por $d_1(t) = t^3 - 6t^2 + 11t$; $t > 1$ y $d_2(t) = t^3 - 7t^2 + 14t$, donde t es el tiempo (en minutos). Determine el tiempo común que transcurre, para que el móvil M recorra 6 kilómetros y el móvil N recorra 8 kilómetros.

A) 1 min

B) 2 min

C) 5 min

D) 3 min

Solución:

$$\text{I) } d_1(t) = t^3 - 6t^2 + 11t = 6$$

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$$

factorizando

$$(t-2)(t-3)(t-1) = 0$$

$$\rightarrow t = 2 \vee t = 3 \vee t = 1$$

$$\text{II) } d_2(t) = t^3 - 7t^2 + 14t = 8$$

$$t^3 - 7t^2 + 14t - 8 = 0$$

factorizando

$$(t-2)(t-4)(t-1) = 0$$

$$\rightarrow t = 2 \vee t = 4 \vee t = 1$$

Por lo tanto

El tiempo común que transcurre es de 2 min

Rpta.: B

2. Ramón dispone de $\overline{m^2(m+3)}$ soles para comprar 10 reglas, 30 lapiceros y 15 cuadernos, cuyo precio unitario de cada útil en el orden mencionado, está dado por S/a , S/b y S/c de modo que a , b y c son las multiplicidades de las soluciones de la ecuación $x^6 - 3x^5 - 6x^4 + 24x^3 - 48x + 32 = 0$, con $a < b < c$. Si m es la mayor solución de la ecuación, ¿cuánto dinero le quedó a Ramón, luego de realizar la compra?

A) 211 soles

B) 14 soles

C) 110 soles

D) 89 soles

Solución:

$$x^6 - 3x^5 - 6x^4 + 24x^3 - 48x + 32 = 0$$

Realizamos la factorización

$$(x-1)(x-2)^3(x+2)^2 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son: 1, 2 y -2

$a=1$, $b=2$, $c=3$, además $m=2$

Ramón dispone de $m^2(m+3) = 225$ soles

Y por su compra gasto: $10(1) + 30(2) + 15(3) = 115$ soles

Por lo tanto le quedó: $225 - 115 = 110$ soles

Rpta.: C

3. Juan visitará al médico cada $|d|$ días, donde d coincide con el producto de las soluciones de la ecuación bicuadrada $x^4 + (b-a)(x^3+1) + (x+1)^3 - c(x+1) + 1 = 0$. Si el día $|d|$ de setiembre fue su primera visita, ¿qué fecha será su visita $(|d|+3)$ ese mes?

- A) 7 de setiembre
C) 17 de setiembre

- B) 12 de setiembre
D) 10 de setiembre

Solución:

$$x^4 + (b-a)(x^3+1) + (x+1)^3 - c(x+1) + 1 = 0$$

$$\rightarrow x^4 + (b-a+1)x^3 + 3x^2 + (3-c)x + (b-a-c+2) = 0$$

Por ser bicuadrada

$$(b-a+1) = 0 \wedge 3-c = 0 \rightarrow c = 3, b-a = -1$$

$$\rightarrow x^4 + 3x^2 - 2 = 0 \rightarrow d = -2 \rightarrow |d| = 2$$

Juan visita al médico cada 2 días, si el día 2 de setiembre fue su primera visita, entonces su visita 5 ese mes fue el 10 de setiembre.

Rpta.: D

4. En un paseo han asistido 154 niños. Con el fin de realizar actividades de integración, se forman (x^2) grupos con $(x^2 + m^2 - 2)$ niños por grupo, quedando 10 niños sin grupo; sin embargo si se forman $(2m^2)$ grupos, de los cuales (m^2) grupos tiene (m^2) niños por grupo y el resto de grupos tiene 8 niños por grupo, entonces quedaría un niño sin grupo. ¿Cuántos grupos de $(x^2 + 5)$ niños por grupo se puede formar con el total de niños?

A) 11

B) 7

C) 14

D) 22

Solución:

$$I) x^2(x^2 + m^2 - 2) + 10 = 154$$

$$x^2(x^2 + m^2 - 2) = 144$$

$$x^4 + (m^2 - 2)x^2 - 144 = 0$$

$$II) m^2(m^2) + m^2(8) + 1 = 154$$

$$m^4 + 8m^2 - 153 = 0$$

Factorizando

$$(m^2 + 17)(m^2 - 9) = 0$$

$$\text{como } m^2 \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow m^2 = 9$$

$$\text{De I)} \rightarrow x^4 + 7x^2 - 144 = 0 \rightarrow (x^2 - 9)(x^2 + 16) = 0 \rightarrow x^2 = 9$$

$$\text{Luego } 154 = \underbrace{(x^2 + 5)}_{14}(11)$$

Por lo tanto, se obtiene 11 grupos.

Rpta.: A

5. En $\mathbb{R}$, se define el operador " α " como:

$$a\alpha b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Si m es solución de la ecuación $\sqrt{x-4}\alpha\sqrt{20-x} = \sqrt{x+4}\alpha(x-6)$, determine el valor de $m - R + \sqrt{S}$, sabiendo que $(m-6)$ y $(m-11)$ son soluciones de la ecuación $x^4 - Rx^2 + S = 0$.

- A) 13 B) $2 + \sqrt{13}$ C) 27 D) 1

Solución:

$$I) \sqrt{x-4}\alpha\sqrt{20-x} = \sqrt{x+4}\alpha(x-6)$$

$$* \text{Existencia: } x-4 \geq 0, 20-x \geq 0, x+4 \geq 0 \rightarrow x \in [4, 20]$$

**En la ecuación, utilizando la definición del operador " α " se tiene :

$$\sqrt{(\sqrt{x-4})^2 + (\sqrt{20-x})^2} = \sqrt{(\sqrt{x+4})^2 + (x-6)^2}$$

$$\rightarrow 4 = \sqrt{x^2 - 11x + 40}$$

$$\rightarrow 0 = x^2 - 11x + 24$$

$$\rightarrow x = 8 \vee x = 3$$

$$\text{De } *) \text{ y } **) \rightarrow x = 8 \rightarrow m = 8$$

II) $(m-6)$ y $(m-11)$ son soluciones

$\rightarrow 2$ y -3 son soluciones de la ecuación $x^4 - Rx^2 + S = 0$.

Por Cardano

$$(2)^2 + (-3)^2 = R \rightarrow R = 13$$

$$(2)^2 \cdot (-3)^2 = S \rightarrow S = 36$$

$$\therefore m - R + \sqrt{S} = 8 - 13 + \sqrt{36} = 1$$

Rpta.: D

6. Las edades actuales de Miguel y Noelia, en años, son respectivamente $|x^2 + |x^2 - 4||$ y $x^2 + 2$; $x \in \mathbb{R}$. Si la edad de Miguel excede a la edad de Noelia en 3 años, ¿cuántos años le falta a Miguel para cumplir $(x^2 + |x| + 8)$ años?

A) 14 años

B) 9 años

C) 6 años

D) 10 años

Solución:

Por dato

$$|x^2 + |x^2 - 4|| - (x^2 + 2) = 3$$

$$x^2 + |x^2 - 4| - x^2 - 2 = 3$$

$$|x^2 - 4| = 5$$

$$x^2 - 4 = 5 \vee x^2 - 4 = -5$$

$$\rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3 \vee x = -3 \text{ soluciones}$$

$$\text{Para cualquier valor de } x \rightarrow |x| = 3$$

$$\text{La edad de Miguel es } |9 + |9 - 4|| = 14 \text{ años}$$

$$\text{Para cumplir } (x^2 + |x| + 8) = 20 \text{ años le falta 6 años.}$$

Rpta.: C

7. Si n es el número de soluciones de la ecuación $(x-2)|x-11|-x|x+9|=2(x-2)\sqrt{9-x^2}-|2x+18|$, halle la suma de los módulos de las soluciones de la ecuación $x^{n+4}-(n+1)^{n^5-26}x^{n-2}+3n=6$.

A) 18 B) 36 C) 30 D) 12

Solución:

$$I) (x-2)|x-11|-x|x+9|=2(x-2)\sqrt{9-x^2}-|2x+18|$$

$$* \text{ Existencia: } 9-x^2 \geq 0 \rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$** \text{ Como } -3 \leq x \leq 3 \rightarrow -14 \leq x-11 \leq -8 \rightarrow |x-11|=11-x$$

$$\rightarrow 6 \leq x+9 \leq 12 \rightarrow |x+9|=x+9$$

$$\rightarrow 12 \leq 2x+18 \leq 24 \rightarrow |2x+18|=2x+18$$

$$\Rightarrow (x-2)(11-x)-x(x+9)=2(x-2)\sqrt{9-x^2}-(2x+18)$$

$$\Rightarrow (x-2)(11-x)-(x-2)(x+9)=2(x-2)\sqrt{9-x^2}$$

$$[1-x]=\sqrt{9-x^2}; \boxed{x=2 \text{ solución}}$$

Se observa que $x \leq 1$

Luego elevando al cuadrado

$$\Rightarrow 1-2x+x^2=9-x^2 \Rightarrow x^2-x-4=0 \Rightarrow x=\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1-\sqrt{17}}{2} \text{ solución}} \Rightarrow n=2$$

$$II) x^{n+4}-(n+1)^{n^5-26}x^{n-2}+3n=6$$

$$\rightarrow x^6-3^6=0 \rightarrow (x^3+3^3)(x^3-3^3)=0$$

$$\rightarrow (x+3)(x^2-3x+9)(x-3)(x^2+3x+9)=0$$

$$x=-3 \vee x=\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i \vee x=3 \vee x=-\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\therefore \Sigma \text{módulos} = |-3| + \left| \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right| + \left| \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right| + |3| + \left| -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right| + \left| -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right|$$

$$= 6 + 4 \left[\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right] = 18$$

Rpta.: A

8. Sea $p(x)$ un polinomio mónico, con coeficientes enteros, de menor grado posible cuyas raíces son $\sqrt{3}$ y $-7i$.

Denisse compró un abrigo cuyo precio, en dólares, es igual a la diferencia de: La suma de los coeficientes de $p(x)$ y el producto de las raíces de $p(x)$, ¿cuánto pagó Denisse por el abrigo?

- A) 43 dólares
C) 47 dólares

- B) 45 dólares
D) 44 dólares

Solución:

- I) Si $\sqrt{3}$ y $-7i$ son raíces de $p(x)$ entonces $-\sqrt{3}$ y $7i$ también son raíces

$$\Rightarrow p(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 7i)(x - 7i) = (x^2 - 3)(x^2 + 49)$$

$$\Rightarrow p(x) = x^4 + 46x^2 - 147$$

- II) Suma de coeficientes de $p(x) = -100$
Producto de las raíces de $p(x) = -147$

Por lo tanto

Denisse pagó por el abrigo: $-100 - (-147) = 47$ dólares

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si los ángulos de un cuadrilátero miden $(x^4 + 1)^\circ$, $(10x^2 - 20x + 62)^\circ$, $(x^2 + 87)^\circ$ y $(2x^2 - 6x + 90)^\circ$; $x \neq 3$, halle la medida del mayor ángulo de dicho cuadrilátero.

A) 110°

B) 162°

C) 96°

D) 142°

Solución:

$$(x^4 + 1)^\circ + (10x^2 - 20x + 62)^\circ + (x^2 + 87)^\circ + (2x^2 - 6x + 90)^\circ = 360^\circ$$

$$\rightarrow x^4 + 0x^3 + 13x^2 - 26x - 120 = 0$$

Factorizando

$$(x - 3)(x + 2)(x^2 + x + 20) = 0 \rightarrow x = -2$$

Los ángulos del cuadrilátero miden: 17° , 142° , 91° y 110°

Por lo tanto, la medida del mayor ángulo de dicho cuadrilátero es 142°

Rpta.: D

2. La ecuación $x^4 + mx^3 + 2x + n = 0$, con coeficientes enteros admite una solución entera con multiplicidad 3. Sea $p = |m| + |n|$, $q = |m|$ y $r = 3 + m + n$. Si Laura vende cinco chompas al mismo precio cada uno, obteniendo un ingreso de $\overline{pqr}$ soles, ¿a cuánto vendió Laura cada chompa?

A) 64 soles B) 63 soles C) 62 soles D) 60 soles

Solución:

Sea "a" la solución entera de multiplicidad 3, y sea b la cuarta solución, entonces, por Cardano, se cumplen:

$$3a + b = -m \quad (1)$$

$$a^2 + ab = 0 \quad (2)$$

$$a^3 + 3a^2b = -2 \quad (3)$$

$$a^3b = n \quad (4)$$

De (2) resulta $a = -b$. Reemplazando en (3) se obtiene $a^3 + 3a^2(-a) = -2 \rightarrow a = 1$, $b = -1$. Reemplazando en (1) se obtiene $m = -2$, y reemplazando en (4) se obtiene $n = -1$.

Entonces, Laura obtuvo $\overline{pqr} = 320$ por la venta de las 5 chompas

Por lo tanto, vendió cada chompa a 64 soles.

Rpta.: A

3. Si $(3+i)$ es una solución con multiplicidad dos de la ecuación $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 100 = 0$; a, b, c y $d \in \mathbb{R}$, determine el valor de $(-a + b + c - d)$.

A) -9 B) 11 C) 31 D) -29

Solución:

$(3 + i)$ es una solución con multiplicidad dos

Por la paridad de las soluciones se tiene $(3 - i)$ es también solución con multiplicidad dos

Consideremos las soluciones $(3+i)$, $(3+i)$, $(3-i)$, $(3-i)$ y R de la ecuación

$$(x - [3+i])(x - [3+i])(x - [3-i])(x - [3-i])(x - R) = 0$$

$$\rightarrow [(x-3)-i]^2 [(x-3)+i]^2 (x-R) = 0$$

$$\rightarrow [x^2 - 6x + 10]^2 (x-R) = 0$$

$$\rightarrow [x^4 - 12x^3 + 56x^2 - 120x + 100](x-R) = 0 \rightarrow R = -1$$

Multiplicando

$$x^5 - 11ax^4 + 44x^3 - 64cx^2 - 20x + 100 = 0$$

$$\rightarrow a = -11, b = 44, c = -64 \text{ y } d = -20$$

$$\therefore (-a + b + c - d) = 11 + 44 - 64 - (-20) = 11$$

Rpta.: B

4. Halle la suma del producto de las soluciones positivas con el producto de las soluciones negativas del conjunto solución de la ecuación $|x^3 - 3x^2 - 7x + 12| = |3x - 12|$.

A) 9

B) 35

C) 14

D) 11

Solución:

$$|x^3 - 3x^2 - 7x + 12| = |3x - 12|$$

$$x^3 - 3x^2 - 7x + 12 = 3x - 12 \vee x^3 - 3x^2 - 7x + 12 = -3x + 12$$

$$I) x^3 - 3x^2 - 7x + 12 = 3x - 12 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$\text{Factorizando: } (x - 2)(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$\rightarrow x = 2 \vee x = 4 \vee x = -3 \text{ soluciones}$$

$$II) x^3 - 3x^2 - 7x + 12 = -3x + 12 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 4x = 0$$

$$\text{Factorizando: } x(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \vee x = 4 \vee x = -1 \text{ soluciones}$$

De I) y II)

$$CS = \{2, 4, -3, 0, -1\}$$

$$\rightarrow \text{producto de las soluciones positivas: } 2(4) = 8$$

$$\rightarrow \text{producto de las soluciones negativas: } (-3)(-1) = 3$$

$$\therefore 8 + 3 = 11$$

Rpta.: D

5. La edad actual de José es $(51m + 29)$ años y la de Junior es de $(34m + 2)$ años, donde $m > 0$. Halle la diferencia de las edades de José y Junior; sabiendo que las soluciones de la ecuación bicuadrática $x^4 - (m + 4)x^2 + 4m^2 = 0$; están en progresión aritmética.

A) 42 años

B) 34 años

C) 39 años

D) 26 años

Solución:

Sean $-3R$, $-R$, R y $3R$ la ecuación bicuadrática $x^4 - (m+4)x^2 + 4m^2 = 0$

$$I) (-3R)^2 + (-R)^2 = m+4 \rightarrow R^2 = \frac{m+4}{10} \rightarrow R^4 = \left(\frac{m+4}{10}\right)^2$$

$$II) (-3R)^2 (-R)^2 = 4m^2 \rightarrow R^4 = \frac{4m^2}{9} = \left(\frac{2m}{3}\right)^2$$

De I) y II)

$$\left(\frac{m+4}{10}\right)^2 = \left(\frac{2m}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{m+4}{10} = \frac{2m}{3} \vee \frac{m+4}{10} = -\frac{2m}{3}$$

$$\rightarrow m = \frac{12}{17} \vee m = -\frac{12}{23} \rightarrow m = \frac{12}{17}$$

La edad actual de José es $(51(\frac{12}{17}) + 29) = 65$ años y

la de Junior es de $(34(\frac{12}{17}) + 2) = 26$ años

Por lo tanto

La diferencia de las edades de José y Junior: $65 - 26 = 39$ años

Rpta.: C

6. Si b es el número de elementos del conjunto solución de la ecuación $\sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+1}$, halle la suma de los módulos de las soluciones de la ecuación $x^{b+2} - (3b-13)x^{b-1} = 3b^2 - 3b + 2$.

A) 4

B) 10

C) 9

D) 6

Solución:

$$I) \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+1}$$

$$* \text{ Restricciones: } 3x+2 \geq 0 \wedge 2x+2 \geq 0 \wedge 3x+1 \geq 0 \wedge 2x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

** De la ecuación

$$\sqrt{3x+2} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{2x+2} + \sqrt{3x+1}$$

Elevando al cuadrado:

$$\cancel{5x} + 3 + \sqrt{(3x+2)(2x+1)} = \cancel{5x} + 3 + \sqrt{(3x+1)(2x+2)}$$

$$6x^2 + 7x + 2 = 6x^2 + 8x + 2 \rightarrow \boxed{x=0 \text{ solución}} \rightarrow b=1$$

$$\text{II)} \quad x^{b+2} - (3b-13)x^{b-1} = 3b^2 - 3b + 2$$

$$x^3 - (3(1)-13)x^0 = 3(1)^2 - 3(1) + 2$$

$$x^3 + 2^3 = 0 \rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$x = -2 \vee \underbrace{x^2 - 2x + 4 = 0}_{x=1 \pm \sqrt{3}i}$$

$$\therefore \text{ La suma de los módulos de las soluciones } = |-2| + 2|1 \pm \sqrt{3}i|$$

$$= 2 + 2 \left[\sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} \right] = 6$$

Rpta.: D

7. El perímetro de un triángulo equilátero es x metros. Si el lado de dicho triángulo mide $(1 + \sqrt{x+1})$ metros, determine el área de un rectángulo, cuyas dimensiones son $\sqrt{x+3}$ metros de largo y $\sqrt{x-3}$ metros de ancho.

A) $3\sqrt{3} \text{ m}^2$

B) $3\sqrt{6} \text{ m}^2$

C) $6\sqrt{6} \text{ m}^2$

D) $12\sqrt{3} \text{ m}^2$

Solución:

$$\text{I)} \quad 3(1 + \sqrt{x+1}) = x$$

$$* \text{ Restricciones: } x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$** \text{ En la ecuación: } \sqrt{x+1} = \frac{x}{3} - 1$$

Elevando al cuadrado

$$x+1 = \frac{x^2}{9} - \frac{2x}{3} + 1 \Rightarrow x^2 - 15x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 15 \Rightarrow x = 15$$

- II) Las dimensiones del rectángulo miden

$$\text{De largo mide } \sqrt{x+3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ metros}$$

$$\text{De ancho mide } \sqrt{x-3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ metros}$$

$$\therefore \text{ Área } = (3\sqrt{2})(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{6} \text{ m}^2$$

Rpta.: C

8. Gladys Tejeda participó en muchas competencias nacionales e internacionales de atletismo, donde no siempre ocupó el primer lugar, su madre recuerda que en una de estas competencias ocupó el lugar $(d + 8)$, pero eso no la desánimo, sino que la alentó a esforzarse. Si d es el valor absoluto de la suma de las inversas de las soluciones de la ecuación $(x - x_0)(36x^3 + mx^2 + 1296m^2x + 36) = 0$, además $6i$ es una solución de la ecuación y x_0 es la mayor solución real de la ecuación $(k - 2)x^4 + (2k - 8)x^3 - (3k - 10) = 0$; $k \neq 2$ binómica, ¿Qué lugar ocupó esa competencia que recordó su madre?

A) 26

B) 21

C) 9

D) 43

Solución:

I) De la ecuación binómica

$$(k - 2)x^4 + (2k - 8)x^3 - (3k - 10) = 0$$

$$\rightarrow 2k - 8 = 0 \rightarrow k = 4$$

$$\rightarrow 2x^4 - 2 = 0 \rightarrow (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) = 0 \rightarrow x_0 = 1$$

II) Si 1 es una solución de la ecuación $(x - 1)(36x^3 + mx^2 + 1296m^2x + 36) = 0$

Entonces consideremos las soluciones de la ecuación

$$(36x^3 + mx^2 + 1296m^2x + 36) = 0 \quad 6i, -6i, \text{ y } r$$

De la relación entre soluciones y coeficientes de la ecuación

$$\text{La suma de soluciones: } r = -\frac{m}{36} \quad \dots (1)$$

El producto de soluciones es: $36r = -1$, entonces $r = -\frac{1}{36}$, $m = 1 \quad \dots (2)$

La suma de las inversas de las soluciones está dada por:

$$\frac{1}{6i} - \frac{1}{-6i} - 36 + 1 = -35$$

$$\rightarrow d = |-35| = 35$$

$\therefore$ El lugar 43 fue el que ocupó esa competencia que recordó su madre.

Rpta.: D

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si a , b y c son las soluciones de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ y $F = \frac{1-a}{a^2-2} - b^3 + \frac{1-b}{b^2-2} - c^3 + \frac{1-c}{c^2-2} - a^3$, halle el valor de $F+5$.

- A) 8 B) 5 C) -1 D) 4 E) 2

Solución:

I) Como a, b y c son soluciones de $x^3 - 3x + 1 = 0$

Por Cardano: $a + b + c = 0$ y $abc = -1$

II) Además $a^3 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a^3 - 2a - a + 1 = 0$

$$\Rightarrow a(a^2 - 2) = a - 1$$

$$\Rightarrow -a = \frac{1-a}{a^2-2}$$

III) Luego

$$\Rightarrow F = \frac{1-a}{a^2-2} - b^3 + \frac{1-b}{b^2-2} - c^3 + \frac{1-c}{c^2-2} - a^3$$

$$\Rightarrow F = -a - b^3 + -b - c^3 + -c - a^3$$

$$\Rightarrow F = -a - b - c - b^3 - c^3 - a^3$$

$$\Rightarrow F = -(a + b + c) - (b^3 + c^3 + a^3) = -0 - 3(-1) = 3$$

IV) Por tanto $F + 5 = 8$.

Rpta.: A

2. Halle una ecuación de menor grado posible cuyas soluciones son cada una de las soluciones de: $\left| \left| \frac{x}{3} \right| - 4 \right| = |4 - |x||$.

A) $x^3 - 12x = 0$

B) $2x^3 - 16x = 0$

C) $x^3 - 9x = 0$

D) $\frac{x^3}{3} - 2x = 0$

E) $\frac{x^3}{4} - 9x = 0$

Solución:

$$\begin{aligned} \left| \left| \frac{x}{3} \right| - 4 \right| = |4 - |x|| &\Leftrightarrow \left| \frac{x}{3} \right| - 4 = 4 - |x| \quad \vee \quad \left| \frac{x}{3} \right| - 4 = |x| - 4 \\ &\Leftrightarrow 4|x| = 24 \quad \vee \quad |x| = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 6, 0 \end{aligned}$$

luego

$$(x-0)(x-6)(x+6) = x^3 - 36x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{4} - 9x = 0$$

Rpta.: E

3. Si $-\sqrt{3}$ y $2i$, son soluciones de la ecuación $x^5 + mx^4 - \left(\frac{m+n}{2}\right)x^3 - 6x^2 - (n+8)x + 72 = 0$, $m, n \in \mathbb{Q}$; indique el coeficiente del término lineal de la ecuación mónica de menor grado posible cuyas soluciones sean m , n y $\frac{n}{2}$.

A) -28 B) -26 C) 25 D) -25 E) 30

Solución:

Como $m, n \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ las soluciones de la ecuación son $a, 2i, -2i, \sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$
 luego por Cardano: $a(2i)(-2i)\sqrt{3}(-\sqrt{3}) = -72 \Rightarrow a = 6$

Además $(x-6)(x-2i)(x+2i)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = x^5 - 6x^4 + x^3 - 6x^2 - 12x + 72 = 0$
 así $m = -6$ y $n+8 = 12$, $n = 4$.

Por lo tanto la ecuación mónica de menor grado será:

$$0 = (x+6)(x-4)(x-2) = x^3 - (0)x^2 - 28x + 48$$

Luego el coeficiente del término lineal es -28 .

Rpta.: A

4. Juan es dueño de un lubricentro de automóviles y para atender a sus clientes tuvo que ir a la empresa «Todo para autos» y hacer un pedido de x^2 galones de aceite al precio de x^2 soles cada galón y $(4x)$ filtros de aire al precio de $(3x)$ soles cada uno. El monto a pagar por todo fue de 1900 soles, pero por ser un asiduo comprador de dicha empresa le hicieron un descuento de 172 soles. ¿Cuántos productos compró en total?

A) 52 B) 72 C) 61 D) 60 E) 49

Solución:

Gasto de aceite..... $(x^2)(x^2)$

Gasto en filtro de aire..... $(4x)(3x)$

Gasto total $x^4 + 12x^2 = 1900 - 172$

$$x^4 + 12x^2 - 1728 = 0$$

$$(x^2 - 36)(x^2 + 48) = 0$$

$$x^2 = 36$$

$$\Rightarrow x = 6$$

Nro de galones de aceite $x^2=36$

Nro de filtros de aire $4x=24$

En total de productos $36+24=60$

Rpta.: D

5. Al resolver la ecuación $\sqrt{|x-1|+|x-5|} = -1-x$, determine el cuadrado de la solución, disminuido en uno.

A) 12 B) 24 C) 16 D) 36 E) 8

Solución:

$$\sqrt{|x-1|+|x-5|} = -1-x$$

$$i) -1-x \geq 0 \Rightarrow -1 \geq x$$

$$ii) \sqrt{-x+1-x+5} = -1-x \Rightarrow (\sqrt{-2x+6})^2 = (-1-x)^2$$

$$-2x+6 = x^2+2x+1$$

$$0 = x^2+4x-5 = (x+5)(x-1) \Rightarrow x = -5 \vee x = 1$$

$$\Rightarrow x = -5$$

$$\therefore (-5)^2 - 1 = 24$$

Rpta.: B

6. Con respecto al conjunto solución de la ecuación $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 48x - 48 = 0$, se puede afirmar que:

A) Tiene solo 2 elementos reales.

B) La suma de las inversas de todos sus elementos es 1.

C) La suma de todos los módulos de sus elementos es $(2\sqrt{14} + 2\sqrt{48} + 1)$.

D) No tiene un elemento entero.

E) No tiene elemento real.

Solución:

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 48x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^4 + 2x^2 - 48) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2-6)(x^2+8) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, x = \sqrt{6}, x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{8}i, x = -\sqrt{8}i$$

$$\Rightarrow T = \{-1, \sqrt{6}, -\sqrt{6}, \sqrt{8}i, -\sqrt{8}i\}$$

Podemos observar que el conjunto solución, tiene 3 elementos reales y 2 no reales, además la suma de las inversas de todos sus elementos es -1 y la suma de los módulos de todos sus elementos es

$$|-1| + |\sqrt{6}| + |-\sqrt{6}| + |\sqrt{8}i| + |-\sqrt{8}i| = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{8} + 1 = 2\sqrt{14 + 2\sqrt{48}} + 1.$$

Rpta.: C

7. La edad de Junior en años, está dada por el valor de m en la ecuación bicuadrada $x^4 - 3(m+4)x^2 + (m+1)^2 = 0$, en la que sus soluciones se encuentran formando una progresión aritmética. Halle la edad que Junior tendrá dentro de 4 años.

A) 24 años B) 28 años C) 26 años D) 30 años E) 34 años

Solución:

Sean las soluciones $-3r, -r, r, 3r$

$$(3r)^2 + r^2 = 3(m+4) \Rightarrow 10r^2 = 3(m+4) \quad \dots *$$

$$(3r)^2 r^2 = (m+1)^2 \Rightarrow 9(r^2)^2 = (m+1)^2 \quad \dots **$$

$$\text{de } * \text{ y } **: 9\left(\frac{3(m+4)}{10}\right)^2 = (m+1)^2$$

$$\left(\frac{3(m+4)}{10}\right)^2 = \left(\frac{m+1}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{3(m+4)}{10} = \frac{m+1}{3} \vee \frac{3(m+4)}{10} = -\frac{m+1}{3}$$

$$\Rightarrow m = 26 \vee m = \frac{-46}{19}$$

Así la edad de Junior en 4 años será 30.

Rpta.: D

8. El producto de las soluciones no reales de la ecuación binómica en la variable x $x^3 + (n^2+n-6)x^2 + (3-2n-n^2)x + n^3 = 0$, representa la edad actual de Karla. ¿Cuál será la edad de Karla en $(n+5)$ años?

A) 16 años B) 18 años C) 20 años
D) 12 años E) 11 años

Solución:

Por ser binómica la ecuación

$$x^3 + (n^2 + n - 6)x^2 + (3 - 2n - n^2)x + n^3 = 0$$

se tiene que:

$$n^2 + n - 6 = 0 \quad \text{y} \quad 3 - 2n - n^2 = 0$$

$$\Rightarrow (n+3)(n-2) = 0 \quad \text{y} \quad (n+3)(n-1) = 0$$

$$\Rightarrow n = -3$$

Así la ecuación será $x^3 - 27 = 0$

$$(x-3)(\underbrace{x^2+3x+9}_{\Delta < 0}) = 0$$

$\Rightarrow x=3$ es una solución real y de la ecuación $x^2+3x+9=0$ se obtienen las soluciones no reales.

$\Rightarrow$ por Cardano, el producto de soluciones no reales es 9.

Karla tiene 9 años, dentro de $(n+5)$ años tendrá 11 años.

Rpta.: E

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si a , b y c son las soluciones de la ecuación $\frac{x^2-3}{1-x} = \frac{x}{x-4}$, con $a > b > c$, halle el volumen del paralelepípedo rectangular cuya medida de sus aristas son: $(b+3)m$, $(a+1)m$ y $(|c|+5)m$.

- A) 140 m^3 B) 128 m^3 C) 150 m^3 D) 132 m^3 E) 144 m^3

Solución:

Resolviendo: $\frac{x^2-3}{1-x} = \frac{x}{x-4}$

$$\Rightarrow (x^2-3)(x-4) = (1-x)x \Rightarrow x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = x - x^2$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) - 4(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x^2-4) = 0 \Rightarrow (x-3)(x-2)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x-3=0 \vee x-2=0 \vee x+2=0$$

$$\Rightarrow x=3 \vee x=2 \vee x=-2 \text{ son las soluciones.}$$

Por dato: a , b y c con $a > b > c$ son soluciones de la ecuación dada.

Luego, comparando e identificando: $a=3 \wedge b=2 \wedge c=-2$

Entonces reemplazando, el paralelepípedo rectangular tiene por aristas:

$$(a+1)m=4m, (b+3)m=5m \text{ y } (|c|+5)m=7m.$$

∴ El volumen del paralelepípedo rectangular, es: $(4m)(5m)(7m)=140 m^3$.

Rpta.: A

2. El ingreso mensual promedio en miles de euros de una persona que vive en España esta representado por el valor absoluto, de la suma de los valores enteros de a , para el cual, la ecuación $x^3 + (2-2a)x^2 + (13-6a)x + 48 = 0$ admite soluciones no reales. ¿Cuál es el ingreso mensual promedio en miles de euros de una persona que vive en Italia, si se sabe que gana 10% más que una persona que vive en España?

A) 4000 B) 3600 C) 2400 D) 4400 E) 4200

Solución:

- I. Factorizando la ecuación:

$$x^3 + (2-2a)x^2 + (13-6a)x + 48 = 0$$

$$(x+3)(x^2 - (1+2a)x + 16) = 0$$

Una solución real es $x = -3$

- II. Las soluciones no reales se obtiene de $x^2 - (1+2a)x + 16 = 0$

$$\rightarrow \Delta < 0$$

$$\rightarrow (1+2a)^2 - 4(16) < 0$$

$$\rightarrow (1+2a-8)(1+2a+8) < 0$$

$$\rightarrow a \in \left\langle \frac{-9}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle, \text{por tanto los valores de } a = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

El valor absoluto de la suma de valores de a es 4.

La persona que vive en España gana 4000 euros

Por tanto la persona que vive en Italia gana 4400 euros.

Rpta.: D

3. Si la edad que cumplirá Pascual en el año 2020 es igual a la suma de los cuadrados de cada solución de la ecuación $\sqrt[3]{2x^3 + 5x^2 - 2x + 32} = x+2$, ¿en qué año Pascual cumplirá 50 años?

A) 2041 B) 2036 C) 2050 D) 2029 E) 2063

Solución:

Resolviendo: $\sqrt[3]{2x^3 + 5x^2 - 2x + 32} = x + 2$

Elevando al cubo cada miembro, conseguimos:

$$\Rightarrow 2x^3 + 5x^2 - 2x + 32 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x^2 + x - 12) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x + 4)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \vee x + 4 = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \vee x = -4 \vee x = 3$$

$$\Rightarrow 2^2 + (-4)^2 + 3^2 = 4 + 16 + 9 = 29.$$

Entonces Pascual en el año 2020 tendrá 29 años, para cumplir 50 años le faltan 21 años, por lo tanto, Pascual en el 2041 cumplirá 50 años.

Rpta.: A

4. De la ecuación $2x^4 - 17x^3 + 45x^2 + (m - 20)x - 27 = 0$, se sabe que tiene una solución de multiplicidad 3. Si b es una solución simple de la ecuación, indique la ecuación bicuadrática cuyas soluciones sean $2(b + 1)$ y m .

A) $x^4 - 50x^2 - 49 = 0$

B) $2x^4 - 2x^2 - 12 = 0$

C) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$

D) $x^4 - 4x^2 - 21 = 0$

E) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$

Solución:

1. Sean a, a, a y b las soluciones de la ecuación.

2. Por Cardano:

i) $a + a + a + b = \frac{17}{2} \Rightarrow 3a + b = \frac{17}{2} \quad \dots (\alpha)$

ii) $a \cdot a + a \cdot a + a \cdot b + a \cdot a + a \cdot b + ab = \frac{45}{2}$

$$\Rightarrow 3a^2 + 3ab = \frac{45}{2} \Rightarrow a^2 + ab = \frac{15}{2} \quad \dots (\beta)$$

iii) $a^3 + a^2b + ba^2 + ba^2 = \frac{-(m - 20)}{2}$

$$\Rightarrow a^3 + 3ba^2 = \frac{20 - m}{2} \quad \dots (\gamma)$$

3. De (α) y (β) : $4a^2 - 17a + 15 = 0 \Rightarrow a = 3 \vee a = \frac{5}{4}$
4. Observa que $a = \frac{5}{4}$ no es un divisor de $\frac{27}{2} \Rightarrow a = 3$
5. Luego en (α) : como $a = 3 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$
6. Así en (γ) : $m = -7$
7. Por tanto la ecuac. bicuadrática cuyas soluciones son -7 y $2\left(-\frac{1}{2} + 1\right)$ será: $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$.

Rpta.: E

5. Cada sábado Lucia prepara $(x^2 + 8)$ porciones de ceviche, las vende al precio de $m(x + 3)$ soles cada porción y siempre vende todas sus porciones. Pero debido a los huaycos que hay en el país, se alzaron los precios en general; provocando que este último sábado el costo total de los ingredientes que requiere para preparar la misma cantidad de siempre sea de $(x^4 - x^2 - b)$ soles, el cual coincidió con el ingreso que obtenía todos los sábados. Razón por la cual, Lucia incrementó el precio de cada porción de ceviche en 3 soles, obteniendo este último sábado un ingreso de 240 soles, ¿cuál fue la ganancia de este último sábado?

A) S/ 72 B) S/ 68 C) S/ 168 D) S/ 78 E) S/ 124

Solución:

Ingreso de los sábados es $m(x + 3)(x^2 + 8)$

Por dato $m(x + 3)(x^2 + 8) = \text{costo} = (x^4 - x^2 - b)$, se observa que $x + 3$ es un factor de $(x^4 - x^2 - b)$ entonces $b = -72$

Así

$$x^4 - x^2 - 72 = m(x + 3)(x^2 + 8)$$

$$\Rightarrow m = x - 3$$

luego el precio de cada porción era de $m(x + 3) = x^2 - 9$.

El último domingo el ingreso fue de $\left[\underset{\text{precio nuevo}}{(x^2 - 9) + 3} \right] \underset{\text{nro de porciones}}{(x^2 + 8)} = x^4 + 2x^2 - 48$

$$\text{por dato } x^4 + 2x^2 - 48 = 240 \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 288 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 18)(x^2 - 16) = 0 \Rightarrow x^2 = 16$$

por lo tanto ganancia = ingresos - costos

$$= 240 - (x^4 - x^2 - 72)$$

$$= 240 - (16^2 - 16 - 72)$$

$$= 72$$

Rpta.: A

6. La cantidad de dinero en miles de dolares que Rogger tiene para la compra de un terreno esta representado por el mayor valor de la expresión $8(|2x-1|-2|x+5|)$. Si el terreno cuesta \$120 000. ¿Cuántos dolares le falta a Rogger para realizar la compra?

A) \$ 24 000 B) \$ 42 000 C) \$ 33 000 D) \$ 32 000 E) \$ 23 000

Solución:

$$x < -5: \quad 1 - 2x - 2(-x - 5) = 11$$

$$-5 \leq x < \frac{1}{2}: \quad 1 - 2x - 2(x + 5) = -4x - 9$$

$$\text{asi } -11 < -4x - 9 \leq 11$$

$$x \geq \frac{1}{2}: \quad 2x - 1 - 2(x + 5) = -11$$

por tanto el máximo valor de $8(|2x-1|-2|x+5|) = 8(11)$

Rogger tiene \$ 88 000, le falta \$ 32 000.

Rpta.: D

7. Las abejas son las responsables de reproducir la gran mayoría de las especies vegetales de nuestro ecosistema. Ellas son las encargadas de conectar lo que da origen a la vida de las flores y a los frutos que nos dan de comer. Dependemos de ellas para alimentarnos y sobrevivir, aun así permitimos que ellas mueran y con ello desaparezca el $(k^6 - k^3)\%$ de las plantas que conocemos antes de reproducirse, debido a la ausencia de estos agentes polinizadores. Encuentre el porcentaje de plantas que podría morir antes de reproducirse, sabiendo que k es la menor solución de $x^4 - (m+1)x^2 + m = 0$, $m \in \mathbb{Z}^+$, además la suma de sus soluciones positivas coincide con el 75% del producto de sus soluciones.

A) 60% B) 15% C) 72% D) 82% E) 24%

Solución:

$$x^4 - (m+1)x^2 + m = 0 \rightarrow (x^2 - m)(x^2 - 1) = 0$$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{m} \quad \vee \quad x = \pm 1$$

$$\text{Dato: } \sqrt{m} + 1 = \frac{3}{4}m \Rightarrow m = 4$$

$\rightarrow$ la menor solución es $-2 \Rightarrow k = -2$

$\therefore$ el % de plantas que podría morir antes de reproducirse es

$$((-2)^6 - (-2)^3)\% = 72\%$$

Rpta.: C

8. Si b es la suma de los cuadrados de las soluciones de la ecuación binómica $x^3 + (m-3)x^2 - (p-2m)x - 64 = 0$, calcule el valor de $b+m+p$.

A) 9 B) 7 C) 10 D) 12 E) 6

Solución:

Se observa que $m=3$, $p=6$, pues la ecuación es binómica

$$x^3 - 64 = 0$$

$$(x-4)(x^2+4x+16) = 0$$

$$x = 4, x = -2 + \sqrt{12}i, x = -2 - \sqrt{12}i$$

$$\text{luego } b = 4^2 + (-2 + \sqrt{12}i)^2 + (-2 - \sqrt{12}i)^2 = 0$$

Así $b+m+p=9$.

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si m es la suma de las inversas de las soluciones de la ecuación $6x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$, determine el producto de las raíces del polinomio $p(x) = (2m-1)x^3 - 6mx^2 + 2(5+m)x - (2m+1)$.

A) 3,5 B) 5 C) 3,75 D) 1,2 E) 1,5

Solución:

$$I) 6x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

Sean x_1, x_2, x_3 y x_4 soluciones de la ecuación

Por Cardano

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{5}{6}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Luego

$$m = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{5}{2}$$

$$II) p(x) = (2m-1)x^3 - 6mx^2 + 2(5+m)x - (2m+1)$$

$$p(x) = 4x^3 - 15x^2 + 15x - 6$$

$$\therefore \text{Producto raíces es: } \frac{6}{4} = 1,5$$

Rpta.: E

2. En una clase de álgebra, Paco analiza el polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + 17$ el cual genera números primos para valores enteros $0 \leq x \leq 10$. Él evalúa en el polinomio el número $n \in \mathbb{Z}$ y obtiene un número primo de la forma $(25n-3)$, ¿cuál fue el número primo que obtuvo Paco?

A) 67 B) 83 C) 97 D) 167 E) 89

Solución:

Polinomio generador de números primos: $p(x) = x^3 + x^2 + 17$; $0 \leq x \leq 10$, $x \in \mathbb{Z}$

$$p(n) = 25n - 3$$

$$n^3 + n^2 + 17 = 25n - 3 \Rightarrow n^3 + n^2 - 25n + 20 = 0$$

Factorizando

$$(n-4)(n^2 + 5n - 5) = 0 \Rightarrow n = 4 \vee n^2 + 5n - 5 = 0, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 4$$

$$\therefore 25n - 3 = 25(4) - 3 = 97$$

Rpta.: C

3. Dos de las soluciones de una ecuación bicuadrática mónica son también de la cuadrática $x^2 - 4x + 13 = 0$. Calcule la diferencia de la suma de los coeficientes con el término independiente de dicha ecuación bicuadrática.

A) 9 B) 20 C) 11 D) 13 E) 10

Solución:

I) Hallando las soluciones α y β de la ecuación

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 + 3i, \beta = 2 - 3i$$

II) Luego las soluciones de la ecuación bicuadrática son :

$$2 + 3i, 2 - 3i, -2 - 3i, -2 + 3i$$

$\Rightarrow$ La ecuación bicuadrática mónica es:

$$(x - (2 + 3i))(x - (2 - 3i))(x - (-2 - 3i))(x - (-2 + 3i)) = 0$$

$$\Rightarrow x^4 + 10x^2 + 169 = 0$$

$$\therefore \sum \text{coef} - \text{t.i.} = 180 - 169 = 11$$

Rpta.: C

4. Los lados de un cuadrado miden $(8 - x)$ m y $2|x - 2|$ m. Además, el perímetro de un triángulo equilátero de lado $\sqrt{y}$ m es $|y + 2|$ m. Determine el área máxima de una circunferencia de radio $(x + y)$ m.

A) $64\pi \text{ m}^2$ B) $16\pi \text{ m}^2$ C) $81\pi \text{ m}^2$ D) $36\pi \text{ m}^2$ E) $25\pi \text{ m}^2$

Solución:

$$I) 8 - x = 2|x - 2|$$

$$\Rightarrow 8 - x \geq 0 \wedge [8 - x = 2(x - 2) \vee 8 - x = 2(-x + 2)]$$

$$\Rightarrow x \leq 8 \wedge [x = 4 \vee x = -4]$$

$$\text{II) } 3\sqrt{y} = |y + 2|$$

Elevando al cuadrado

$$9y = y^2 + 4y + 4 \Rightarrow 0 = y^2 - 5y + 4$$

$$\Rightarrow x \leq 8 \wedge [y = 4 \vee y = 1]$$

Entonces $(x + y)$ máximo es : 8

Por lo tanto

El área máxima de la circunferencia es: $64\pi \text{ m}^2$

Rpta.: A

5. En cierto experimento, la temperatura (en $^{\circ}\text{C}$) de un mismo tipo de objeto en dos medios distintos está representado por $T_1(t) = \sqrt{4t - 15}$ y $T_2(t) = t - 3$, respectivamente. ¿Cuál es la máxima temperatura en que puede coincidir el objeto bajo esos dos medios ambientes?

A) 3 $^{\circ}\text{C}$ B) 1 $^{\circ}\text{C}$ C) 2 $^{\circ}\text{C}$ D) 6 $^{\circ}\text{C}$ E) 4 $^{\circ}\text{C}$

Solución:

Como ambas temperaturas deben coincidir, entonces: $T(t) = \sqrt{4t - 15} = t - 3$

I) Existencia: $4t - 15 \geq 0 \wedge t - 3 \geq 0$

II) En la ecuación elevando al cuadrado

$$\rightarrow \sqrt{4t - 15}^2 = (t - 3)^2, \quad t \geq \frac{15}{4} \quad \text{y} \quad t \geq 3$$

$$\rightarrow 4t - 15 = t^2 - 6t + 9$$

$$\rightarrow 0 = t^2 - 10t + 24$$

$$\rightarrow t = 6 \vee t = 4$$

Para $t = 4$, entonces $T(4) = 1^{\circ}\text{C}$

Para $t = 6$, entonces $T(6) = 3^{\circ}\text{C}$

Rpta.: A

6. Si m la solución de la ecuación $\sqrt{2x - 5} + \sqrt[3]{4x - 4} = 3$, entonces podemos afirmar que la ecuación $mx^{m^2 - 6} - (4m + 6)x^{|m| - 3} + (m - 3)x^2 = 0$:

A) Es bicuadrática B) Tiene solo soluciones reales
C) Es binómica D) Tiene una solución entera
E) No tiene ninguna solución real

Solución:

$$I) \sqrt{2x-5} = 3 - \sqrt[3]{4x-4}$$

$$(1) \text{Existencia: } 2x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

(2) En la ecuación elevando al cuadrado:

$$2x-5 = 9 - 6\sqrt[3]{4x-4} + (4x-4)^{\frac{2}{3}}$$

$$2x-14 = (4x-4)^{\frac{2}{3}} - 6(4x-4)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 4x-28 = 2(4x-4)^{\frac{2}{3}} - 12(4x-4)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Sea } y = (4x-4)^{\frac{1}{3}}$$

$$y^3 - 24 = 2y^2 - 12y \Rightarrow y^3 - 2y^2 + 12y - 24 = 0$$

Factorizando

$$(y-2)(y^2+12) = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow (4x-4)^{\frac{1}{3}} = 2 \Rightarrow 4x-4 = 8 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow m = 3$$

$$II) mx^{m^2-6} - (4m+6)x^{|m|-3} + (m-3)x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 18 = 0 \Rightarrow x^3 - 6 = 0 \text{ (Es una ecuación binómica)}$$

Factorizando

$$\Rightarrow (x - \sqrt[3]{6})(x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{6}^2) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x = \sqrt[3]{6}}_{\text{solución real}} \vee \underbrace{x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{6}^2}_{\text{soluciones no reales}} = 0$$

Rpta.: C

7. Pedro le preguntó a Wálter sobre la edad de su hijo y Wálter responde así: Si al valor absoluto, de la suma de la edad de mi hijo con 3, le restas la raíz cuadrada, del exceso que tiene 3 con el valor absoluto de la edad de mi hijo, resultaría la edad de mi hijo aumentado en 2. ¿Cuántos años de edad tiene el hijo de Walter?

A) 3 años B) 1 año C) 2 años D) 5 años E) 4 años

Solución:

Sea x la edad del hijo de Walter (en años): $x \in \mathbb{Z}^+$

Planteamiento

$$|x+3| - \sqrt{3-|x|} = x+2, \text{ como } x \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow |x+3| - \sqrt{3-x} = x+2$$

$$I) \text{Existencia: } 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow 0 < x \leq 3$$

$$\Rightarrow 3 < x+3 \leq 6 \Rightarrow |x+3| = x+3$$

II) En la ecuación

$$x + 3 - \sqrt{3 - x} = x + 2 \Rightarrow \sqrt{3 - x} = 1$$

Elevando al cuadrado

$$3 - x = 1 \Rightarrow x = 2$$

$\therefore$ El hijo de Walter tiene 2 años.

Rpta.: C

8. La avenida Salaverry se caracteriza por los árboles que tiene en medio de la avenida, si la altura de un árbol de ficus es de $(k - 7)$ metros, donde k es la suma de los coeficientes de un polinomio mónico, de menor grado con coeficientes enteros y que tiene por raíz $r = \sqrt[3]{2} + i$, halle la altura de un árbol de cedro, que tiene una altura de 8 metros más con respecto al árbol de ficus.

A) 28 metros

B) 18 metros

C) 20 metros

D) 21 metros

E) 16 metros

Solución:

I. Como $r = \sqrt[3]{2} + i$

$$\Rightarrow (r - i)^3 = \sqrt[3]{2}^3$$

$$\Rightarrow r^3 - 3r^2i + 3ri^2 - i^3 = 2$$

$$\Rightarrow r^3 - 3r - 2 = (3r^2 - 1)i$$

Elevando al cuadrado

$$\Rightarrow (r^3 - 3r - 2)^2 = ((3r^2 - 1)i)^2$$

$$\Rightarrow r^6 + 9r^2 + 4 - 6r^4 + 12r - 4r^3 = -(9r^4 - 6r^2 + 1)$$

$$\Rightarrow r^6 + 3r^4 - 4r^3 + 3r^2 + 12r + 5 = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = x^6 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 12x + 5$$

II. k = suma de coeficientes de $p(x) = 20$

Por lo tanto

La altura de un árbol de cedro: $k - 7 + 8 = 21$ metros

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. David quiere cercar con un alambre su jardín de forma rectangular cuyas dimensiones (en metros) son la suma de las inversas de las soluciones y el valor absoluto del producto de las inversas de las soluciones de la ecuación $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$. Determine cuanto pagará por el cercado de dicho jardín si cada metro de alambre cuesta S/ 8.

A) S/ 126 B) S/ 112 C) S/ 163 D) S/ 72 E) S/ 81

Solución:

Sean a, b, c y d soluciones de la ecuación, entonces las dimensiones del terreno son:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd} = 3$$

$$\left| \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d} \right| = \left| \frac{1}{abcd} \right| = 4$$

Perímetro: $2(3 + 4) = 14$

Pagará: $14(8) = 112$ soles

Rpta.: B

2. Silvia va a comprar con N soles al Mall Plaza; si $\overline{(2m)(m-1)}$ es la cantidad en soles que le queda luego de realizar la compra de un pantalón, un polo y un correa cuyos precios son, respectivamente, 45, 15 y 20, soles y m es tal que las ecuaciones $x^3 + mx^2 + 18 = 0 \wedge x^3 + nx + 12 = 0$ tienen dos soluciones comunes, halle N .

A) 100 B) 121 C) 150 D) 142 E) 163

Solución:

Sean

I) $x^3 + mx^2 + 18 = 0 \rightarrow CS = \{a, b, c\}$

II) $x^3 + nx + 12 = 0 \rightarrow CS = \{a, b, d\}$

Aplicando Cardano – Viette en I)

$$a + b + c = -m \quad \dots (1)$$

$$abc = -18 \quad \dots (2)$$

Aplicando Cardano – Viette en II)

$$a + b + d = 0 \quad \dots (3) \rightarrow (3) - (1) \quad d - c = m \dots (*)$$

$$abd = -12 \quad \dots (4) \rightarrow (2) \div (4) \quad \frac{c}{d} = \frac{3}{2} \rightarrow c = 3k \wedge d = 2k$$

$$\text{en } (*): k = -m$$

$$c = -3m \text{ solución de la ecuación } x^3 + mx^2 + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (-3m)^3 + m(-3m)^2 + 18 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$\text{queda} = (2m)(m-1) = 20$$

$$N = [45 + 15 + 20] + 20 = 100$$

Rpta.: A

3. Si la edad de Guillermo hace $\overline{ab}$ años fue $\overline{ba}$ años, donde $\overline{ba}$ se obtiene de sumar los módulos de las soluciones no reales, al cuadrado de la ecuación $(x^3 + x)^2 = 4$, determine la edad actual de Guillermo.

A) 77 años B) 44 años C) 55 años D) 66 años E) 33 años

Solución:

$$(x^3 + x)^2 = 4 \Rightarrow x^3 + x = 2 \vee x^3 + x = -2$$

$$\Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \vee x^3 + x + 2 = 0$$

Factorizando

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0 \vee (x+1)(x^2-x+1) = 0$$

$$x = 1 \vee \underbrace{x^2+x+1}_{x=\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}} = 0 \vee x = -1 \vee \underbrace{x^2-x+1}_{x=\frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}} = 0$$

$$\overline{ba} = \left[\left| \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2} \right| + \left| \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2} \right| + \left| \frac{1 + \sqrt{7}i}{2} \right| + \left| \frac{1 - \sqrt{7}i}{2} \right| \right]^2 = 32 \Rightarrow b = 3, a = 2$$

Luego

La edad de Guillermo hace 23 años fue de 32 años

Por lo tanto:

La edad actual de Guillermo es de 55 años.

Rpta.: C

4. Sean a y c soluciones de la ecuación $|x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 64x^2 - 112x + 64| = 0$.

Si a es una solución que se repite n veces ($n \neq 1$) y c es la menor solución, halle el volumen de un paralelepípedo donde las medidas en metros de las dimensiones son $(a+n)$, $|a+c|$ y $|c|$.

- A) 24 m^3 B) 72 m^3 C) 40 m^3 D) 32 m^3 E) 48 m^3

Solución:

$$|x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 64x^2 - 112x + 64| = 0 \Rightarrow x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 64x^2 - 112x + 64 = 0$$

Factorizando :

$$(x-2)^4(x+4) = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \vee x+4 = 0$$

$\Rightarrow$ Las soluciones son

$$x = 2 (\text{se repite 4 veces}) \vee x = -4$$

$$a = 2, n = 4, c = -4$$

Luego las dimensiones tiene por medidas : 6, 2 y 4 metros

Por lo tanto

$$\text{Volumen} = 6(2)(4) = 48 \text{ m}^3$$

Rpta.: E

5. Si la edad de Adriana esta dada por la diferencia de las soluciones positivas de la ecuación bicuadrática $(m-3)x^4 + (m^2-16)x^3 - (m^3+m^2+m+1)x^2 + (n^4-81)x + mn^m = 0$; $m, n \in \mathbb{Z}^+$, halle su edad dentro de 13 años.

- A) 18 años B) 24 años C) 20 años D) 26 años E) 32 años

Solución:

De la ecuación bicuadrática

$$(m-3)x^4 + (m^2-16)x^3 - (m^3+m^2+m+1)x^2 + (n^4-81)x + mn^m = 0; m, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m = 4$$

$$n^4 - 81 = 0 \Rightarrow (n^2+9)(n+3)(n-3) = 0 \Rightarrow n = 3$$

$$\Rightarrow x^4 - 85x^2 + 324 = 0$$

Factorizando

$$(x-2)(x+2)(x-9)(x+9) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, x = -2, x = 9, x = -9$$

Edad actual de Adriana: $9 - 2 = 7$

Por lo tanto:

Dentro de 13 años tendrá: 20 años.

Rpta.: C

6. Una de las soluciones de la ecuación $\sqrt[7]{x} + \sqrt[5]{x} = 3\sqrt[35]{x^6}$ tiene la forma $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, calcule el valor de n .

A) 7 B) 5 C) 35 D) 15 E) 3

Solución:

Sea $a = \sqrt[35]{x} \Rightarrow x = a^{35}$

Reemplazando en la ecuación, tenemos

$$a^5 + a^7 = 3a^6 \Rightarrow a^7 - 3a^6 + a^5 = 0$$

$$\Rightarrow a^5(a^2 - 3a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee \underbrace{a^2 - 3a + 1}_{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow a = 0, \quad a = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[35]{x} = 0, \quad \sqrt[35]{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad \sqrt[35]{x} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$x = 0, \quad x = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{35} \quad y \quad x = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{35}$$

Entonces las soluciones son: $0, \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Por lo tanto $n = 35$.

Rpta.: C

7. Alicia compra tantas tarjetas navideñas como su precio unitario, donde el precio de cada tarjeta es igual a m soles. Determine el gasto total realizado por Alicia, sabiendo que m es solución de la siguiente ecuación $\sqrt{15 + \sqrt{-4x^2 + 12x + 216}} = \sqrt{x+6} + 2$.

A) 100 soles B) 25 soles C) 49 soles
D) 81 soles E) 64 soles

Solución:

$$\text{I) Existencia: } -4x^2 + 12x + 216 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 54 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq x \leq 9$$

II) De la ecuación

$$\sqrt{15 + \sqrt{-4x^2 + 12x + 216}} = \sqrt{x+6} + 2$$

$$\sqrt{15 + 2\sqrt{(x+6)(9-x)}} = \sqrt{x+6} + 2$$

$$\sqrt{9-x} + \sqrt{x+6} = \sqrt{x+6} + 2 \Rightarrow \sqrt{9-x} = 2 \Rightarrow 9-x = 4 \Rightarrow x = 5$$

$\Rightarrow$ De I) y II) se tiene $m = 5$

$\Rightarrow$ Precio de cada tarjeta : 5 soles

Gasto en total: $5(5) = 25$ soles

Rpta.: B

8. Si k es la menor solución de la ecuación binómica $x^6 - 16 = 0$, determine un polinomio $p(x)$ mónico de menor grado con coeficiente enteros donde $(2k - 1)$ sea raíz.

A) $p(x) = (x+1)^3 + 600$

B) $p(x) = (x-1)^3 + 500$

C) $p(x) = (x-1)^3 - 500$

D) $p(x) = (x+1)^3 + 500$

E) $p(x) = (x+1)^3 - 600$

Solución:

$$\text{I) } x^6 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x^3 + 4)(x^3 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow (x + \sqrt[3]{4})\left(x^2 - \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{4}^2\right)(x - \sqrt[3]{4})\left(x^2 + \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{4}^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt[3]{4} \vee \underbrace{x^2 - \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{4}^2}_{\text{soluciones no reales}} = 0 \vee x = \sqrt[3]{4} \vee \underbrace{x^2 + \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{4}^2}_{\text{soluciones no reales}} = 0 \Rightarrow k = -\sqrt[3]{4}$$

II) Sea

$$r = 5k - 1 = -5\sqrt[3]{4} - 1 \Rightarrow r + 1 = -5\sqrt[3]{4} \Rightarrow (r+1)^3 = -500 \Rightarrow (r+1)^3 + 500 = 0$$

Luego

El polinomio mónico de menor grado con coeficiente entero donde $r = (2k - 1)$ es raíz será: $p(x) = (x+1)^3 + 500$

Rpta.: D

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

13
semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Definición. Una matriz es un arreglo rectangular de números ordenados en filas y columnas.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & -4 \\ 9 & 8 & -7 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{4 \times 1}.$$

Para el caso de matrices cuadradas como lo son las matrices A y B de los ejemplos anteriores, podemos calcular su determinante, el cual tiene como una de sus aplicaciones dar información, tanto cualitativa como cuantitativa de un sistema lineal.

Determinantes de orden 2

Definición. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ el determinante de A denotado por $|A|$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$), se define

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Ejemplos:

$$1) \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = (5)(4) - (-8)(2) = 20 + 16 = 4.$$

$$2) \quad \begin{vmatrix} a+1 & a-5 \\ a & a-6 \end{vmatrix} = (a+1)(a-6) - (a-5)a = a^2 - 5a - 6 - (a^2 - 5a) = -6.$$

$$3) \quad \begin{vmatrix} i & \sqrt{2} \\ -\sqrt{18} & i^{19} \end{vmatrix} = (i)(i^{19}) - (-\sqrt{18})(\sqrt{2}) = i^{20} + \sqrt{36} = 1 + 6 = 7.$$

Aplicación de los determinantes a los sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables

Sea el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas “x” e “y”

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases} \quad (1)$$

Definición. Se llama solución del sistema (1) al par ordenado (x_0, y_0) que verifica las dos ecuaciones en el sistema (1).

Asociado al sistema (1), tenemos los determinantes:

1). $\Delta_s = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$: determinante del sistema formado por los coeficientes de las incógnitas.

↓

2). $\Delta_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}$: determinante asociado a x.

↓

3). $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$: determinante asociado a y.

Regla de Cramer. La solución (x, y) del sistema (1) viene dado por

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}$$

Clasificación de los sistemas lineales

I). El sistema (1) es compatible determinado si $\Delta_s \neq 0$.

En este caso el sistema (1) tiene una única solución dada por

$$(x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta_s}, \frac{\Delta_y}{\Delta_s} \right).$$

Observación: una forma práctica de indicar que el sistema (1) es compatible determinado es considerar:

$$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}, \text{ si } cd \neq 0.$$

II). El sistema (1) es compatible indeterminado si $\Delta_s = \Delta_x = \Delta_y = 0$.

En este caso (1) tiene infinitas soluciones.

Observación: una forma práctica de indicar que el sistema (1) tiene infinitas soluciones es considerar:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{n}, \text{ si } cdn \neq 0.$$

III). El sistema (1) es incompatible o inconsistente si

$$\Delta_s = 0 \wedge [\Delta_x \neq 0 \vee \Delta_y \neq 0].$$

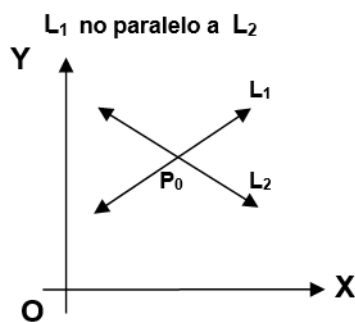
En este caso el sistema (1) no tiene solución.

Observación: una forma práctica de indicar que el sistema (1) no tiene solución es considerar:

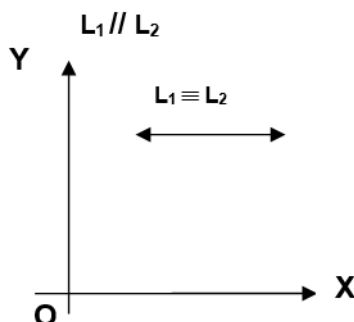
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{m}{n}, \text{ si } cdn \neq 0$$

Interpretación geométrica del sistema (1)

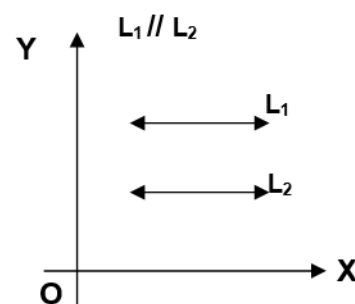
El sistema (1) representa la ecuación de 2 rectas en el plano, lo cual implica sólo una de las posiciones siguientes.



$\exists! P_0 / L_1 \cap L_2 = \{P_0\}$
Única solución



$L_1 \cap L_2 = L_1$
Infinitas soluciones



$L_1 \cap L_2 = \emptyset$
No tiene soluciones

Sistema homogéneo

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

Si en el sistema (1) hacemos $m = n = 0$ diremos que (1) es un sistema lineal homogéneo, se presentan dos casos:

- 1). **Solución única**: Si $\Delta_s \neq 0$, entonces $(0, 0)$ es la única solución llamada solución trivial.
- 2). **Infinitas soluciones**: Si $\Delta_s = 0$, entonces obtenemos un número infinito de soluciones llamadas soluciones no triviales, además de la solución trivial.

Sistema no lineal

Definición. Un sistema no lineal es una colección de dos o más ecuaciones, donde por lo menos una de ellas es no lineal.

Ejemplos:

$$1) \begin{cases} x + y - 2(z + 1) = 6 \\ 2xyz^2 = 13 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} xy + x + y = 80 \\ x^2 + y^2 = 281 \end{cases}$$

Observación:

- 1). Para el caso de sistemas no lineales no disponemos de una herramienta algebraica estándar que nos permita resolver dichos sistemas.
- 2). Los sistemas de ecuaciones no lineales se pueden resolver por métodos algebraicos como: un cambio de variable adecuado, productos notables, etc.

- 3). Geométricamente una ecuación no lineal $f(x,y) = c$ representa una curva en el plano, pensemos por ejemplo en la trayectoria de un insecto, la pregunta hecha en un sistema no lineal es como se cortan dos curvas, lo cual no es fácil responder.

Determinantes de Orden 3

Regla de Sarrus

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} c_1 & b_2 & a_3 \\ c_2 & b_3 & a_1 \\ c_3 & b_1 & a_2 \\ \hline & N & \end{array} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{ccc} a_1 & b_2 & c_3 \\ a_2 & b_3 & c_1 \\ a_3 & b_1 & c_2 \\ \hline & M & \end{array}$$

$$M = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2$$

$$N = c_1 b_2 a_3 + c_2 b_3 a_1 + c_3 b_1 a_2$$

$$\Delta = M - N$$

- **Determinante de Vandermonde**: Es de la forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Nos ubicamos en la 2da fila y hacemos los productos de las diferencias de acuerdo a la forma indicada.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} = (4-3)(3-2)(4-2) = 2$$

♦ **Propiedades de los Determinantes**

1. Si un determinante tiene en todos los elementos de una fila o columna un factor común, este puede salir como factor fuera del determinante.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 18 & 1 \\ 3 & 24 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6(1) & 2 \\ 2 & 6(3) & 1 \\ 3 & 6(4) & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

↑
6 es factor común en la columna 2

2. Si dos filas o dos columnas son iguales o proporcionales, entonces el determinante es igual a cero.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \\ 12 & 20 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \\ 4(3) & 4(5) & 4(4) \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Prop 1}} 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

3. Si se intercambian dos filas o dos columnas, su valor cambia de signo.

Ejemplos:

a). $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$

b). $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$

4. Si los elementos de una fila (o columna) de un determinante son la suma algebraica de varias cantidades, el determinante se descompone en tantos determinantes como términos tiene la suma.

$$\begin{vmatrix} a+m & b & c \\ d+n & e & f \\ q+p & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ q & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & b & c \\ n & e & f \\ p & h & k \end{vmatrix}.$$

5. Si a cada uno de los elementos de una fila o columna se le multiplica por “m” y este resultado se le suma a otra fila o columna, el determinante no se altera.

Ejemplos:

$$a). \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$$C_2 - 2C_1$$

$$C_3 - 3C_1$$

$$b). \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 11 \\ 4 & -1 & 15 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 10$$

donde C_i es la columna i , para $i = 1, 2, 3$.

6. Si se intercambian las filas por las columnas en un determinante, su valor no se altera; es decir,

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ h & i & j \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{vmatrix} a & d & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{vmatrix}$$

7. Si todos los elementos de una fila o columna son ceros, el determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & q \\ n & 0 & r \\ p & 0 & s \end{vmatrix} = 0$$

Aplicación de los determinantes a los sistemas de tres ecuaciones lineales en tres variables

Sea el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas “x”, “y” e “z”:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \dots \quad (\text{I}) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Definición: se llama solución del sistema (I) a la terna (x_0, y_0, z_0) que verifica las tres ecuaciones. Asociado al sistema (I), tenemos los determinantes:

$$1). \Delta_S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : \text{determinante del sistema.}$$

$$\downarrow$$

$$2). \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : \text{determinante asociado a } x.$$

$$\downarrow$$

$$3). \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} : \text{determinante asociado a } y.$$

$$\downarrow$$

$$4). \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} : \text{determinante asociado a } z.$$

Se presentan los siguientes casos:

I. **Solución única**: (Sistema compatible determinado)

El Sistema (I) tiene solución única si $\Delta_s \neq 0$. Además, se puede usar la regla de Cramer para hallar las componentes de la solución:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta_s}$$

luego el conjunto solución (C.S.), es

$$\text{C.S.} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R} / \left(\frac{\Delta_x}{\Delta_s}, \frac{\Delta_y}{\Delta_s}, \frac{\Delta_z}{\Delta_s} \right) \right\}.$$

Ejemplo:

Resuelva el siguiente sistema
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - 2y - 4z = -3 \\ 5x - y - z = 4 \end{cases}$$

Solución:

El determinante de los coeficientes de las incógnitas del sistema es:

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -48 \neq 0 \Rightarrow \text{El sistema tiene solución única.}$$

Ahora, calculamos la solución del sistema utilizando la Regla de Cramer:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -48, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -4 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 48,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -96$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-48}{-48} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{48}{-48} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-96}{-48} = 2$$

$$\therefore \text{C.S.} = (1, -1, 2).$$

II. **Infinitas soluciones:** (Sistema compatible indeterminado)

Si el sistema (I) tiene infinitas soluciones, si se cumple que

$$(\Delta_S = 0) \wedge (\Delta_x = 0 \text{ y } \Delta_y = 0 \text{ y } \Delta_z = 0)$$

Ejemplo:

Resuelva el siguiente sistema :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = 5 \\ 3x - 6y + 3z = 12 \end{cases}.$$

Se tiene $\Delta_S = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Simplificando en la tercera ecuación del sistema dado:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = 5 \\ x - 2y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ -2y + z = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, el sistema dado tiene infinitas soluciones las cuales son de la forma: $(x, y, z) = (3, t, 1 + 2t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

III. **Sistema sin solución:** (Sistema inconsistente o incompatible)

Si el sistema (I) no tiene solución, si se cumple que

$$(\Delta_S = 0) \wedge (\Delta_x \neq 0 \text{ ó } \Delta_y \neq 0 \text{ ó } \Delta_z \neq 0).$$

Ejemplo:

En el sistema
$$\begin{cases} x + 8y - 5z = 3 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases}$$
, determine si tiene o no solución.

Solución:

Se tiene
$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x + 8y - 5z = 3 \dots\dots\dots(\alpha) \\ 3x - 2y + 3z = 1 \dots\dots\dots(\beta) \\ 2x + 3y - z = 4 \dots\dots\dots(\delta) \end{cases}$$

De $(\alpha) + (\beta)$: $4x + 6y - 2z = 4 \rightarrow 2x + 3y - z = 2 \dots\dots\dots(*)$

De las ecuaciones $(*)$ y (δ) se tendría: $2 = 4$ ¡absurdo!

Por tanto, el sistema es incompatible.

Observación:

Para resolver los casos de sistemas de infinitas soluciones y sistemas sin solución, comience calculando $\Delta = 0$, luego simplifique las ecuaciones para obtener una conclusión.

Sistema homogéneo

Si en el sistema (I) hacemos $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ entonces el sistema se denomina homogéneo, es decir,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \quad (\text{II})$$

- I. **Solución única:** Si $\Delta_S \neq 0$ entonces existe una única solución, llamada solución trivial, la cual es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Ejemplo:

En el sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \Delta_S = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$

la solución única es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

- II. **Soluciones no triviales:** Si $\Delta_S = 0$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones no triviales, además de la solución trivial.

Ejemplo:

En el sistema

$$\begin{cases} 5x - 5y + z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta_S = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

El sistema tiene infinitas soluciones no triviales además de la trivial.

OFERTA Y DEMANDA

La demanda

Indica la cantidad de un bien que los consumidores están dispuestos a comprar en función de su precio.

La oferta

Indica la cantidad de un bien que los productores están dispuestos a producir y vender a un determinado precio.

La ley de la demanda

Es la relación inversa existente entre el precio de un bien y la cantidad demandada, en el sentido de que, cuando se reduce el precio, aumenta la cantidad demandada, mientras que, cuando aumenta el precio, se disminuye la cantidad demandada.

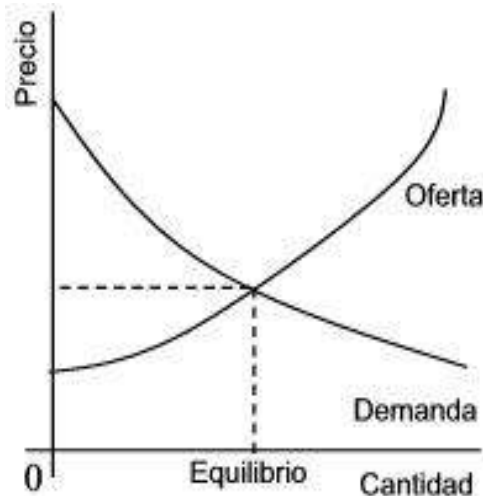
La ley de la oferta

Expresa la relación directa que existe entre el precio de un bien y la cantidad ofrecida: al aumentar el precio, se incrementa la cantidad ofrecida.

EQUILIBRIO EN EL MERCADO

“Un mercado se encuentra en equilibrio cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. De esta manera se determinan el precio y la cantidad de equilibrio”

El punto de intersección de las curvas de la oferta y la curva de la demanda recibe el nombre del punto de equilibrio.



EXCESO DE DEMANDA: Es la situación en la que, para un precio determinado, la cantidad demandada es mayor que la cantidad ofrecida.

EXCESO DE OFERTA: Es la situación en la que, para un precio determinado, la cantidad ofrecida es mayor que la cantidad demandada.

Aplicación de la oferta y demanda en los sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables

Ejemplo:

Una empresa oferta 3 pantalones a un precio de 100 soles cada uno y cuando ofrece 22 pantalones, el precio es de 290 soles por unidad. (Ecuación de la oferta es lineal).

La demanda de pantalones está dada por la ecuación: $p = -6q + 150$; donde p es precio en soles y q representa la cantidad demandada de pantalones.

1). Indique el punto de equilibrio y el ingreso del vendedor en el equilibrio.

2). Determine que sucede si se fija un precio de 90 soles.

Solución:

1). Determinando la ecuación de la oferta:

$$p = aq + b$$

$$\begin{cases} 100 = 3a + b \\ 290 = 22a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 190 = 19a \Rightarrow a = 10$$

$$\text{Además: } b = 70$$

$$\Rightarrow p = 10q + 70.$$

$$\text{Ecuación de la demanda: } p = -6q + 150$$

$$\begin{cases} p = 10q + 70 \\ p = -6q + 150 \end{cases}$$

Calculando el punto de equilibrio:

$$10q + 70 = -6q + 150$$

$$16q = 80 \Rightarrow q = 5$$

$$\text{Además: } p = 120$$

Punto de equilibrio (5;120)

$$\text{Ingreso} = 120(5) = 600 \text{ soles.}$$

2). Oferta Demanda

p	q	p	q
90	2	90	10

$\therefore$ Existe un exceso de demanda de 8 unidades.

Álgebra

EJERCICIOS

1. Al resolver $T(x,y) = \begin{vmatrix} x+y & xy \\ 1 & x+y \end{vmatrix}$, la edad que tiene María es $T(1,2)$ años y la de su hermano es $T(2,3)$ años. ¿Cuál es la diferencia positiva de las edades de María y de su hermano?

A) 12 años B) 11 años C) 13 años D) 10 años

Solución:

$$T(x,y) = \begin{vmatrix} x+y & xy \\ 1 & x+y \end{vmatrix} = x^2 + xy + y^2$$

$$\Rightarrow T(1,2) = 7, T(2,3) = 19$$

Luego, por dato :

Edad de María : 7 años

Edad del hermano de María : 19 años

$\therefore$ La diferencia positiva de las edades entre María y su hermano, es:
19 años – 7 años = 12 años.

Rpta.: A

2. Si el sistema en x e y $\begin{cases} (a+2)x + (3a-2)y = 7(b+3) \\ (a-1)x + 5y = 5b \end{cases}$, tiene infinitas soluciones, donde $a, b \in \mathbb{Z}$, halle la suma de cifras de $a^2 + b^2$.

A) 10 B) 12 C) 13 D) 11

Solución:

Por ser un sistema que tiene infinitas soluciones:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{a+2}{a-1}}_{(I)} = \underbrace{\frac{3a-2}{5}}_{(II)} = \underbrace{\frac{7(b+3)}{5b}}_{(III)}; a \neq 1, b \neq 0$$

$$\text{De (I) = (II): } 3a^2 - 10a - 8 = 0 \Rightarrow a = 4 \vee a = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a = 4 \text{ pues } a \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Reemplazando en (II) = (III): } b = 7$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65$$

$\therefore$ La suma de cifras es: $6 + 5 = 11$.

Rpta.: D

3. Calcule x, en el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + my + m^2 z = m^3 \\ x + ny + n^2 z = n^3 \\ x + py + p^2 z = p^3 \end{cases},$$

si m, n y p son números reales y diferentes entre sí.

A) mnp

B) - mn

C) - mnp

D) mn

Solución:

i). Para hallar la determinante del sistema, usamos la propiedad 6 de determinante de orden 3 y la determinante de Vandermonde:

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ 1 & n & n^2 \\ 1 & p & p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & n & p \\ m^2 & n^2 & p^2 \end{vmatrix} = (p-m)(p-n)(n-m) \neq 0$$

ii). Calculando la determinante asociada a x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m^3 & m & m^2 \\ m^3 & n & n^2 \\ p^3 & p & p^2 \end{vmatrix} = mnp \begin{vmatrix} m^2 & 1 & m \\ m^2 & 1 & n \\ p^2 & 1 & p \end{vmatrix} = mnp \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & n & p \\ m^2 & n^2 & p^2 \end{vmatrix} = mnp\Delta_S$$

iii). Luego, por Regla de Cramer:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_S} = \frac{mnp\Delta_S}{\Delta_S} = mnp.$$

$$\therefore x = mnp.$$

Rpta.: A

4. Si m y n con $m < n$ son los valores que hacen que el sistema en x, y e z

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 3 \\ 2x - y + az = 1 \\ -x + 2y + az = 2 \end{cases},$$

no tenga solución única, halle el valor de $|n - m|$.

A) 1

B) 3

C) 7

D) 2

Solución:

El sistema dado no tiene solución única si $\Delta_S = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-a^2 - a + 8) - (2a^2 + 2a + 2) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \vee a = 1$$

Luego, por dato : $m = -2 \wedge n = 1$

$$\therefore |m - n| = |(-2) - 1| = |-3| = 3.$$

Rpta.: B

5. La suma de cifras de un número capicúa de cinco cifras es 13. La cifra de las centenas excede en 2 a la cifra de las decenas, y el doble de las cifras de las unidades, aumentada en 7 excede en 4 a la cifra de centenas. Determine el doble de la cifra de las decenas.

A) 6

B) 10

C) 12

D) 8

Solución:

Sea el número capicúa buscado: $\overline{abcba}$.

Por dato, planteamos:

$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 13 & \dots(I) \\ c - 2 = b & \dots(II) \\ (2a + 7) - 4 = c & \dots(III) \end{cases}$$

$$\text{De (III): } 2a = c - 3 \quad \dots(IV)$$

$$\text{En (I): } c - 3 + 2(c - 2) + c = 13 \Rightarrow c = 5$$

$$\text{En (IV): } a = 1$$

$$\text{En (II): } b = 3$$

Luego, el número buscado, es : 13531

$\therefore$ El doble de la cifra de las decenas, es : 6.

Rpta.: A

6. Determine el mayor producto de las componentes de las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + 2x^2 + y - y^2 = -9 \\ x - y + 3y^2 - 6x^2 = 29 \end{cases}$$

A) -6

B) 12

C) -1

D) -15

Solución:

$$\begin{cases} x + 2x^2 + y - y^2 = -9 & \dots(I) \\ x - y + 3y^2 - 6x^2 = 29 & \dots(II) \end{cases}$$

De $3(I) + (II): 2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x \dots(III)$

Reemplazando (III) en (I):

$$2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 3$$

Reemplazando en (III):

- Si $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow xy = -6$
- Si $x = 3 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow xy = -15$
- ∴ El mayor valor de xy es -6 .

Rpta.: A

7. Una empresa requiere conocer el comportamiento del mercado para el maíz popcorn envasado en bolsas de 5 kg, utilizando la siguiente estadística: para un precio de S/ 15 por bolsa ocurre un exceso de demanda de 600 bolsas ya que solo se vendieron 400 bolsas. Cuando el precio es de S/ 35 por bolsa, la cantidad demandada disminuye a 200 bolsas. Si cuando se ofrece 800 bolsas diarias se alcanza el equilibrio de mercado, estime cuánto y de qué tipo es el exceso para un precio de S/ 25 por bolsa.

- A) Exceso de demanda de 600 bolsas
- B) Exceso de demanda de 900 bolsas
- C) Exceso de oferta de 900 bolsas
- D) Exceso de oferta de 600 bolsas

Solución:

De los datos:

- 1). Para la demanda, de $(200,35)$ y $(1000,15)$, se obtiene la pendiente $-\frac{1}{40}$, luego

la ecuación de la demanda, es: $p(q) = -\frac{1}{40}q + 40$.

- 2). Para la oferta, de $(800,20)$ equilibrio y $(400,15)$, se obtiene la pendiente $\frac{1}{80}$,

luego la ecuación de la oferta, es: $p(q) = \frac{1}{80}q + 10$.

- 3). Entonces, para un precio de S/ 25 la cantidad de bolsas demandadas es de 600 y el número de bolsas ofertadas es de 1200.

∴ Habría un exceso de 600 bolsas.

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Grace estudia idiomas: francés, inglés y alemán. En el último examen obtuvo como calificaciones: en francés el coeficiente lineal de $q(x)$, en inglés el triple del término independiente de $p(x)$, y en alemán la suma de coeficientes de $p(x)$ y $q(x)$ donde

$$p(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -2 \\ 3 & x^2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad q(x) = \begin{vmatrix} x & x & x \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{¿cuál fue la mayor calificación que obtuvo Grace?}$$

A) 18

B) 19

C) 20

D) 15

Solución:

$$1). p(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -2 \\ 3 & x^2 \end{vmatrix} = x^4 + 6$$

$\Rightarrow$ La suma de coeficientes de $p(x)$, es : $1 + 6 = 7$.

$$2). q(x) = \begin{vmatrix} x & x & x \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = x[-2 - (-1)](-2 - 2)[2 - (-1)] = x(-1)(-4)(3)$$

$\Rightarrow q(x) = 12x$.

$\Rightarrow$ Coeficiente lineal de $q(x)$: 12.

- 3). Luego, por dato las notas obtenidas por Grace fueron :

En francés : 12, en inglés : 18 y en alemán : 19.

$\therefore$ La mayor nota obtenida por Grace fue de 19.

Rpta.: B

2. Halle una solución (x_0, y_0) del sistema en x e y $\begin{cases} rx + my = 2 \\ (2r - 3)x + (m - 1)y = 3 \end{cases}$, que tiene infinitas soluciones tal que $x_0 = y_0$.

A) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

B) (3,3)

C) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

D) (2,2)

Solución:

Por ser un sistema que tiene infinitas soluciones:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{r}{2r-3}}_{(I)} = \underbrace{\frac{m}{m-1}}_{(II)} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{(III)}; r \neq \frac{3}{2}, m \neq 1.$$

$$\text{De (I) = (III)} : 3r = 4r - 6 \Rightarrow r = 6$$

$$\text{De (II) = (III)} : 3m = 2m - 2 \Rightarrow m = -2$$

Reemplazando en el sistema dado :

$$\begin{cases} 6x - 2y = 2 \\ 9x - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x - y = 1 \dots(\text{IV})$$

$$\text{Si } x = y \text{ en (IV)} : x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{La solución pedida es } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Rpta.: C

3. Sabiendo que a, b y c son raíces del polinomio $p(x) = -\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -3 & 1 & x \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix}$, halle el valor de

$$J = \frac{b^{-2}}{a^2} + \frac{a^{-2}}{c^2} + \frac{c^{-2}}{b^2}.$$

A) 6

B) -1

C) 4

D) -6

Solución:

$$1). p(x) = -\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -3 & 1 & x \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} = -[-3x - (x^3 + 1)] = x^3 + 3x + 1$$

$$\Rightarrow p(x) = x^3 + 3x + 1$$

Como a, b y c son raíces de $p(x)$:

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 & \dots(\text{I}) \\ ab + ac + bc = 3 & \dots(\text{II}) \\ abc = -1 & \dots(\text{III}) \end{cases}$$

2). Hallando J :

$$\Rightarrow J = \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 c^2} + \frac{1}{b^2 c^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 b^2 c^2} \stackrel{\text{De(I)}}{=} \frac{-2(ab + ac + bc)}{a^2 b^2 c^2}$$

$$\stackrel{\text{De(II)} \text{ y (III)}}{\Rightarrow J} = \frac{-2(3)}{(-1)^2} = -6$$

$$\therefore J = -6.$$

Rpta.: D

4. Una fábrica produce tres tipos de artículos escobillas, baldes y recogedores que requieren ser procesados por tres máquinas I, II y III. El tiempo requerido en horas para procesar una unidad de cada producto en las tres máquinas está dado en la siguiente tabla:

Procesos	Escobillas	Baldes	Recogedores
I	1	2	3
II	2	5	7
III	1	3	1

Si la máquina I está disponible por 700 horas, la máquina II por 1800 horas y la máquina III por 1600 horas, halle la diferencia positiva entre los dos mayores artículos que se producen en esta fábrica, si se quiere usar todo el tiempo que cada proceso tiene disponible.

- A) 100 B) 125 C) 150 D) 175

Solución:

Sean

x: el número de escobillas que se deben producir. 200

y: el número de baldes que se deben producir. 100

z: el número de recogedores que se deben producir. 300

Por dato, planteamos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 700 & \dots(I) \\ 2x + 5y + 3z = 1800 & \dots(II) \\ 3x + 7y + z = 1600 & \dots(III) \end{cases}$$

$$\text{De (I) + (II) : } 3x + 7y + 4z = 2500 \quad \dots(IV)$$

$$\text{De (IV) - (III) : } 3z = 900 \Rightarrow z = 300$$

$$\text{En (I) : } x + 2y = 400 \quad \dots(V)$$

$$\text{En (II) : } 2x + 5y = 900 \quad \dots(VI)$$

$$\text{De (VI) - 2(V) : } y = 100$$

$$\text{En (V) : } x = 200$$

$$\therefore 300 - 200 = 100.$$

Rpta.: A

5. Luis y María tienen dos pequeños hijos todos fueron un sábado al teatro y en la boletería pagaron en total S/ 80. El siguiente fin de semana fueron con el padre de Luis, de 61 años, aunque no pudo ir uno de los hijos, en esa ocasión, pagaron en la boletería S/ 85. Al siguiente sábado, fueron Luis y María con los padres de ambos, todos mayores de 60 años, y los niños prefirieron quedarse en casa, de tal manera que pagaron en la boletería un total de S/ 120. ¿Cuál es el costo de entrada del teatro para un niño, considerando que hay una tarifa especial para adultos mayores de 60 años, y otra diferente para adultos?

- A) S/ 8 B) S/ 10 C) S/ 12 D) S/ 14

Solución:

Sean

x: Precio de un boleto en soles de un adulto.

y: Precio de un boleto en soles de un niño.

z: Precio de un boleto en soles de un adulto mayor.

Por dato, planteamos:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 80 \\ 2x + y + z = 85 \\ 2x + 4z = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 40 & \dots(I) \\ 2x + y + z = 85 & \dots(II) \\ x + 2z = 60 & \dots(III) \end{cases}$$

$$\text{De (I): } y = 40 - x \quad \dots(IV)$$

$$\text{De (III): } z = \frac{60 - x}{2} \quad \dots(V)$$

$$\text{De (IV) y (V) en (II): } x = 30$$

$$\text{Reemplazando en (IV): } y = 10$$

$$\text{Reemplazando en (V): } z = 15$$

∴ La entrada en el teatro para un niño cuesta S / 10.

Rpta.: B

6. Paco compra cierta cantidad de kilogramos de queso, aceituna y pasas cuyos precios por kilo son respectivamente \$10, \$20 y \$20. El gasto total ascendió a \$30 y los kilogramos de queso junto con el doble de los kilogramos de pasas que compró forman un kilogramo, además si Paco hubiera comprado el doble de la cantidad de kilogramos de pasas que compró, el peso total de su compra (entre queso, aceituna y pasas) hubiese sido de 2 kilogramos. Podemos afirmar:

- I. Paco compró un kilogramo de aceituna.
- II. Paco tuvo infinitas posibilidades para comprar queso y pasas.
- III. Paco compró más de medio kilogramo de pasas.

A) I

B) I y II

C) II

D) I y III

Solución:

Sean

x : la cantidad de kilogramos de queso que compró Paco

y : la cantidad de kilogramos de aceituna que compró Paco

z : la cantidad de kilogramos de pasas que compró Paco

Por dato, planteamos:

$$\begin{cases} 10x + 20y + 20z = 30 \\ x + 2z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 & \dots(I) \\ x + 2z = 1 & \dots(II) \\ x + y + 2z = 2 & \dots(III) \end{cases}$$

De (II) en (I) : $1 + 2y = 3 \Rightarrow y = 1$

En (III) : $x + 2z = 1 \quad \dots (IV)$

Luego, tenemos el sistema :

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \quad \dots (V)$$

Observemos que :

a). El sistema (V) es un sistema compatible indeterminado.

b). De (IV) : $x = 1 - 2z > 0 \Rightarrow z < \frac{1}{2}$.

Entonces, concluimos que :

I). Paco compró un kilogramo de aceituna.

II). Paco tuvo infinitas posibilidades de comprar queso y pasas.

III). Paco compró menos de medio kilogramo de pasas.

$\therefore$ I). V , II). V y III). F

Rpta.: B

7. Al resolver el siguiente sistema no lineal en z e w $\begin{cases} \frac{5}{z} + \frac{6}{w} = 39 \\ \frac{4}{z} + \frac{5}{w} = 32 \end{cases}$, determine el inverso

multiplicativo de la suma de las componentes de su solución.

A) $\frac{15}{7}$

B) $\frac{20}{21}$

C) $\frac{12}{7}$

D) $\frac{11}{21}$

Solución:

Hacemos el cambio de variable: $x = \frac{1}{z}$ e $y = \frac{1}{w}$.

Luego, reemplazando en el sistema dado, nos queda:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 39 \\ 4x + 5y = 32 \end{cases}$$

Entonces, usando la Regla de Cramer:

$$\bullet x = \frac{\begin{vmatrix} 39 & 6 \\ 32 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{195 - 192}{25 - 24} = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow z = \frac{1}{3}$$

$$\bullet y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 39 \\ 4 & 32 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{160 - 156}{25 - 24} = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow w = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{C.S.} = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right) \right\}$$

$\therefore$ El inverso multiplicativo de la suma de las componentes de su solución es

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)^{-1} = \left(\frac{7}{12} \right)^{-1} = \frac{12}{7}.$$

Rpta.: C

8. Determine la suma del producto de las componentes de cada solución que tiene el sistema no lineal

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12} \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

A) 24

B) 20

C) 32

D) 40

Solución:

Hacemos el cambio de variable: $a = \frac{x}{y}$, luego de reemplazar en la primera ecuación nos queda:

$$22a^2 - 25a + 12 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{3} \vee a = \frac{3}{4}.$$

- i). Si $x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{4x}{3}$, luego reemplazando en la segunda ecuación dada:

$$8x^2 = -63$$

$$\Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}.$$

- ii). Si $x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{3x}{4} \dots (*)$

Luego, reemplazando en la segunda ecuación dada:

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \vee x = -4$$

Reemplazando en (*):

• Si $x = 4 \Rightarrow y = 3$

• Si $x = -4 \Rightarrow y = -3$

iii). El conjunto solución (C.S.), es:

$$\text{C.S.} = \{(4, 3); (-4, -3)\}$$

$$\therefore (4)(3) + (-4)(-3) = 12 + 12 = 24.$$

Rpta.: A

9. Un comerciante de frutas del mercado de Caquetá, especialista en la venta de "Pitahaya" a comerciantes minoristas y público en general, ha podido determinar que la ecuación de la demanda está dada por $p(q) = aq + 90$, donde "a" constante, "p" está en dólares y "q" es el número de cajas de 5 kg demandadas. Además, se sabe que la razón de cambio promedio del ingreso es de \$40 por caja de 5 kg, cuando las ventas aumentan de 50 a 100 cajas de "Pitahaya", y esta razón de cambio se puede determinar por la expresión $\frac{I(q_2) - I(q_1)}{q_2 - q_1}$.

Determine en el orden en que se presentan:

- I. Cuántas cajas de "Pitahaya" como máximo puede vender este comerciante.
- II. Cuántas cajas de "Pitahaya" como máximo puede vender este comerciante para que su ingreso sea máximo.

A) 300 y 400

B) 500 y 250

C) 450 y 225

D) 350 y 300

Solución:

- 1). Como la demanda $P(q) = aq + 90$

Entonces el ingreso $I(q) = aq^2 + 90q$

Además, la razón de cambio promedio para $q_1 = 50$ y $q_2 = 100$, es:

$$\Rightarrow \frac{I(100) - I(50)}{100 - 50} = 40$$

$$\Rightarrow \frac{10000a + 9000 - (2500a + 4500)}{50} = 40 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow I(q) = -\frac{1}{5}q^2 + 90q.$$

- 2). El máximo número de cajas de "Pitahaya" que puede vender el comerciante es de 450.

- 3). El número de cajas que maximiza el ingreso es $450 - 225 = 225$.

Rpta.: C

Álgebra

EJERCICIOS DE CLASE

1. La empresa Cayta munä produce y vende Ositos de Peluches, la empresa determina la ecuación lineal de la demanda teniendo los siguientes datos:
 Si el precio de venta unitario es de 40 soles la demanda es de 60 unidades. Pero si el precio de venta unitario es 80 soles la demanda es de 20 unidades.
 Además se sabe que la ecuación de la oferta es $p = q + 40$, determine la cantidad de ositos que se deben producir y vender para obtener el punto de equilibrio en el mercado.
 donde
 p: precio de venta unitario (en soles)
 q: cantidad

- A) 70 B) 40 C) 30 D) 50

Solución:

1) Determinando la ecuación de la demanda

$$p = mq + b$$

$$\begin{cases} 40 = m60 + b \\ 80 = m20 + b \end{cases}$$

$$m = -1$$

Reemplazando :

$$p = -1q + b$$

$$40 = -60 + b$$

$$b = 100$$

Ecuación de la demanda $p = -q + 100$

$$2) \begin{cases} p + q = 100 \\ p - q = 40 \end{cases}$$

$$q = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 1 & 40 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 30$$

Rpta.: C

2. En la feria del libro, la empresa IDEA URBANA paga por el alquiler del puesto "b" soles además por producir cada libro le genera un gasto de 50 soles. Si vendiera 80 libros obtendría una ganancia de 1000 soles, pero si vendiera 20 libros le ocasionaría una pérdida de 800 soles. Si el costo está relacionado de manera lineal con la producción de libros, ¿cuántos libros como mínimo debe de producir y vender la empresa para obtener ganancia?

A) 70 B) 47 C) 30 D) 50

Solución:

$$1) I = pq$$

$$C = 50q + b$$

$$2) I - C = 1000$$

$$80p - (4000 + b) = 1000$$

$$3) C - I = 800$$

$$1000 + b - 20p = 800$$

$$4) \begin{cases} 80p - b = 5000 \\ -20p + b = -200 \end{cases}$$

$$p = \frac{\begin{vmatrix} 5000 & -1 \\ -200 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 80 & -1 \\ -20 & 1 \end{vmatrix}} = 80$$

reemplazando $b = 1400$

$$5) \text{utilidad} > 0$$

$$30q - 1400 > 0$$

$$q > 46,6$$

$$q_{\min} = 47$$

Rpta. : B

3. Determine la solución (x_0, y_0) para el mayor valor entero negativo de a, que hace que el sistema $\begin{cases} ax - y = -10 \\ 2x - (a - 1)y = 18 \end{cases}$ sea compatible determinado.

A) (3,4) B) (9,1) C) (4,3) D) (3,-4)

Solución:

$$\Delta \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a & -1 \\ 2 & -(a-1) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$-a(a-1) + 2 \neq 0$$

$$a^2 - a - 2 \neq 0$$

$$(a-2)(a+1) \neq 0$$

$$a \neq 2 \wedge a \neq -1$$

$$a \in \mathbb{R} - \{2; -1\}$$

el mayor valor entero negativo de a es -2

reemplazando

$$\begin{cases} -2x - y = -10 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$$

$\therefore$ solución $(3, 4)$

Rpta.: A

4. Si el sistema en x e y $\begin{cases} 2ax + (a+3)y = b+1 \\ (a-3)x + (a-5)y = 1 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones, $b \in \mathbb{Z}^+$ determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $C.S = \left\{ \left(t, \frac{1-6t}{4} \right) / t \in \mathbb{R} \right\}$

II. $\left(0, \frac{1}{4} \right)$ no es solución del sistema

III. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & a-b-1 \\ a^b & 2b & 2ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 1 & b \\ ca & 18 & 6 \\ c & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \\ 7 & 3 & -3 \end{vmatrix} \rightarrow c = 14$

En el orden respectivo.

A) VFV

B) FVF

C) FFF

D) FFV

Solución:

$$\frac{2a}{a-3} = \frac{a+3}{a-5} = \frac{b+1}{1}$$

$$2a^2 - 10a = a^2 - 9$$

$$a = 9 \vee a = 1$$

Reemplazando:

$$1) \text{ Si } a = 9 \rightarrow \frac{18}{6} = \frac{12}{4} = \frac{b+1}{1}$$

$$b = 2$$

$$2) \text{ Si } a = 1 \rightarrow \frac{2}{-2} = \frac{4}{-4} = \frac{b+1}{1}$$

$$b = -2$$

$$\therefore a = 9 ; b = 2$$

Reemplazando:

$$\begin{cases} 18x + 12y = 3 \\ 6x + 4y = 1 \end{cases}$$

sea $x = t$

$$y = \frac{1-6t}{4}$$

$$C.S = \left\{ \left(t, \frac{1-6t}{4} \right) / t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$3) \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & a-b-1 \\ a^b & 2b & 2ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 1 & b \\ c9 & 18 & 6 \\ c & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \\ 7 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 6 \\ 81 & 4 & 36 \end{vmatrix} = 6c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0$$

$$3(-7)(4)(-3) = 3c2(3)$$

$$c = 14$$

Rpta.: A

5. Si el sistema en x e y $\begin{cases} (a+1)x + 2y = -1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$ no tiene solución, determine el número de soluciones que tiene el sistema no lineal en m y n $\begin{cases} m + an = -a \\ m^4 + n^4 = 17 \end{cases}$; $m, n \in \mathbb{R}$.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

Solución:

$$\frac{a+1}{\underbrace{1 \quad a}_{a^2+a-2=0}} = \frac{2}{a} \neq \frac{-1}{1}$$

$$(a+2)(a-1)=0$$

$$1) \text{ Si } a = -2 \rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \rightarrow \text{infinitas soluciones}$$

$$1) \text{ Si } a = 1 \rightarrow \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \rightarrow \text{No hay solución}$$

$$\begin{cases} m+n=-1 \\ m^4+n^4=17 \end{cases}$$

$$1) m^2+n^2+2mn=1$$

$$(m^2+n^2)^2 = (1-2mn)^2$$

$$m^4+n^4+2m^2n^2=1+4m^2n^2-4mn$$

$$16=2m^2n^2-4mn$$

$$m^2n^2-2mn-8=0$$

$$mn \quad -4$$

$$mn \quad +2$$

$$\begin{cases} m+n=-1 \\ mn=4 \end{cases} \rightarrow n \text{ no es real}$$

✓

$$\begin{cases} m+n=-1 \\ mn=-2 \end{cases}$$

$$m=1; n=-2$$

$$m=-2; n=1$$

soluciones (1,-2) y (-2,1)

Rpta.: B

6. En una granja hay 90 animales, entre gallinas, ovejas y caballos. El número de patas es 320. Si la cuarta parte del número de caballos es igual a la diferencia entre la cantidad de ovejas y gallinas (en ese orden), determine la cantidad de ovejas que hay en la granja.

A) 10

B) 40

C) 20

D) 30

Solución:

	cantidad de animales	Número de patas
gallinas	x	2x
ovejas	y	4y
caballos	z	4z

Reemplazando :

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \dots\dots\dots(1) \\ 2x + 4y + 4z = 320 \dots\dots\dots(2) \\ \frac{1}{4}z = y - x \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \dots\dots\dots(1) \\ x + 2y + 2z = 160 \dots\dots\dots(2) \\ 4x - 4y + z = 0 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

restando (1) y (2)

$$y + z = 70 \dots\dots\dots(*)$$

$$-\begin{cases} 4(x + 2y + 2z = 160) \dots\dots\dots(2) \\ 4x - 4y + z = 0 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

$$12y + 7z = 640 \dots\dots\dots(**)$$

$$\begin{cases} y + z = 70 \dots\dots\dots(*) \\ 12y + 7z = 640 \dots\dots\dots(**) \end{cases}$$

$$y = 30$$

∴ El número de ovejas es 30

Rpta.: D

7. Catalina compra m helados, cada uno tiene un costo de b soles, ella gastó en la compra 10 soles, determine el costo de cada helado.
Donde m es el menor valor entero positivo para que el sistema en x, y, z

$$\begin{cases} (m-1)x - 1y + mz = 6 \\ mx + (m-1)y - z = 5; \text{ tenga solución única.} \\ x + 3y - 4z = -2 \end{cases}$$

A) 7

B) 5

C) 2

D) 4

Solución:

$$\Delta \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m-1 & -1 & m \\ m & m-1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m-1 & -1 & m \\ m & m-1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$-4(m-1)^2 + 3m^2 + 1 - [m(m-1) - 3(m-1) + 4m] \neq 0$$

$$-2m^2 + 8m - 6 \neq 0$$

$$m^2 - 4m + 3 \neq 0$$

$$m \neq 3 ; m \neq 1$$

$$\therefore m \in \mathbb{R} - \{3, 1\}$$

$$\text{Número de helados} = 2$$

$$\text{costo unitario} = b$$

$$\text{gasto} = 10$$

$$2b = 10$$

$$b = 5$$

$$\therefore \text{costo unitario} = 5$$

Rpta.: B

8. Para el sistema en x, y, z

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 3 \\ ax + y + z = a + 3 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

a_1 es el valor de a para que el sistema sea compatible indeterminado y a_2 es el valor de a para que el sistema sea incompatible, determine el valor de $(a_1 - a_2)$.

A) 3

B) -1

C) 1

D) -3

Solución:

$$\Delta = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3a - (2 + a^3) = 0$$

$$a^3 - 3a + 2 = 0$$

$$a=1 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right.$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$a = 1; a = -2$$

$$a=1 \rightarrow \begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

no tiene solución

$$a=-2 \rightarrow \begin{cases} x-2y+z=1 \\ -2x+y+z=1 \\ x+y-2z=-2 \end{cases}$$

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

tiene infinitas soluciones

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = 1$$

$$\therefore a_1 - a_2 = -3$$

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Mario determina el valor de m ($m \neq 0$) para el cual el sistema en x e y
- $$\begin{cases} 2m^3x - (m+1)y = 7 \\ mx - y = 8 \end{cases} \text{ no tiene solución y el sistema } \begin{cases} 2x - 4my = 4 \\ -2mx + y = 2 \end{cases} \dots\dots(*) \text{ tiene solución única, halle la solución del sistema } (*).$$

A) (2,-2)

B) (6,2)

C) (-2,-2)

D) (2,2)

Solución:

$$\begin{cases} 2m^3x - (m+1)y = 7 \\ mx - y = 8 \end{cases}$$

$$\frac{2m^3}{m} = \frac{-(m+1)}{-1} \neq \frac{7}{8}$$

$$2m^2 = m+1$$

$$2m^2 - m - 1 = 0$$

$$m = 1 \vee m = -\frac{1}{2}$$

Reemplazando:

$$1) \text{ Si } m = 1 \rightarrow 2 = 2 \neq \frac{7}{8}$$

$$2) \text{ Si } m = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-1} \neq \frac{7}{8}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-1} \neq \frac{7}{8}$$

Reemplazando en el sistema :

$$\begin{cases} 2x - 4my = 4 \\ -2mx + y = 2 \end{cases} \dots\dots (*)$$

$$1) \text{ Si } m = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

el sistema tiene infinitas soluciones

$$2) \text{ Si } m = 1 \rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$$

la unica solucion es $(-2, -2)$

Rpta.: C

2. Si el sistema en x e y $\begin{cases} (m+1)x + (2m-1)y = 3 \\ (m+2)x + (m-2)y = 2 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones, determine la solución tal que la suma de sus coordenadas es 3.

A) $(5, -2)$

B) $(3, 0)$

C) $(-2, 5)$

D) $(2, 1)$

Solución:

$$\frac{m+1}{m+2} = \frac{2m-1}{m-2} = \frac{3}{2}$$

$$m^2 - m - 2 = 2m^2 + 3m - 2$$

$$m(m+4) = 0$$

$$m = 0 \vee m = -4$$

Reemplazando :

$$1) \text{ Si } m = 0 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{3}{2}$$

$$2) \text{ Si } m = -4 \rightarrow \frac{-3}{-2} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore m = -4$$

Reemplazando en el sistema :

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$C.S = \{(-1 - 3t, t) / t \in \mathbb{R}\}$$

La suma de las coordenadas de la solución es 3

$$-1 - 3t + t = 3$$

$$t = -2$$

$\therefore$ solución (5, -2)

Rpta.: A

3. Calcule los valores de λ para que el sistema en x, y, z
$$\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + \lambda y - z = -2 \\ x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$
 tenga solución única.

A) $\mathbb{R} - \{5, -2\}$

B) $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$

C) $\mathbb{R} - \{-5\}$

D) $\mathbb{R} - \{2\}$

Solución:

$$\Delta \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$\lambda^2 - 12 - (-2 - 3\lambda) \neq 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 \neq 0$$

$$(\lambda + 5)(\lambda - 2) \neq 0$$

$$\lambda \in \mathbb{R} - \{-5, 2\}$$

Rpta.: B

4. Dado el sistema en x, y, z

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ x - 5z + 2y = 4 \\ 2x + 5y - \lambda^2 z = \lambda + 4 \end{cases}$$

Si λ_1 y λ_2 son los valores que toma λ para que el sistema sea compatible indeterminado e incompatible respectivamente.

Halle el valor de $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & 1 \\ 3\lambda_1 & 3\lambda_1\lambda_2 & 9 \\ 2\lambda_1 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 25 & 10 & 17 \\ 23 & 8 & 15 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

A) - 40

B) 0

C) 120

D) - 120

Solución:

$$\Delta = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$-2\lambda^2 - 25 + 3\lambda^2 + 21 = 0$$

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = 2 \vee \lambda = -2$$

$$\lambda = 2 \rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ x + 2y - 5z = 4 \\ 2x + 5y - 4z = 6 \end{cases}$$

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

tiene infinitas soluciones

$$\lambda = -2 \rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ x + 2y - 5z = 4 \\ 2x + 5y - 4z = 2 \end{cases}$$

No tiene solución

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -2$$

Reemplazando :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -12 & 9 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 25 & 10 & 17 \\ 23 & 8 & 15 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$M = 3(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} + 0$$

$$M = 3(2)(-4)(5)$$

$$\therefore M = -120$$

Rpta.: D

5. La empresa la Casa de la Nonna desea producir y vender pizzas para lo cual determina que la ecuación de la demanda dada por:

$$p = \begin{vmatrix} a & -13 \\ 2 & q \end{vmatrix}$$

donde

p: precio de venta unitario (en soles)

q: cantidad

Si la empresa vendiera 13 pizzas el ingreso seria máximo, calcule el ingreso que obtendrá la empresa al vender 10 pizzas.

A) 120 soles

B) 360 soles

C) 160 soles

D) 60 soles

Solución:

$$1) p = \begin{vmatrix} a & -13 \\ 2 & q \end{vmatrix}$$

$$p = aq + 26$$

$$I = pq$$

$$I = (aq + 26)q$$

$$I = aq^2 + 26q$$

$$h = \frac{-b}{2a} = 13$$

$$\frac{-26}{2a} = 13 \rightarrow a = -1$$

$$I = -1q^2 + 26q$$

$$I = -1(10)^2 + 26(10)$$

$$I = 160 \text{ soles}$$

Rpta.: C

6. La empresa Wayra desea producir y vender quenas. La empresa analiza que tanto la oferta y la demanda de sus artículos, tienen comportamientos lineales y se tiene la siguiente información:

El punto de equilibrio en el mercado, ocurre si se vendieran 24 quenas a un precio de venta de 128 soles por unidad. Pero si se estableciera un precio de venta unitario de 92 soles existiría un exceso de demanda de 30 quenas; y si la empresa vendiera 30 quenas obtendría un ingreso de 3300 soles.

Determine qué sucede en el mercado, si se fijara un precio de venta unitario de 170 soles.

- A) Exceso de demanda de 35 unidades.
- B) Exceso de oferta de 35 unidades.
- C) Exceso de oferta de 10 unidades.
- D) Exceso de demanda de 10 unidades.

Solución:

1) ingreso = pq

$$3300 = p(30)$$

$$p = 110$$

2) Determinando la ecuación de la demanda

$$p = mq + b$$

$$\begin{cases} 128 = m24 + b \\ 110 = m30 + b \end{cases}$$

$$m = -3 ; q = 200$$

Ecuación de la demanda $p = -3q + 200$

$$\text{si } p = 92 \rightarrow 92 = -3q + 200 \rightarrow q = 36$$

3) Oferta Demanda

p	q	p	q
92	6	92	36
128	24	128	24
		110	30

4) Ecuación de la oferta $p = nq + d$

$$\begin{cases} 128 = n \cdot 24 + d \\ 92 = n \cdot 6 + d \end{cases}$$

$$n = 2 ; d = 80$$

$$p = 2q + 80$$

Oferta Demanda

p	q	p	q
170	45	170	10

existe un exceso de oferta de 35 unidades.

Rpta.: B

7. El producto de cuatro números enteros positivos es 90 y la suma de los cubos de los cuatro números es 369. Si solo hay 2 números consecutivos tal que el producto de dichos números consecutivos al cuadrado excede en 252 al triple del cubo del mayor de estos números consecutivos, calcule la suma de cuadrados de los cuatro números.

A) 78 B) 46 C) 66 D) 71

Solución:

Números: $n, n+1, a, b$

$$1)(n(n+1))^2 - 3(n+1)^3 = 252$$

$$n^2(n^2 + 2n + 1) - 3(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 252$$

$$n^4 - n^3 - 8n^2 - 9n - 255 = 0$$

$n = 5$	1	-1	-8	-9	-255
	5	20	60	255	
	1	4	12	51	0

Números: $5, 6, a, b$

$$\begin{cases} 5(6)ab = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 125 + 216 + a^3 + b^3 = 369 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} ab = 3 \\ a^3 + b^3 = 28 \end{cases}$$

$$a = 1; b = 3$$

Reemplazando

Los números son :

$$5, 6, 1, 3$$

$$\therefore 5^2 + 6^2 + 1^2 + 3^2 = 71$$

Rpta.: D

8. En los juegos Panamericanos los deportistas de Estados Unidos ganaron 20 medallas más que Brasil y 140 menos que el doble de medallas que ganó México. Los tres países sumaron 300 medallas.

Sobre los tipos de medalla, se obtuvo los siguientes datos:

- La cantidad de medallas de oro repartidos entre los tres países fue 90.
- Brasil no ganó medallas de oro.
- Los tres países consiguieron la misma cantidad de medallas de bronce.
- La cantidad de medallas de plata que obtuvo Brasil es el doble de la cantidad de medallas de plata que adquirió Estados Unidos, más 10.
- Brasil y México obtuvieron la misma cantidad de medallas de plata.

¿Cuántas medallas de oro ganó México?

- A) 20 B) 30 C) 40 D) 50

Solución:

	cantidad de medallas
Estados Unidos	x
Brasil	y
Mexico	z

$$\begin{cases} x = 20 + y \\ x = 2z - 140 \\ x + y + z = 300 \end{cases}$$

$$x + y + z = 300$$

$$x + x - 20 + \frac{x + 140}{2} = 300$$

$$2x + 2x - 40 + x + 140 = 600$$

$$5x = 500$$

$$x = 100$$

$$y = 80$$

$$z = 120$$

	oro	plata	bronce	total
Estados Unidos	a	b	c	100
Brasil	0	2b + 10	c	80
Mexico	90 - a	2b + 10	c	120

$$\begin{cases} a + b + c = 100 \\ 2b + 10 + c = 80 \\ 90 - a + 2b + 10 + c = 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 100 \dots\dots\dots(1) \\ 2b + c = 70 \dots\dots\dots(2) \\ -a + 2b + c = 20 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

$$(1) + (3)$$

$$3b + 2c = 120 \dots\dots\dots(4)$$

de (2) y (4)

$$\begin{cases} 2b + c = 70 \\ 3b + 2c = 120 \end{cases}$$

$$b = 20 ; c = 30 ; a = 50$$

∴ Mexico ganó 40 medallas de oro.

Rpta.: C

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si el determinante de la matriz $T = \begin{pmatrix} 36\lambda^2 & -1 \\ -12\lambda & 3 \end{pmatrix}$ es 12, halle el valor de

$$L = \sqrt{81\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 1}.$$

- A) 4 B) $5\sqrt{2}$ C) 9 D) $2\sqrt{5}$ E) 3

Solución:

i) Calculando el determinante de la matriz T, se tiene

$$|T| = \begin{vmatrix} 36\lambda^2 & -1 \\ -12\lambda & 3 \end{vmatrix} = 108\lambda^2 - 36\lambda = 12 \rightarrow 9\lambda^2 - \lambda = 1 \rightarrow \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\rightarrow \div \lambda : 9\lambda - 1 = \frac{1}{\lambda} \rightarrow 9\lambda - \frac{1}{\lambda} = 1$$

$$\text{Elevando al cuadrado: } 81\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 18 = 1 \rightarrow 81\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = 19$$

$$\therefore L = 2\sqrt{5}.$$

Rpta. : D

2. José realiza sus trabajos de orfebrería, con dos tipos de aleaciones: uno de tipo A que contiene 60 % de oro, cuyo precio por gramo es de 70 soles y el otro del tipo B que contiene 90 % de oro, cuyo precio por gramo de 110 soles. Si José invirtió 24 400 soles en elaborar una placa recordatoria que contenía 204 gramos de oro, calcule el número de gramos de cada tipo de aleación que usó para hacer dicha placa.

- A) $\begin{cases} 120 \text{ gr del metal del tipo A} \\ 100 \text{ gr del metal del tipo B} \end{cases}$ B) $\begin{cases} 150 \text{ gr del metal del tipo A} \\ 100 \text{ gr del metal del tipo B} \end{cases}$
- C) $\begin{cases} 160 \text{ gr del metal del tipo A} \\ 140 \text{ gr del metal del tipo B} \end{cases}$ D) $\begin{cases} 140 \text{ gr del metal del tipo A} \\ 130 \text{ gr del metal del tipo B} \end{cases}$
- E) $\begin{cases} 160 \text{ gr del metal del tipo A} \\ 120 \text{ gr del metal del tipo B} \end{cases}$

Solución:

Sean

x : Número de gramos de aleación del tipo A

y : Número de gramos de aleación del tipo B

Del enunciado, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{9}{10}y = 204 & \dots(1) \\ 70x + 110y = 24400 & \dots(2) \end{cases}$$

$$\text{Haciendo } 50 \cdot (1): 6x + 9y = 2040 \rightarrow 2x + 3y = 680$$

$$\text{De (2):} \quad 7x + 11y = 2440$$

$$\text{Resolviendo el sistema } \begin{cases} 2x + 3y = 680 \\ 7x + 11y = 2440 \end{cases} \rightarrow x = 160, y = 120.$$

∴ José mezcló 160 gr de aleación del tipo A y 120 gr del tipo B para hacer dicha placa.

Rpta. : E**3.** Dado el sistema lineal en x e y

$$\begin{cases} (m+2)x - 3my = 1 \\ (m+8)x - 9y = 3 \end{cases}$$

Si T es el conjunto de valores de “m”, de modo que el sistema es compatible determinado, y P es el conjunto de valores de “m”, de modo que el sistema es incompatible, entonces

A) $T \cup P = \mathbb{R} - \{1\}.$

B) $T \cup P = \mathbb{R}.$

C) $T \cup P = \mathbb{R} - \{6\}.$

D) $T \cup P = \mathbb{R} - \{-1; 6\}.$

E) $T \cup P = \mathbb{R} - \{-1; -6\}.$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{i) El sistema } \begin{cases} (m+2)x - 3my = 1 \\ (m+8)x - 9y = 3 \end{cases} & \text{ es compatible si } \frac{m+2}{m+8} \neq \frac{3m}{9} \rightarrow m^2 + 5m - 6 \neq 0 \\ & \rightarrow m \neq -6 \wedge m \neq 1 \\ & \rightarrow T = \mathbb{R} - \{-6; 1\} \end{aligned}$$

$$\text{ii) El sistema } \begin{cases} (m+2)x - 3my = 1 \\ (m+8)x - 9y = 3 \end{cases} \text{ es incompatible si } \frac{m+2}{m+8} = \frac{3m}{9} \neq \frac{1}{3}$$

$$\frac{m+2}{m+8} = \frac{3m}{9} \rightarrow m^2 + 5m - 6 = 0 \rightarrow m = -6 \vee m = 1 \quad \text{pero } m \neq 1$$

$$\rightarrow P = \mathbb{R} - \{-6\}$$

iii) Luego, de i) y ii) se tiene $T \cup P = \mathbb{R} - \{1\}$.

Rpta.: A

4. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$, calcule el valor de $K = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ 3g & 3h & 3i \\ -d & -e & -f \end{vmatrix}$.

A) - 50

B) - 78

C) - 54

D) - 63

E) - 49

Solución:

i) Del dato, son conocidos los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)(-4)(5) = -60 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -26$$

ii) Luego, usando propiedades de los determinantes se tiene:

$$K = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ 3g & 3h & 3i \\ -d & -e & -f \end{vmatrix} = (3)(-1) \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow K = -3 \left[\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \right] = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3(-26) = -78.$$

Rpta.: B

5. Con respecto a tres familias que van a una confitería cierto día, se sabe lo siguiente: la primera familia consumió 4 alfajores, un suspiro a la limeña y 3 helados de barquillo; la segunda consumió 2 alfajores, 2 suspiros a la limeña y 4 helados de barquillo; y la tercera consumió 3 alfajores, 3 suspiros a la limeña y 3 helados de barquillo.
- i) Calcule el determinante de la matriz de orden 3×3 que expresa la información sobre las compras en la confitería, por familia y por producto.
- ii) Si cada familia gasta en dicha confitería: 22 soles la primera, 22 soles la segunda y 27 soles la tercera, calcule el precio de un suspiro a la limeña.
- A) – 18 y 3 soles B) – 16 y 3 soles C) – 15 y 2 soles
D) – 18 y 4 soles E) – 16 y 4 soles

Solución:

- i) La matriz 3×3 que expresa dicha información es

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & S & H \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

→ Usando el método de Sarrus se obtiene: $|M| = -18$.

- ii) Sean

x : Precio de un alfajor

y : Precio de un suspiro a la limeña

z : Precio de un helado en barquillo

De la información dada, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} 4x + y + 3z = 22 & \dots(1) \\ 2x + 2y + 4z = 22 & \dots(2) \\ 3x + 3y + 3z = 27 & \dots(3) \end{cases}$$

De $4 \cdot (1) - 3 \cdot (2)$:

$$\begin{cases} 16x + 4y + 12z = 88 \\ -6x - 6y - 12z = -66 \end{cases} \quad (+)$$

$$5x - y = 11 \quad \dots(4)$$

De $4.(3) - 3(2)$:

$$\begin{cases} 12x + 12y + 12z = 108 \\ -6x - 6y - 12z = -66 \end{cases} (+)$$

$$x + y = 7 \quad \dots(5)$$

De (4) y (5), $y = 4$

→ El precio de un suspiro a la limeña es de S / 4.

Rpta.: D

6. Dado el sistema de ecuaciones lineales en x, y, z $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2 - k^2 x + y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + z = 1 - k^2 \end{cases}$, determine el conjunto de valores de "k" para que el sistema sea compatible determinado.

- A) $\mathbb{R} - -1; 0$ B) $1; -1$ C) $\mathbb{R} - 0; 1$
 D) $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ E) $\mathbb{R} - \{1\}$

Solución:

El sistema tiene solución única si $\Delta \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 - k^2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow -3 - [(2 - k^2) - 6] + 2[2(2 - k^2) - 3] \neq 0$$

$$\rightarrow -k^2 + 1 \neq 0 \rightarrow k \neq \pm 1$$

∴ El sistema es compatible cuando $k \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

Rpta.: D

7. Una empresa debe enlatar una mistura de frutos secos. Se sabe que cada lata contiene maní, castañas y nueces y además el kilogramo de maní cuesta 5 soles; el kilogramo de castaña, 20 soles y el kilogramo de nueces, 16 soles. Cada lata debe contener medio kilogramo de mistura y el costo total de los ingredientes de cada lata debe ser 5,75 soles. Si, en cada lata, el número de kilogramos de maní sumado con los de nueces es el triple del número de kilogramos de castañas, ¿Cuántos gramos de maní hay por lata?
- A) 225 B) 240 C) 125 D) 220 E) 250

Solución:

Sean

 x : Número de kilogramos de maní y : Número de kilogramos de castañas z : Número de kilogramos de nueces

Del enunciado, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5,75 & \dots(i) \\ x + y + z = 0,5 & \dots(ii) \\ x + z = 3y & \dots(iii) \end{cases}$$

Reemplazando (iii) en (ii), se tiene

$$4y = 0,5 \rightarrow y = 0,125 \dots(iv)$$

$$(iv) \text{ en } (i): 5x + 20(0,125) + 16z = 5,75 \rightarrow 5x + 16z = 3,25$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x + 16z = 3,25 \\ x + z = 0,375 \end{cases} \rightarrow x = 0,25, z = 0,125 = y$$

Luego,

$$\begin{cases} \text{Maní : } 0,25 \text{ kg} \\ \text{Castañas : } 0,125 \text{ kg} \\ \text{Nueces : } 0,125 \text{ kg} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \text{Maní : } 250 \text{ gramos} \\ \text{Castañas : } 125 \text{ gramos} \\ \text{Nueces : } 125 \text{ gramos} \end{cases}$$

 $\therefore$ El número de kilogramos de maní es 250.**Rpta.: E**

8. Dado el sistema en x e y , $\begin{cases} xy + x + y = 80 \\ x^2 + y^2 = 280 \end{cases}$, halle la suma de todos los valores reales que admite " x ".

A) 2

B) - 2

C) - 4

D) 3

E) 0

Solución:

$$\begin{cases} xy + x + y = 80 & \dots(1) \\ x^2 + y^2 = 280 & \dots(2) \end{cases}$$

i) Haciendo $(2) + 2 \cdot (1)$: $x^2 + y^2 + 2xy + 2(x + y) = 440$

$$(x + y)^2 + 2(x + y) + 1 = 441$$

$$(x + y + 1)^2 = 21^2$$

$$\rightarrow x + y = 20 \quad \vee \quad x + y = -22$$

* En (1), reemplazando $x + y = 20$ se tiene $xy = 60$

También $y = 20 - x \rightarrow x(20 - x) = 60 \rightarrow x^2 - 20x + 60 = 0$

$\rightarrow$ Suma de valores reales de $x = 20$.

* En (1), reemplazando $x + y = -22$ se tiene $xy = 60$

También $y = -22 - x \rightarrow x(-22 - x) = 60 \rightarrow x^2 + 22x + 60 = 0$

$\rightarrow$ Suma de valores reales de $x = -22$.

ii) $\therefore$ Suma de todos los valores reales de "x" es -2 .

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea $q(x) = |M|$, donde $M = \begin{pmatrix} a^x + 3b^x & c^x \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Si $q(1) = 0$ y $abc \neq 0$, calcule el valor de

$$L = \frac{a^3 + 27b^3 - 8c^3}{abc}.$$

A) -15

B) 18

C) 9

D) -18

E) -9

Solución:

Evaluando para $x = 1$ en $q(x)$, se tiene $q(1) = \begin{vmatrix} a+3b & c \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3(a+3b) - 6c$

Pero $q(1) = 0 \rightarrow 3(a+3b) - 6c = 0$

$$\rightarrow 3(a+3b) = 6c \rightarrow a+3b = 2c \quad \dots(1)$$

De (1), se tiene

$$a + 3b - 2c = 0$$

Por identidad condicional $a^3 + 27b^3 - 8c^3 = -18abc$

$$\therefore L = \frac{a^3 + 27b^3 - 8c^3}{abc} = \frac{-18abc}{abc} = -18.$$

Rpta.: D

2. Un método de tratamiento contra el cáncer pulmonar consiste en someter a un paciente a quimioterapia intensiva. Se sabe que dicho tratamiento proporciona, en promedio, un porcentaje de remisión de un 75%. Al aplicar un nuevo método de tratamiento a 100 voluntarios que padecen dicho cáncer, se contabilizaron 50 casos de remisión. Si en el 2019, se tomó una muestra a 800 voluntarios que se sometieron solo a uno de los dos métodos, calcule el número de voluntarios que se sometieron a cada uno de los métodos si en total se obtuvieron 500 casos de remisión.

- A) $\begin{cases} \text{Quimioterapia intensiva : 410} \\ \text{Nuevo tratamiento : 390} \end{cases}$ B) $\begin{cases} \text{Quimioterapia intensiva : 350} \\ \text{Nuevo tratamiento : 450} \end{cases}$
- C) $\begin{cases} \text{Quimioterapia intensiva : 390} \\ \text{Nuevo tratamiento : 410} \end{cases}$ D) $\begin{cases} \text{Quimioterapia intensiva : 400} \\ \text{Nuevo tratamiento : 400} \end{cases}$
- E) $\begin{cases} \text{Quimioterapia intensiva : 450} \\ \text{Nuevo tratamiento : 350} \end{cases}$

Solución:

i) Calculando el porcentaje de remisión con el nuevo tratamiento: $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$

ii) Sean

x : Número de voluntarios que se sometieron a quimioterapia intensiva

y : Número de voluntarios casos que se sometieron al nuevo tratamiento

Del enunciado, se tiene

$$\begin{cases} x + y = 800 \\ (0,75)x + (0,50)y = 500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 800 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 800 & \dots(1) \\ 3x + 2y = 2000 & \dots(2) \end{cases}$$

Haciendo $(2) - 2 \cdot (1)$, resulta

$$x = 400 \wedge y = 400$$

$\therefore$ Quimioterapia intensiva : 400 , Nuevo tratamiento : 400 .

Rpta. : E

3. Halle el conjunto de valores de “m” para que el siguiente sistema lineal en x e y

$$\begin{cases} (m+3)x - m - my = my + 12 \\ (m-3)y + m = (m+5)x - 11 \end{cases}$$

admita al menos una solución.

- A) $\mathbb{R} - \{-1\}$ B) $\mathbb{R} - \{-1; -9\}$ C) $\{-1\}$ D) $\{-9\}$ E) $\mathbb{R} - \{1; 9\}$

Solución:

Ordenando el sistema

$$\begin{cases} (m+3)x - 2my = m+12 \\ (m+5)x - (m-3)y = m+11 \end{cases} \dots (*)$$

i) Para que el sistema admita al menos una solución, debe ser compatible.

ii) Determinemos los valores de “m” para que el sistema sea incompatible

(*) es incompatible si

$$\underbrace{\frac{m+3}{m+5} = \frac{2m}{m-3}}_{(1)} \neq \frac{m+12}{m+11} \dots (**)$$

$$\text{De (1): } m^2 - 9 = 2m^2 + 10m \rightarrow m^2 + 10m + 9 = 0 \rightarrow \boxed{m = -9 \vee m = -1}$$

Reemplazando en (**):

$$m = -9 : \frac{-6}{-4} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad (\text{No verifica})$$

$$m = -1 : \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{11}{10} \quad (\text{Si verifica})$$

Luego, el sistema es incompatible para $m = -1$, entonces el sistema es compatible para $m \neq -1$.

$\therefore$ El sistema admite al menos una solución para $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

Rpta.: A

4. Si a , b y c son raíces del polinomio $(-p(x))$, donde $p(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 2 & x-1 \\ 3 & x+1 & 1 \end{vmatrix}$, halle el

$$\text{valor de } K = \frac{8a-3}{a^2-2a+4} + \frac{8b-3}{b^2-2b+4} + \frac{8c-3}{c^2-2c+4}.$$

- A) 5 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

Solución:

i) Aplicando la regla de Sarrus, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 2 & x-1 \\ 3 & x+1 & 1 \end{vmatrix} = -x^3 + 8x - 11 \rightarrow p(x) = -x^3 + 8x - 11$$

$$\rightarrow -p(x) = x^3 - 8x + 11$$

Como a, b y c son raíces de $(-p(x)) \rightarrow a + b + c = 0$ y además

$$a^3 - 8a + 11 = 0 \rightarrow a^3 + 8 = 8a - 3$$

$$\rightarrow (a+2)(a^2 - 2a + 4) = 8a - 3$$

$$\rightarrow \frac{8a-3}{a^2-2a+4} = a+2$$

$$\text{Análogamente para } b \text{ y } c: \frac{8b-3}{b^2-2b+4} = b+2 \text{ y } \frac{8c-3}{c^2-2c+4} = c+2$$

$$\therefore K = a+2+b+2+c+2 = (a+b+c) + 6 = 6.$$

Rpta.: C

5. En una heladería, el costo de 4 helados de barquillo, 7 helados de vasito y un granizado es de S/ 35,50 y el costo de 5 helados de barquillo, 9 helados de vasito y un granizado es de S/ 40,50. En dicha heladería, el costo, en soles, al comprar un helado de barquillo, un helado de vasito y un granizado es

- A) 20,50. B) 30,50. C) 21,50. D) 22,50. E) 24,50.

Solución:

Sean

x : Precio de 1 helado de barquillo

y: Precio de 1 helado de vasito

z: Precio de 1 helado de granizado

De los datos, se tiene el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} 4x + 7y + z = 35,50 & \dots(1) \\ 5x + 9y + z = 40,50 & \dots(2) \end{cases}$$

Haciendo $4 \times (1)$ y $3 \times (2)$, se tiene

$$\begin{cases} 16x + 28y + 4z = 142 & \dots(3) \\ 15x + 27y + 3z = 121,50 & \dots(4) \end{cases}$$

Luego, haciendo $(3) - (4)$, resulta

$$x + y + z = 20,50$$

 $\therefore$ El costo de un helado de barquillo, uno de vasito y un granizado es de S/ 20,50.**Rpta.: A**

6. Dado el sistema de ecuaciones lineales en x, y, z $\begin{cases} x + my + 2z = 2 \\ mx + z = 1 \\ 2x + my + z = 0 \end{cases}$, determine el conjunto de valores de "m" para que el sistema sea incompatible.

A) 0 B) 1 C) 0 ; 1 D) 0 ; -1 E) -1

Solución:

i) $\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ m & 0 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = 0$, aplicando la regla de Sarrus se obtiene :

$$m^2 + m = 0 \rightarrow m(m+1) = 0 \rightarrow m = 0 \vee m = -1$$

ii) Reemplazando en el sistema, se tiene

$$* \text{ Para } m = 0: \begin{cases} x + 2z = 2 & \dots(1) \\ z = 1 & \dots(2) \\ 2x + z = 0 & \dots(3) \end{cases}$$

De (2) en (1): $x = 0$

De (2) en (3): $x = -\frac{1}{2}$

Entonces, el sistema es incompatible.

$$** \text{ Para } m = -1: \begin{cases} x - y + 2z = 2 & \dots(1) \\ -x + z = 1 & \dots(2) \\ 2x - y + z = 0 & \dots(3) \end{cases}$$

De (1)+(2) : $3z - y = 3$

De 2.(2)+(3): $3z - y = 2$

Entonces, el sistema es incompatible.

$\therefore$ El sistema es incompatible cuando $m \in \{0; -1\}$.

Rpta.: D

7. La administración del Parque de la Reserva, adquirió un total de 320 unidades entre escarificadores, sierras y tijeras podadoras por lo que gastó un total de S/ 250 000. El precio de un escarificador fue S/ 4000; el de una sierra, S/ 1000 y el de una tijera podadora, S/ 50. Además, el número de tijeras podadoras excedía en 80 unidades al número de escarificadores sumado con el número de sierras. ¿Cuántas unidades de sierras compró la administración?

A) 60 B) 90 C) 40 D) 80 E) 120

Solución:

Sean

x : Número de unidades de escarificadores

y : Número de unidades de sierras

z : Número de unidades de tijeras podadoras

Del enunciado, se tiene

$$\begin{cases} x + y + z = 320 & \dots(i) \\ 4000x + 1000y + 50z = 250000 & \dots(ii) \\ z - 80 = x + y & \dots(iii) \end{cases}$$

Reemplazando (iii) en (i), se tiene

$$z - 80 + z = 320 \rightarrow z = 200 \dots (iv)$$

Luego, de (iv) en (i) y (ii), se tiene

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 4x + y = 240 \end{cases}$$

$$\rightarrow x = 40 \quad \wedge \quad y = 80$$

$\therefore$ La administración compró 80 unidades de sierras.

Rpta. : D

8. Sean x, y, z números reales distintos entre sí que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^3 + 4y + 4z = 1 \\ 4x + y^3 + 4z = 1 \\ 4x + 4y + z^3 = 1 \end{cases}$$

Halle el valor de $L = \left(\frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3} \right)^{-1} + x + y + z$.

- A) 3 B) 0 C) 1 D) -3 E) -1

Solución:

$$\begin{cases} x^3 + 4y + 4z = 1 & \dots (i) \\ 4x + y^3 + 4z = 1 & \dots (ii) \\ 4x + 4y + z^3 = 1 & \dots (iii) \end{cases}$$

Haciendo (i) - (ii), se tiene

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 4(x - y) \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= 4(x - y), \quad x \neq y \\ \rightarrow x^2 + xy + y^2 &= 4 & \dots (iv) \end{aligned}$$

Análogamente, $y^2 + yz + z^2 = 4 \quad \dots (v)$

Haciendo (iv) - (v), se tiene $x + y + z = 0 \rightarrow y + z = -x$

Así, de (i) se tiene $x^3 + 4(-x) = 1 \rightarrow x^3 - 4x - 1 = 0$

Análogamente $y^3 - 4y - 1 = 0, \quad z^3 - 4z - 1 = 0$

Entonces, x, y, z son raíces del polinomio $p(a) = a^3 - 4a - 1 = 0$

$$\rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \quad \wedge \quad x + y + z = 0$$

$\therefore$ El valor de L es 3.

Rpta.: A

Reemplazando (iii) en (i), se tiene

$$z - 80 + z = 320 \rightarrow z = 200 \dots (iv)$$

Luego, de (iv) en (i) y (ii), se tiene

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 4x + y = 240 \end{cases}$$

$$\rightarrow x = 40 \quad \wedge \quad y = 80$$

$\therefore$ La administración compró 80 unidades de sierras.

Rpta. : D

8. Sean x, y, z números reales distintos entre sí que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^3 + 4y + 4z = 1 \\ 4x + y^3 + 4z = 1 \\ 4x + 4y + z^3 = 1 \end{cases}$$

Halle el valor de $L = \left(\frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3} \right)^{-1} + x + y + z$.

- A) 3 B) 0 C) 1 D) -3 E) -1

Solución:

$$\begin{cases} x^3 + 4y + 4z = 1 & \dots (i) \\ 4x + y^3 + 4z = 1 & \dots (ii) \\ 4x + 4y + z^3 = 1 & \dots (iii) \end{cases}$$

Haciendo (i) - (ii), se tiene

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 4(x - y) \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= 4(x - y) \quad , x \neq y \\ \rightarrow x^2 + xy + y^2 &= 4 \quad \dots (iv) \end{aligned}$$

Análogamente, $y^2 + yz + z^2 = 4 \quad \dots (v)$

Haciendo (iv) - (v), se tiene $x + y + z = 0 \rightarrow y + z = -x$

Así, de (i) se tiene $x^3 + 4(-x) = 1 \rightarrow x^3 - 4x - 1 = 0$

Análogamente $y^3 - 4y - 1 = 0$, $z^3 - 4z - 1 = 0$

Entonces, x, y, z son raíces del polinomio $p(a) = a^3 - 4a - 1 = 0$

$$\rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \quad \wedge \quad x + y + z = 0$$

$\therefore$ El valor de L es 3.

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si en la matriz $B = \begin{pmatrix} a-4 & b \\ 2-b & a \end{pmatrix}$, donde $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$, se cumple que $|B| = -5$, halle el valor de $(3a+b)$.

A) 7 B) 5 C) 8 D) 6 E) 3

Solución:

$$|B| = \begin{vmatrix} a-4 & b \\ 2-b & a \end{vmatrix} = (a-4)a - (2-b)b = -5$$

$$= (a-2)^2 + (b-1)^2 = 0$$

$$\rightarrow a = 2, b = 1$$

$$\therefore 3a + b = 7.$$

Rpta.: A

2. Daysi compró “y” lapiceros a 2 soles cada uno y “x” cuadernos a n soles cada uno ($n > 1$); y pagó por todo 29 soles. Si hubiera comprado la misma cantidad de lapiceros y cuadernos al precio unitario de n y 2 soles respectivamente, habría pagado un total de 31 soles. ¿Cuánto hubiera pagado Daysi por la compra de $(x+y)$ cuadernos al menor precio posible de n soles?

A) 28 soles B) 28 soles C) 36 soles D) 32 soles E) 21 soles

Solución:

i) Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 2y + nx = 29 \\ ny + 2x = 31 \end{cases}$$

Este sistema debe ser compatible determinado, entonces $\Delta_s \neq 0$, es decir

$$\begin{vmatrix} 2 & n \\ n & 2 \end{vmatrix} = 4 - n^2 \neq 0 \quad ; \text{ luego } n \neq \pm 2.$$

El menor precio posible para los cuadernos es: $n = 3$.

ii) El sistema sería $\begin{cases} 2y + 3x = 29 \quad \dots(1) \\ 3y + 2x = 31 \quad \dots(2) \end{cases}$

De (1) $\times 3$ le restamos (2) $\times 2$ se obtiene: $5x = 25 \rightarrow x = 5, y = 7$

Por tanto por la compra de $(x+y) = 12$ cuadernos, al menor precio posible pagaría 36 soles.

Rpta.: C

3. Karem compró “y” jabones al precio unitario de $(n-2)$ soles y 6 pastas dentales al precio de “x” soles cada uno; mientras que Carlos compró $(n+6)$ jabones al precio de “y” soles cada uno y $(n+2)$ pastas dentales al mismo precio unitario de “x” soles. Si la diferencia de los costos totales por la compra de jabones y pastas dentales, en ese orden, fue de $(3n-20)$ soles por la compra que realizó Karem y $(2n)$ soles en la compra realizada por Carlos, y si además dichas ecuaciones determinadas por la diferencia de los costos totales resultaron equivalentes, halle el valor de n.

A) 12 B) 4 C) 6 D) 10 E) 8

Solución:

De los datos se tiene el sistema:
$$\begin{cases} (n-2)y - 6x = 3n-20 \\ (n+6)y - (n+2)x = 2n \end{cases}$$

Como ambas ecuaciones resultan equivalentes, entonces se trata de un sistema compatible indeterminado, luego:

$$\frac{n-2}{n+6} = \frac{6}{n+2} = \frac{3n-20}{2n}$$

$$\rightarrow n^2 - 4 = 6n + 36$$

$$\rightarrow n^2 - 6n - 40 = 0$$

$$\rightarrow n = 10 \vee n = -4$$

En $\frac{6}{n+2} = \frac{3n-20}{2n}$, solo se verifica para $n = 10$.

Rpta.: D

4. Si $\begin{vmatrix} 1 & x & 5 \\ a & b & x \\ x & c & 7 \end{vmatrix} = 2$, halle el mayor elemento entero del conjunto solución de la

inecuación en x,
$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 1+3x & 5 & x \\ a+3b & x & b \\ x+3c & 7 & c \end{vmatrix} + 2.$$

A) -2 B) 3 C) 2 D) -1 E) 5

Solución:

$$i) \begin{vmatrix} 1+3x & 5 & x \\ a+3b & x & b \\ x+3c & 7 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & x \\ a & x & b \\ x & 7 & c \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 3x & 5 & x \\ 3b & x & b \\ 3c & 7 & c \end{vmatrix}}_0 = -\begin{vmatrix} 1 & x & 5 \\ a & b & x \\ x & c & 7 \end{vmatrix} = -2$$

$$ii) \text{ Resolviendo } \begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} \text{ por el método de Gauss se obtiene}$$

$$\Delta = 3(x+1)x + 6 + 0 - [2(x+1)x + 0 - 3x(1-x)] = -2x^2 + 4x + 6$$

$$iii) \text{ Reemplazando en la inecuación : } -2x^2 + 4x + 6 > -2 + 2$$

$$\rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x+1) < 0$$

$$\rightarrow x \in \langle -1, 3 \rangle$$

Por tanto el mayor elemento entero del conjunto solución es 2.

Rpta.: C

5. De un total de 50 estudiantes del curso de Álgebra Lineal de la Escuela de Estudios Generales de la UNMSM, se sabe que el total de estudiantes que desaprobaron el curso el semestre 2018-I ha sido el quíntuple del elemento entero del conjunto solución de la ecuación,

$$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 & x^3 \\ -1 & 10 & -2 \\ 1 & 50 & 4 \end{vmatrix} = 84 \begin{vmatrix} 3x^2 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix}$$

¿Cuántos estudiantes aprobaron dicho curso en el semestre 2018-I?

- A) 30 B) 45 C) 25 D) 35 E) 40

Solución:

$$i) \begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 & x^3 \\ -1 & 10 & -2 \\ 1 & 50 & 4 \end{vmatrix} = x^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & -2 \\ 1 & 50 & 4 \end{vmatrix} = 2x^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ (-1)^2 & (5)^2 & (-2)^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Aplicando Vandermonde, se obtiene: } \Delta = 2x^3(-6)(7)(-1) = 84x^3$$

ii) $84 \begin{vmatrix} 3x^2 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 84(3x^3 - 2)$

Reemplazando en la ecuación:

$$84x^3 = 84(3x^3 - 2) \rightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$$

→ $x = 1$, entonces 5 estudiantes desaprobaron el curso

Por tanto aprobaron el curso 45 estudiantes.

Rpta.: B

6. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + ay + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \end{cases}$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, determine

el conjunto de valores de "a" para que el sistema sea incompatible.

- A) 1 B) 3 C) 3 ; 2
D) 2 ; 3 E) 3

Solución:

i) $\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = 0$, aplicando método de Sarrus: $\Delta = a^2 + a - 6 = 0$

Entonces $a = -3$, $a = 2$

ii) Reemplazando en el sistema:

$$\text{Para } a = 2: \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & \dots 1 \\ x + y - z = 1 & \dots 2 \\ 2x + 3y + 2z = 3 & \dots 3 \end{cases}$$

De (1) y (2): $y + 4z = 1$

De (2) y (3): $y + 4z = 1$; luego el sistema es compatible indeterminado.

$$\text{Para } a = -3 : \begin{cases} x - 3y + 3z = 2 & \dots 1 \\ x + y - z = 1 & \dots 2 \\ 2x + 3y - 3z = 3 & \dots 3 \end{cases}$$

De (1) y (3): $3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3}$

En (1): $-y + z = \frac{1}{9}$ y en (2): $y - z = -\frac{2}{3}$, con lo cual el sistema es incompatible

$\therefore a = -3$.

Rpta.: B

7. De un grupo de 50 estudiantes del CEPREUNMSM, se observó que sobre la preferencia de los estudiantes en los cursos de Álgebra, Química y Biología, la razón entre las cantidades de estudiantes que prefieren los cursos de Química y Biología, en ese orden, es de 2 a 3. Se sabe además que el doble de la cantidad de estudiantes que prefieren Química disminuido en cinco, representa el 60% de la cantidad de estudiantes que prefieren Álgebra. Determine la cantidad de estudiantes que prefieren Álgebra.

A) 15 B) 24 C) 30 D) 25 E) 18

Solución:

Sea:

A: cantidad de estudiantes que prefieren álgebra

B: cantidad de estudiantes que prefieren biología

Q: cantidad de estudiantes que prefieren química

i) De los datos se tiene:

$$\begin{cases} A + B + Q = 50 \\ \frac{Q}{B} = \frac{2}{3} \\ 2Q - 5 = \frac{3}{5}A \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B + Q = 50 \\ 2B - 3Q = 0 \\ 3A - 10Q = -25 \end{cases}$$

$$\rightarrow \Delta_S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -10 \end{vmatrix} = -35 \quad \text{y} \quad \Delta_A = \begin{vmatrix} 50 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -25 & 0 & -10 \end{vmatrix} = -25(35)$$

$$\therefore A = \frac{\Delta_A}{\Delta_S} = \frac{-25(35)}{-35} = 25.$$

Rpta.: D

8. Halle el valor de n al resolver el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} 21y\sqrt{5y} = n \\ 14x\sqrt{5y} = n \\ x + y = \frac{25}{2} \end{cases} ; n \neq 0 .$$

- A) 550 B) 645 C) 525 D) 225 E) 625

Solución:

Como n es distinto de cero, entonces de la primera y segunda igualdad tendríamos que x e y también serían distintos de cero.

Dividimos la primera por la segunda ecuación: $\frac{21y}{14x} = 1 \rightarrow 3y = 2x$

De la 3era ecuación: $2x + 2y = 25 \rightarrow 5y = 25 \rightarrow y = 5$

Por tanto, de la 1era ecuación: $n = 21y\sqrt{5y} = 21(5)\sqrt{25} = 525$.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dadas las siguientes matrices, $A = \begin{pmatrix} a & 5 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b+2 & c \end{pmatrix}$, halle una relación entre los valores de a y c tales que $|B| = a - c$ y $|A| = -2$.

- A) $a - c = 1$ B) $ac = 1$ C) $a + c = 1$ D) $c = a + 1$ E) $a = -1 - c$

Solución:

$$\text{i) } |B| = \begin{vmatrix} 2 & a \\ b+2 & c \end{vmatrix} = 2c - a(b+2) = 2(c-a) - ab = -(c-a)$$

$$\rightarrow 3(c-a) = ab \quad \dots(1)$$

$$\text{ii) } |A| = \begin{vmatrix} a & 5 \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab - 5 = -2 \rightarrow ab = 3$$

Luego en (1): $c - a = 1 \rightarrow c = a + 1$.

Rpta.: D

2. Por la compra de $(n+8)$ peras se paga 2 soles. Si se vende $(m-1)$ peras por 3 soles, ¿cuántas peras hay que vender para ganar 6 soles?. Sabiendo que n y m son el menor y mayor valor, respectivamente, que hacen que el sistema

$$\begin{cases} 5x = 7 - ay \\ \frac{a}{5}x + y = \frac{9}{5} \end{cases} ; \text{ donde } a \neq 0, \text{ no tenga solución única.}$$

- A) 30 B) 12 C) 64 D) 36 E) 72

Solución:

i) El sistema, $\begin{cases} 5x + ay = 7 \\ \frac{a}{5}x + y = \frac{9}{5} \end{cases}$ tendrá única solución si $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & a \\ \frac{a}{5} & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces

$$\frac{25 - a^2}{5} \neq 0$$

$$\rightarrow a \neq \pm 5.$$

Luego el sistema no tendrá solución única si $a = 5 \vee a = -5$, así $n = -5$; $m = 5$

ii) De los datos:

Se compra 3 peras a 2 soles

Se vende 4 peras a 3 soles

Entonces en 12 peras: el costo es 8 soles y el ingreso es de 9 soles, es decir la ganancia es de 1 sol

Por tanto para ganar 6 soles se deberá vender $12(6) = 72$ peras.

Rpta.: E

3. Un móvil A sigue la trayectoria determinada por la recta $L_1: (n^2 - 7)x - 2y = 2$, iniciando su recorrido desde el punto $P(0, m)$, mientras que otro móvil B inicia su recorrido desde el punto $Q\left(0, -\frac{1}{n}\right)$ y sigue la trayectoria determinada por la recta $L_2: 3x + ny = -1$. Si ambos móviles han recorrido trayectorias paralelas y nunca han coincidido en su recorrido, halle la mayor distancia entre ambos puntos P y Q. (considere ambas rectas ubicadas en el mismo plano).

- A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

Solución:

i) Como los móviles siguen trayectorias paralelas y no coincidentes entonces el sistema:

$$\begin{cases} (n^2 - 7)x - 2y = 2 \\ 3x + ny = -1 \end{cases} \text{ es incompatible}$$

$$\rightarrow \frac{n^2 - 7}{3} = -\frac{2}{n} \neq \frac{2}{-1} \rightarrow n^3 - 7n + 6 = 0$$

$$\rightarrow (n-1)(n+3)(n-2) = 0 \rightarrow n = 1, n = -3, n = 2$$

$$\rightarrow n = 2 \wedge n = -3 \text{ cumplen que } -\frac{2}{n} \neq \frac{2}{-1}$$

i) El punto $P(0, m) \in L_1 \rightarrow m = -1$ y el punto $Q = \left(0, -\frac{1}{2}\right) \vee Q = \left(0, \frac{1}{3}\right)$

$\therefore$ La distancia "d" de P al punto Q es: $d = \frac{1}{2} \vee d = \frac{4}{3}$

Rpta.: A

4. Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

A) $\mathbb{R} - \langle 0, 1 \rangle$

B) $[0, 1]$

C) $\mathbb{R} - [0, 1]$

D) $\mathbb{R} - [-1, 0]$

E) $\langle 0, 1 \rangle$

Solución:

$$\text{i) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}]{F_2-F_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 1(-x)(1-x)$$

$$\text{ii) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3-C_2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

En la inecuación, $(-x)(1-x) > 0 \rightarrow x(x-1) > 0$

$\therefore \text{C.S} = \mathbb{R} - [0, 1]$.

Rpta.: C

5. Determine el conjunto solución de $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x^3 \\ (x-2) & 3(x+2) & (4x-x^2)x^2 \\ (x-2)^2 & 3(x+2)^2 & (x^2-4x)^2 x \end{vmatrix} < 0$; $x > 0$.
- A) $\langle 1,3 \rangle$ B) $\langle 0,1 \rangle$ C) $[1,3]$ D) $\langle 0,3 \rangle$ E) $\mathbb{R}^+$

Solución:

$$\text{i) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & x^3 \\ (x-2) & 3(x+2) & (4x-x^2)x^2 \\ (x-2)^2 & 3(x+2)^2 & (x^2-4x)^2 x \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & x^3 \\ (x-2) & (x+2) & (4-x)x^3 \\ (x-2)^2 & (x+2)^2 & (x-4)^2 x^3 \end{vmatrix}$$

$$3x^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (x-2) & (x+2) & (4-x) \\ (x-2)^2 & (x+2)^2 & (x-4)^2 \end{vmatrix}$$

Aplicando determinante Vandermonde

$$\Delta = 3x^3 [(x-2) - (x+2)][(x+2) - (4-x)][(4-x) - (x-2)]$$

$$= 3x^3 [-4][2x-2][6-2x]$$

- ii) De la inecuación, $-48x^3(x-1)(3-x) < 0$

Cancelamos los factores positivos :

$$\rightarrow (x-1)(x-3) < 0$$

$$\rightarrow \text{C.S} = \langle 1,3 \rangle.$$

Rpta.: A

6. Halle el conjunto de los valores de "a" para que el sistema $\begin{cases} (a-3)y + 4z = 2 \\ y - 2z = -1 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$ sea compatible indeterminado.
- A) $\{-1\}$ B) $\{0,1\}$ C) $\{2\}$ D) $\{1\}$ E) $\{-2,0\}$

Solución:

$$i) \Delta = \begin{vmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = a(-2a+2) = 0 \rightarrow a=0 \vee a=1$$

$$iii) \text{ En el sistema, cuando } a = 1 : \begin{cases} -2y + 4z = 2 \\ y - 2z = -1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}, \text{ de la ecuación (1) y (2) se}$$

reduce a la ecuación : $y - 2z = -1$ (infinitas soluciones)

De la ecuación (2) y (3): $x = 0$, por tanto en este caso el sistema es compatible indeterminado.

$$iv) \text{ En el sistema, cuando } a = 0 : \begin{cases} -3y + 4z = 2 \\ y - 2z = -1 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}, \text{ de las ecuaciones (2) y (3)}$$

sería un absurdo, por tanto el sistema sería incompatible.

$\therefore a = 1$.

Rpta.: D

7. Una compañía fabrica tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás. Para la fabricación de estos muebles se necesitaron unidades de madera, plástico y aluminio, tal como se indica en la siguiente tabla:

	Madera (en unidades)	Plástico (en unidades)	Aluminio (en unidades)
Silla	1	1	2
Mecedora	1	1	3
Sofá	1	2	5

La compañía tenía en stock 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1500 unidades de aluminio. Si la compañía utilizó todo su stock, halle la diferencia entre el número de sofás y sillas fabricadas.

- A) 120 B) 100 C) 80 D) 140 E) 70

Solución:

Sea: el número de sillas fabricadas: x
 el número de mecedoras fabricadas: y
 el número de sofás fabricados: z

Se tiene el siguiente sistema:
$$\begin{cases} x + y + z = 400 \\ x + y + 2z = 600 \\ 2x + 3y + 5z = 1500 \end{cases}$$

De las ecuaciones (1) y (2) : $z = 200$

En (1) y (3):
$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 2x + 3y = 500 \end{cases} \rightarrow y = 100 ; x = 100$$

$\therefore z - x = 100.$

Rpta.: B

8. Como parte de un proyecto escolar, Jahir tiene que pintar solo una cara de tres piezas de triplay de forma cuadrada, cuyas longitudes de sus lados, en metros, es de a , b y c , siendo la suma de dichas longitudes 4 m. Si al pintar las tres piezas de madera, Jahir cubrió en total 6m^2 y le sobró una pieza de triplay de forma rectangular, cuyas longitudes de sus lados miden b y c metros, respectivamente, y el área de una de sus caras es de 2m^2 . Halle el valor numérico del producto de las longitudes de las tres piezas de triplay.

A) 4 B) 3 C) 8 D) 6 E) 2

Solución:

Se tiene el sistema
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 6 \\ a + b + c = 4 \\ bc = 2 \end{cases}$$

$(a + b + c)^2 = 16$

$\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 16$

$\rightarrow 6 + 2a(b + c) + 2(2) = 16$

$\rightarrow a(b + c) = 3$

$\rightarrow b + c = \frac{3}{a}$

De la ecuación (2) del sistema: $a + \frac{3}{a} = 4 \rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \rightarrow a = 3 \vee a = 1$

Si $a = 3$: $bc = 2$ y $b + c = 1$, los cuales da soluciones complejas, por tanto $a = 1$
 $\therefore abc = 2.$

Rpta.: E

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

14
semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

I. INECUACIONES EN UNA VARIABLE

Una inecuación en una variable x , es toda expresión matemática $H(x)$ dada por

$$H(x) > 0; (\geq 0, < 0, \leq 0)$$

Al conjunto de los valores de x que hace a la desigualdad verdadera, se le denomina conjunto solución (C.S.) de la inecuación.

I.1 Inecuaciones polinomiales de grado superior

Es aquella inecuación que tiene la siguiente forma

$$p(x) > 0; (\geq 0, < 0, \leq 0); \text{grad}[p(x)] = n \geq 2$$

Considerando la inecuación:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 > 0; a_n > 0 \quad (*)$$

Y suponiendo que $p(x)$ se puede factorizar en la forma

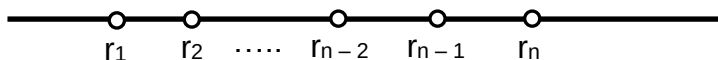
$$p(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n); \text{ donde } r_1 \neq r_2 \neq \dots \neq r_n$$

entonces la inecuación (*) se resuelve aplicando el Método de Puntos Críticos, el cual consiste en:

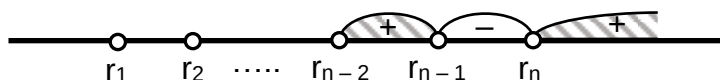
1º Halle todos los puntos críticos ó raíces de cada factor $(x - r_i)$. En este caso se tiene:

$$\text{Puntos críticos} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}.$$

2º Ordene los puntos críticos en la recta real: supongamos que los puntos son ordenados en la forma $r_1 < r_2 < \dots < r_{n-2} < r_{n-1} < r_n$, luego en la recta real se tendría:



- 3º Coloque entre los puntos críticos los signos (+) y (-) alternadamente, comenzando de la derecha y siempre con el signo (+):



Luego el conjunto solución para (*) será:

$$C.S = \langle r_n, +\infty \rangle \cup \langle r_{n-2}, r_{n-1} \rangle \cup \dots \quad (\text{regiones positivas})$$

Ejemplo 1

Resuelva la inecuación $x^3 - 8x^2 - x + 8 < 0$.

Solución

$$\begin{aligned} x^3 - 8x^2 - x + 8 < 0 &\rightarrow x^2(x-8) - (x-8) < 0 \\ &\rightarrow (x-8)(x+1)(x-1) < 0 \end{aligned}$$

Puntos críticos: $-1; 1$ y 8

$$\therefore C.S = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1, 8 \rangle$$

A continuación veamos el caso particular donde $\text{grad}[p(x)] = n = 2$.

Ejemplo 2

Resuelva la inecuación $3x^2 - 2x + 7 < 0$.

Solución

$$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(7) = -80 < 0 \rightarrow 3x^2 - 2x + 7 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore C.S = \emptyset$$

Observación:

Si en una inecuación polinomial de grado superior se presentan factores cuadráticos (con coeficiente principal positivo) cuyo discriminante es $\Delta < 0$, entonces se elimina ese factor y se procede con los demás factores aplicando el método de puntos críticos.

Ejemplo 3:

Resuelva la inecuación $(2x^2 - x + 1)(x - 13) < 0$.

Solución

$$2x^2 - x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ pues } a = 2 > 0 \text{ y } \Delta < 0$$

La inecuación equivalente es $x - 13 < 0 \rightarrow x < 13$

$$\therefore \text{C.S} = \langle -\infty; 13 \rangle$$

I.2 Inecuaciones Fraccionarias

Tiene la forma siguiente $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$; (> 0 , < 0 , ≤ 0); $P(x)$, $Q(x)$ son polinomios.

La inecuación planteada es equivalente a la inecuación $P(x).Q(x) \geq 0$ para los valores de x que no anulan a $Q(x)$ y se procede aplicando el método de puntos críticos. Debe tenerse presente que cuando la inecuación es $\leq$ o $\geq$ en los puntos críticos del numerador debe considerarse cerrado, pero en los puntos críticos del denominador deben ser abiertos.

Ejemplo 4

Resuelva la inecuación
$$\frac{(x - \sqrt{19})(x + 15)}{(x - \sqrt{19})(x - 8)} \leq 0.$$

Solución:

$$x - \sqrt{19} \neq 0 \rightarrow x \neq \sqrt{19}$$

Luego, la inecuación equivalente es $\frac{x + 15}{x - 8} \leq 0$

Puntos críticos: -15 y 8

$$\therefore \text{C.S} = [-15; 8) - \{\sqrt{19}\}$$

I.3 Inecuaciones Irracionales

Tiene la forma siguiente: $P(x) \geq Q(x)$; ($>$, $<$, $\leq$); donde $P(x)$ o $Q(x)$ son expresiones irracionales. Debemos garantizar que existan las expresiones irracionales en los reales.

Teoremas:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{i) } a^{2n}.b \geq 0 \leftrightarrow b \geq 0 \vee a = 0$$

$$\text{ii) } a^{2n}.b < 0 \leftrightarrow b < 0 \wedge a \neq 0$$

$$\text{iii) } a^{2n+1}.b \geq 0 \leftrightarrow a.b \geq 0$$

$$\text{iv) } a^{2n+1}.b < 0 \leftrightarrow a.b < 0$$

Ejemplo 5

Halle la suma del mayor y menor elemento entero del conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{\sqrt{x+4}(5x^2+7x+3)^2|x-2|}{(2x^2-4x-70)^9|3x-15|} \leq 0.$$

Solución

i) Restricciones

$$x+4 \geq 0, |x-2| \geq 0, 3x-15 \neq 0, 5x^2+7x+3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \underbrace{x \geq -4, x = 2, x \neq 5}_{(-4 \text{ y } 2 \text{ son soluciones})}$$

$$\rightarrow x \in [-4; +\infty) - \{5\} \quad \dots(1)$$

ii) Calculando el conjunto solución parcial de la inecuación equivalente

$$\frac{1}{(2x+10)^9(x-7)^9} \leq 0 \rightarrow (2x+10)(x-7) < 0 \rightarrow x \in (-5, 7) \quad \dots(2)$$

iii) Luego de $(1) \cap (2)$, se tiene

$$C.S. = [-4, 7) - \{5\}$$

$\therefore$ La suma del mayor y menor elemento entero del conjunto solución $(6) + (-4) = 2$.

Observación:

En caso que aparezcan inecuaciones con valor absoluto es conveniente recordar las siguientes propiedades:

1. $|x| < b \Leftrightarrow [b > 0 \wedge -b < x < b].$
2. $|x| \leq b \Leftrightarrow [b \geq 0 \wedge -b \leq x \leq b].$
3. $|x| > b \Leftrightarrow [x > b \vee x < -b].$
4. $|x| \geq b \Leftrightarrow [x \geq b \vee x \leq -b].$
5. $|x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) \leq 0.$

Ejemplo 6

Halle el conjunto solución de $|3x + 4| \geq |x - 8|$.

Solución

$$\begin{aligned} |3x + 4| \geq |x - 8| &\rightarrow |3x + 4|^2 \geq |x - 8|^2 \\ (3x + 4)^2 \geq (x - 8)^2 &\rightarrow (4x - 4)(2x + 12) \geq 0 \\ &\rightarrow (x - 1)(x + 6) \geq 0 \\ \therefore \text{C.S} &= \langle -\infty; -6] \cup [1; +\infty \rangle. \end{aligned}$$

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si el producto de las cifras del número $\overline{(x+2)(x+5)(x+3)}$ no es mayor que el cuádruple de la cifra de las unidades, halle la diferencia (en el orden dado) de la cifra de las unidades con el doble de la cifra de las decenas del número $(x+14)(3x+8)$.

A) -1 B) -8 C) -7 D) -6

Solución:

Por dato:

$$I) (x+2)(x+5)(x+3) \leq 4(x+3)$$

$$\rightarrow (x+3)[(x+2)(x+5)-4] \leq 0$$

$$\rightarrow (x+3)[(x+6)(x+1)] \leq 0$$

$$\rightarrow x \in \langle -\infty, -6 \rangle \cup [-3, -1]$$

$$\text{Además: } x+2 > 0, \quad x+5 \geq 0, \quad x+3 \geq 0 \Rightarrow x > -2$$

$$\Rightarrow x = -1$$

II) Luego el número $(x+14)(3x+8)$ sería 65

Por lo tanto:

la diferencia de la cifra de las unidades con el doble de la cifra de las decenas del número es:

Rpta.: C

2. Javier recibió de su mamá y papá cierta cantidad en dólares. Si el producto de los cuatro menores elementos enteros del conjunto solución de la inecuación $(x^8+2)(5x+4) > (3x-10)(x^8+2)$ coincide con la cantidad de dólares que recibe Javier de su mamá y la cantidad de dólares que recibe de su papá coincide con el producto de las tres mayores soluciones pares enteras de la inecuación $(x^2-3x-70)^2 \leq (x^2-17x+70)^2 + 224(x-10)^2$. ¿Cuánto dinero en total recibió Javier?

A) 552 dólares B) 480 dólares C) 840 dólares D) 1320 dólares

Solución:

$$I) (x^8 + 2)(5x + 4) > (3x - 10)(x^8 + 2) \Rightarrow 5x + 4 > 3x - 10 \Rightarrow x > -7$$

De su mamá recibió: $(-6)(-5)(-4)(-3) = 360$ dólares

$$II) (x^2 - 3x - 70)^2 \leq (x^2 - 17x + 70)^2 + 224(x - 10)^2$$

$$\rightarrow (x - 10)^2 (x + 7)^2 \leq (x - 10)^2 (x - 7)^2 + 224(x - 10)^2$$

$$\rightarrow (x - 10)^2 [(x + 7)^2 - (x - 7)^2 - 224] \leq 0$$

$$\rightarrow (x - 10)^2 [4x(7) - 224] \leq 0 \rightarrow (x - 10)^2 [x - 8] \leq 0$$

$$\rightarrow x \leq 8, \quad 10 \text{ es solución} \Rightarrow \text{CS} = \langle -\infty, 8 \rangle \cup \{10\}$$

De su papá recibió: $(10)(8)(6) = 480$ dólares

$\therefore$ En total recibió: 840 dólares

Rpta.: C

3. Un talentoso futbolista tiene ofertas de dos clubs. El primer club le ofrece $\overline{(c-b)}0$ millones de euros y el segundo club $\overline{(d-c)}0$ millones de euros. Si al resolver la inecuación $\frac{x^4(x^3+2)^3(2-x)^2(x-9)}{x^2-4x+4} < 0$, el conjunto solución es de la forma $\langle a, b \rangle \cup \langle b, c \rangle \cup \langle c, d \rangle$, ¿cuántos millones de euros recibirá el futbolista, si aceptó el club que ofreció más?

- A) 80 millones de euros
C) 90 millones de euros

- B) 60 millones de euros
D) 70 millones de euros

Solución:

$$\frac{x^4(x^3+2)^3(2-x)^2(x-9)}{x^2-4x+4} < 0$$

$$x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \frac{(x+\sqrt[3]{2})^3(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2}^2)^3(x-2)^2(x-9)}{(x-2)^2} < 0, x \neq 0$$

$$x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{2}^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow (x+\sqrt[3]{2})(x-9) < 0, x \neq 0, x \neq 2$$

$$\rightarrow CS = \langle -\sqrt[3]{2}, 9 \rangle - \{0, 2\}$$

$$\rightarrow CS = \langle -\sqrt[3]{2}, 0 \rangle \cup \langle 0, 2 \rangle \cup \langle 2, 9 \rangle \rightarrow a = -\sqrt[3]{2}, b = 0, c = 2, d = 9$$

Luego, el primer club le ofrece $\overline{(c-b)}0 = 20$ millones de euros y el segundo club le ofrece $\overline{(d-c)}0 = 70$ millones de euros.

Por lo tanto, 70 millones de euros recibirá el futbolista del club que ofreció más.

Rpta.: D

4. Un grupo de más de 28 estudiantes, contrató un bus para un viaje de promoción; y de forma equitativa, entre el total de estudiantes pagaron por dicho contrato 3000 soles. El tutor responsable del grupo se percató que, si hubiesen viajado 20 estudiantes más, cada estudiante se hubiese ahorrado más de 40 soles en su aporte por el contrato del bus al mismo precio. ¿Cuántos estudiantes viajaron, si ninguno faltó al viaje de promoción?

A) 32

B) 31

C) 30

D) 29

Solución:

Sea x el número de estudiantes que contratan un bus, además $x > 28$

Entonces el costo de cada estudiante $\frac{3000}{x}$

Si hubiesen viajado $(x + 20)$ estudiantes

El costo de cada estudiante sería $\frac{3000}{x + 20}$

Por el dato

$$\frac{3000}{x} - \frac{3000}{x + 20} > 40$$

$$\rightarrow \frac{75}{x} - \frac{75}{x + 20} > 1 \rightarrow \frac{x^2 + 20x - 1500}{x(x + 20)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{(x + 50)(x - 30)}{x(x + 20)} < 0$$

Como $x > 28$ entonces la inecuación se reduce a

$$x - 30 < 0 \rightarrow 28 < x < 30 \Rightarrow x = 29$$

$\therefore$ Viajaron 29 estudiantes.

Rpta.: D

5. Si $H = [\alpha, \beta]$ es el conjunto solución de la inecuación $\sqrt{81 - x^4} + \sqrt{\frac{1}{a - x}} \geq 0$, $a > 3$, halle el valor de $L = \alpha + \beta + M$, sabiendo que “m” es el menor valor entero que toma “a”.

A) -3

B) 4

C) -2

D) 3

Solución:

$$I) \sqrt{81 - x^4} + \sqrt{\frac{1}{a - x}} \geq 0$$

$$81 - x^4 \geq 0 \wedge a - x > 0$$

$$\rightarrow (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3) \leq 0 \wedge x < a$$

$$\rightarrow -3 \leq x \leq 3 \wedge x < a \rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

II) La inecuación se verifica para todo x que cumple la condición I

$$\Rightarrow CS = [-3, 3] \rightarrow \alpha = -3, \beta = 3, m = 4$$

$$\therefore L = \alpha - \beta + m = -2$$

Rpta.: C

6. Cierta día en el Perú, se presentaron $\overline{(2\alpha)(\beta + 1)(\alpha - \beta + 4)}$ casos de personas contagiadas por el COVID-19, siendo α el número de soluciones enteras de la inecuación $\frac{x^3 - 27}{x^6 + 6} \cdot \frac{x^2 + x + 13}{\sqrt{3 - |x - 2|}} < 0$ y β la mayor solución entera, halle la cantidad de casos de personas contagiadas ese día.

A) 607

B) 829

C) 425

D) 635

Solución:

i) Restricciones

$$3 - |x - 2| > 0 \rightarrow |x - 2| < 3 \rightarrow -3 < x - 2 < 3 \rightarrow -1 < x < 5$$

$$x^2 + x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^6 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

ii) Resolviendo la inecuación equivalente

$$x^3 - 27 < 0 \rightarrow x - 3 \quad x^2 + 3x + 9 < 0 \rightarrow x - 3 < 0 \rightarrow x < 3$$

Luego, de (i) $\cap$ (ii) se tiene

$$C.S = \langle -1, 3 \rangle \rightarrow \alpha = 3, \beta = 2$$

$$\Rightarrow (2\alpha)(\beta + 1)(\alpha - \beta + 4) = 635$$

Por lo tanto, el número de casos de personas contagiadas ese día fue 635.

Rpta.: D

8. Halle la suma de las soluciones enteras de la inecuación

$$\frac{\sqrt{64 - x^2} \sqrt{x - 5} (x^2 - 5x + 6)(x^3 + 8)}{(|x| - 7)(|x| + 1)\sqrt{9 - x}} \leq 0$$

A) 17

B) 19

C) 14

D) 11

Solución:

i) Restricciones

$$64 - x^2 \geq 0 \wedge x - 5 \geq 0 \wedge 9 - x > 0 \wedge |x| + 1 > 0$$

$$\rightarrow -8 \leq x \leq 8 \wedge x \geq 5 \wedge x < 9 \Rightarrow 5 \leq x \leq 8$$

$$\rightarrow x \in [5; 8] - \{7\} \dots (1)$$

ii) Resolviendo la inecuación equivalente

$$\frac{(x - 3)(x - 2)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(|x| - 7)(|x| + 1)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 3)(x - 2)(x + 2)}{(|x| - 7)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 3)(x - 2)(x + 2)}{(x + 7)(x - 7)} \leq 0$$

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty, -7 \rangle \cup [-2, 2] \cup [3, 7)$$

De i) y ii)

$$\Rightarrow C.S. = [5, 7) \cup \{8\}$$

Por lo tanto, la suma de las soluciones enteras de la inecuación: $5 + 6 + 8 = 19$.

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el sector salud, unos consultores consideraron la ecuación de demanda en miles de soles de un medicamento genérico que viene dado por $D(q) = -0,125q^2 + 25q$ y la ecuación de costo total en miles de soles de los medicamentos genéricos la cual es $C(q) = 0,125q^3 + 400q$ respectivamente. Determine el intervalo de valores de "q" que deben considerar los consultores, para obtener ganancia. Considerar D: demanda, C: costo y q: es el número de unidades de producción.

- A) 21 ; 79 B) $\langle 10;100 \rangle$ C) 20 ; 80 D) 10 ; 100

Solución:

$$D(q) = -0,125q^2 + 25q \text{ y } C(q) = 0,125q^3 + 400q$$

Luego el ingreso

$$\rightarrow I(q) = (-0,125q^2 + 25q)q = -0,125q^3 + 25q^2$$

Entonces la ganancia

$$\rightarrow U(q) = I(q) - C(q) = -0,25q^3 + 25q^2 - 400q$$

por dato del problema $U(q) > 0$

$$\rightarrow -0,25q^3 + 25q^2 - 400q > 0$$

$$\rightarrow q(q-20)(q-80) < 0$$

$$\rightarrow q \in \langle 20,80 \rangle, \text{ además } q \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow q \in [21,79]$$

Rpta.: A

2. Si m es el mayor valor entero de x tal que $x^3 - x^2 - 2x$ es un número positivo que al dividirlo entre $x^2 + x$ resulta que su cociente no es mayor que 1, halle el menor valor entero de z que cumple: $z > 3m(m+1)$.

- A) 36 B) 39 C) 37 D) 35

Solución:

$$I) \quad x^3 - x^2 - 2x > 0$$

$$x \cdot x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow x \cdot x - 2 \cdot x + 1 > 0$$

$$\rightarrow x \in \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

$$II) \quad \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + x} \leq 1$$

$$\rightarrow \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 + x} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{x \cdot x - 3 \cdot x + 1}{x \cdot x + 1} \leq 0 \rightarrow x - 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

De I) y II) $m = 3$

Como $z > 3m(m+1)$ entonces $z > 36$

Por lo tanto, el menor valor entero de z es 37.

Rpta.: C

3. La ciudad de Huamanga es conocida por sus 33 iglesias tradicionales. Eva y Juan son dos turistas que piensan visitar estas iglesias, pero solo llegan a visitar $|3a+2b|$ y $4c+3d$ iglesias respectivamente. Si $\langle -\infty, a \rangle \cup [b, -c] \cup \langle c, d \rangle$ es el conjunto

solución de $\frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 24}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12} \leq 1$, ¿cuántas iglesias de Huamanga les faltó visitar a Eva y Juan?

- A) A Eva le faltó visitar 15 y a Juan 16.
 B) A Eva le faltó visitar 22 y a Juan 16.
 C) A Eva le faltó visitar 18 y a Juan 17.
 D) A Eva le faltó visitar 11 y a Juan 16.

Solución:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 24}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 7x + 12}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12} \leq 0$$

Factorizando

$$\Rightarrow \frac{(x+4)(x+3)}{(x+2)(x-2)(x-3)} \leq 0$$

aplicando puntos críticos

$$CS = \langle -\infty, -4 \rangle \cup [-3, -2] \cup \langle 2, 3 \rangle \Rightarrow a = -4, \quad b = -3, \quad c = 2, \quad d = 3$$

Entonces

Eva llegó a visitar $|3a + 2b| = 18$ iglesias y Juan llegó a visitar $4c + 3d = 17$ iglesias

Por lo tanto, A Eva le faltó visitar 15 y a Juan 16.

Rpta.: A

4. Si $[a, b] \cup \{c, -c\}$ es el complemento del conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 - 8|(6x^4 - x^3 - 6x^2 + 15x - 49) > |x^2 - 8|,$$

halle el valor de $3a(b+1)c^2$.

A) 120

B) 40

C) -64

D) -128

Solución:

$$|x^2 - 8|(6x^4 - x^3 - 6x^2 + 15x - 49) > |x^2 - 8|$$

$$\rightarrow 6x^4 - x^3 - 6x^2 + 15x - 50 > 0, \quad x \neq \sqrt{8}, \quad x \neq -\sqrt{8}$$

Factorizando

$$\rightarrow (3x - 5)(x + 2)(2x^2 - x + 5) > 0, \quad x \neq \sqrt{8}, \quad x \neq -\sqrt{8}$$

$$\rightarrow (3x - 5)(x + 2) > 0, \quad x \neq \sqrt{8}, \quad x \neq -\sqrt{8}$$

$$\rightarrow x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right\rangle, \quad x \neq \sqrt{8}, \quad x \neq -\sqrt{8}$$

$$\rightarrow CS = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right\rangle - \{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}$$

$$(CS)^c = \left[-2, \frac{5}{3}\right] \cup \{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\} \Rightarrow a = -2, \quad b = \frac{5}{3}, \quad c^2 = (\pm\sqrt{8})^2$$

$$\therefore 3a(b+1)c^2 = 3(-2)\left(\frac{5}{3} + 1\right)8 = -128$$

Rpta.: D

5. Antonio va al mercado central y ve que hay una oferta de “a” kg de papa huayro a “b” soles. Si decide comprar “c” kg de papa huayro, donde $\langle a - 4, \frac{b}{2} - 2 \rangle \cup \langle c - 8, +\infty \rangle$ es el conjunto solución de la inecuación $\frac{|x-1| - |x|}{1 - |x|} \geq 0$, ¿cuánto paga Antonio por la compra de las papas?

A) 15 soles

B) 20 soles

C) 10 soles

D) 12 soles

Solución:

La inecuación dada es equivalente a:

$$\frac{|x-1|-|x|}{1-|x|} \geq 0 \Rightarrow \frac{(|x-1|-|x|)(|x-1|+|x|)}{(1-|x|)(1+|x|)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2 - x^2}{1-x^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

Entonces el conjunto solución es $\langle -1, \frac{1}{2} \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$, entonces $a=3$, $b=5$ y $c=9$, es decir 3 kg de papa cuestan 5 soles, y por 9 kg Antonio habría pagado 15 soles.

Rpta.: A

6. Halle el número de soluciones enteras de la inecuación

$$\sqrt{|x^3 - 2x^2| - 2|x|^3} \leq |x|; \quad x \in \mathbb{R}.$$

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

Solución:

$$\sqrt{|x^3 - 2x^2| - 2|x|^3} \leq |x|; \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Restricción

$$|x^3 - 2x^2| - 2|x|^3 \geq 0$$

$$0 \leq |x-2| - 2|x|, \quad x=0 \text{ es solución}$$

$$\Rightarrow |2x| \leq |x-2|$$

$$\Rightarrow (3x-2)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

ii) $\sqrt{|x^3 - 2x^2| - 2|x|^3} \leq |x|; \quad x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{|x|^2 [|x-2| - 2|x|]} \leq \sqrt{|x|^2}; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{|x-2| - 2|x|} \leq 1$$

$$|x-2| - 2|x| \leq 1$$

$$\text{Además } x \in \left[-2, \frac{2}{3}\right]$$

$$\text{Si } -2 \leq x < 0 \Rightarrow 2 - x - 2(-x) \leq 1 \Rightarrow x \leq -1 \Rightarrow -2 \leq x \leq -1$$

$$\text{Si } 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow 2 - x - 2(x) \leq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{CS} = [-2, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \{0\}$$

Nro. de soluciones enteras es: 3

Rpta.: D

7. Si la suma de las soluciones enteras del conjunto solución de la inecuación

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2020} \sqrt[3]{x^2 - x - 6}}{\sqrt[8]{40 + 3x - x^2} (x^2 - 7x + 12)(3x^2 - 2x + 42)} \geq 0$$

representa en años, la edad de Martha, determine su edad dentro de 13 años.

- A) 11 B) 22 C) 24 D) 20

Solución:

- i) Restricciones

$$40 + 3x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 40 < 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 5) < 0$$

$$\Rightarrow -5 < x < 8 \quad \dots(1)$$

- ii) Resolviendo la inecuación equivalente

$$\sqrt{x^2 + 2020} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad (3x^2 - 2x + 42) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{(x^2 - 7x + 12)} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(x - 4)} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x + 2)}{(x - 4)} \geq 0, x \neq 3$$

$$x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle \quad \dots(2)$$

Luego, de (1) y (2) se tiene

$$\text{C.S} = \langle -5; -2 \rangle \cup \langle 4; 8 \rangle$$

La edad de Martha: $-4 - 3 - 2 + 5 + 6 + 7 = 9$ años

$\therefore$ dentro de 13 años su edad será 22 años.

Rpta.: B

8. José tiene 6(abcd) soles para comprar casacas en una tienda deportiva cuyo precio unitario de cada casaca es de $3(3|a| + |b| + |c| + |d| + 3)$ soles. Si $[a, b) \cup [c, d]$ es el

conjunto solución de la inecuación $\frac{(x - 2)^5 (x - 3)^{16} \sqrt{36 - x^2}}{|x - 4| - 7} \leq 0$, ¿cuántas casacas del mismo precio como máximo puede comprar José?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13

Solución:

$$\frac{(x-2)^5(x-3)^{16}\sqrt{36-x^2}}{|x-4|-7} \leq 0$$

i) Restricciones

$$36-x^2 \geq 0 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6 \quad \dots(1)$$

ii) Resolviendo la inecuación

$$\frac{(x-2)^5(x-3)^{16}}{|x-4|-7} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)}{|x-4|-7} \leq 0, \quad x=3 \text{ solución de la inecuación}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)}{[|x-4|-7][|x-4|+7]} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)}{|x-4|^2-7^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)}{(x+3)(x-11)} \leq 0$$

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup [2, 11) \quad \dots(2)$$

De $(1) \cap (2)$: $CS = [-6, -3) \cup [2, 6] \rightarrow a = -6, b = -3, c = 2; d = 6 \rightarrow 6abcd = 1296$

Entonces, José tiene 1296 soles.

Luego, el precio unitario de cada casaca es de $3(3|a| + |b| + |c| + |d| + 3) = 96$ soles

$\therefore$ Nro. casacas del mismo precio como máximo puede comparar José es 13.

Rpta.: D

9. Cada año, un tercio de todos los alimentos producidos para el consumo humano se pierde o desperdicia, esto equivale a $m(p-n)\left(\frac{q}{3}-5\right)$ millones de toneladas de

alimentos. El desperdicio de alimentos es responsable de un sorprendente $k\%$ de emisiones globales de carbono. Halle el número de millones de toneladas de alimentos que se pierde o desperdicia y el porcentaje de emisiones globales de carbono que origina dicho desperdicio, respectivamente. Siendo k el doble de la media aritmética de las tres menores soluciones enteras de la inecuación

$$\frac{\sqrt{15-x} \cdot (x^2-2x-35)^{2020} \cdot (x^2+2x+4)}{\sqrt{x-1} \cdot (x^2-2|x|+5) \cdot (x^2-16)^{2021}} \leq 0, \text{ cuyo } C.S = \langle m, n \rangle \cup \{p, q\}.$$

- A) 1300 millones y 8%
 B) 1200 millones y 10%
 C) 1200 millones y 7%
 D) 1300 millones y 9%

Solución:

i) Restricciones

$$15 - x \geq 0 \wedge x - 1 > 0, \quad x^2 + 2x + 4 > 0 \quad \forall x \in$$

$$\rightarrow 15 \geq x \wedge x > 1$$

$$\rightarrow x \in \langle 1, 15 \rangle \dots (1)$$

$x = 15$ es solución

ii) Calculando el conjunto solución parcial de la inecuación equivalente

$$\frac{1}{\left(\underbrace{(|x|-1)^2 + 4}_+ \right) (x-4)(x+4)} \geq 0, \quad x = 7, x = -5$$

$$\rightarrow \frac{1}{(x-4)(x+4)} \leq 0, \quad x = 7, x = -5$$

$$\rightarrow (x-4)(x+4) < 0, \quad x = 7, x = -5$$

$$\rightarrow x \in \langle -4; 4 \rangle \cup \{-5, 7\} \dots (2)$$

iii) Luego de $(1) \cap (2)$, se tiene

$$C.S. = \langle 1; 4 \rangle \cup \{7, 15\} \rightarrow m = 1, n = 4, p = 7, q = 15 \Rightarrow m(p-n) \left(\frac{q}{3} - 5 \right) = 1300$$

$$\text{Además } k = 2 \left(\frac{2+3+7}{3} \right) = 8$$

$\therefore$ Se tiene 1300 millones de toneladas de alimentos que se pierde o desperdicia y dichos alimentos originan el 8% de emisiones globales de carbono.

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. Los pobladores de una comunidad, desean construir dos jardines rectangulares A y B. Las medidas del jardín A están representadas, en metros, por $(2x-3)y(5x-3)$; y las de B están dadas por $(2x-4)y(8-x)$, con $x \in \mathbb{Z}$. Se sabe que el área del jardín A debe ser mayor a $(3-2x) \text{ m}^2$ y el área de B no debe ser menor a $(13-3x) \text{ m}^2$. Para que la suma de las áreas de los jardines sea máxima, ¿cuál debe ser el perímetro de ambos jardines?
- A) 104 m B) 106 m C) 108 m D) 110 m

Solución:

Según los datos

$$\begin{aligned} \text{Para el jardín A: } (2x-3)(5x-3) &> 3-2x \rightarrow 10x^2 - 19x + 6 < 0 \\ &\rightarrow (2x-3)(5x-2) < 0 \\ &\rightarrow x \in \left\langle -\infty; \frac{2}{5} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}; +\infty \right\rangle \dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para el jardín B: } (2x-4)(8-x) &\geq 13-3x \rightarrow 2x^2 - 23x + 45 \leq 0 \\ &\rightarrow (2x-5)(x-9) < 0 \\ &\rightarrow x \in \left[\frac{5}{2}; 9 \right] \dots(2) \end{aligned}$$

Luego, de $(1) \cap (2)$ se tiene

$$x \in \left[\frac{5}{2}; 9 \right] \dots(3)$$

Pero las medidas de los lados de dichos jardines no pueden ser negativos, entonces

$$x < 8 \dots(4)$$

Finalmente, de (3) y (4) se tiene

$$x \in \left[\frac{5}{2}; 8 \right]$$

Con $x = 7$ se obtiene la mayor suma de áreas de los jardines.

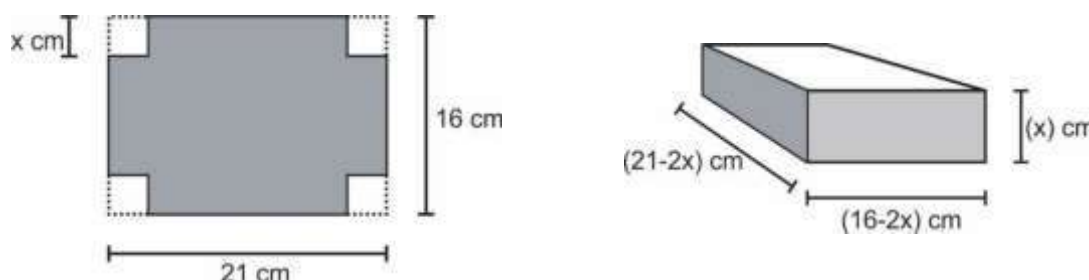
$\therefore$ La suma de perímetros es 108 m.

Rpta.: C

2. Con una pieza rectangular de cartón de 21×16 cm, Anaís desea construir una caja de base rectangular sin tapa para colocar un peluche. Para ello, debe cortar cuadrados congruentes en las cuatro esquinas de dicha pieza y luego doblar hacia arriba las porciones restantes de los lados para formar las caras laterales de la caja. Si el volumen de dicha caja no es menor a 450 cm^3 , calcule la cantidad de cartón utilizado para construir dicha caja.

A) 280 cm^2 B) 320 cm^2 C) 300 cm^2 D) 250 cm^2

Solución:



$$\text{Volumen}_{\text{CAJA}} \geq 450 \rightarrow (21-2x)(16-2x)(x) \geq 450 \wedge x < 8$$

$$4x^3 - 74x^2 + 336x - 450 \geq 0 \wedge x < 8$$

$$\text{Factorizando } 4x^3 - 74x^2 + 336x - 450 = (x-3)^2(2x-25)$$

$$(x-3)^2(2x-25) \geq 0 \wedge x < 8$$

$$\rightarrow x \in ([12,5; +\infty) \cup \{3\}) \cap (-\infty; 8)$$

$$\rightarrow x = 3$$

Dimensiones de la caja: 15 cm, 10 cm y 3 cm

$$\therefore \text{Cantidad de cartón} = (15)(10) + 2(10)(3) + 2(3)(15) = 300 \text{ cm}^2.$$

Rpta.: C

3. Kittzay decide repartir equitativamente cierta cantidad de dinero entre sus $(x-2)^3(x+5)^2$ empleados. Esta cantidad de dinero resulta de la venta de $(x-2)^2$ artículos a $(x^3 + 5x^2 - 32x + 36)$ miles de soles cada uno. Si $x \in \mathbb{Z}^+$ y $C(x)$ representa la cantidad de dinero que le toca a cada empleado, indique la suma de las tres menores soluciones enteras que verifican la inecuación $C(x) \geq 0$.

A) 18 B) 10 C) 15 D) 12

Solución:

Sea $S(x)$ cantidad de dinero que tiene Kittzay

$$\rightarrow S(x) = (x-2)^2 (x^3 + 5x^2 - 32x + 36) = (x-2)^4 (x+9)$$

Luego, la cantidad de dinero, que le toca a cada empleado es

$$C(x) = \frac{S(x)}{\text{Nº de empleados}}, \quad x \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$\rightarrow C(x) = \frac{(x-2)^4 (x+9)}{(x-2)^3 (x+5)^2}$$

Luego,

$$\frac{(x-2)^4 (x+9)}{(x-2)^3 (x+5)^2} \geq 0$$

$$\text{i) Restricción: } x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x-2 \neq 0 \wedge x+5 \neq 0 \rightarrow x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -5 \dots(1)$$

$$\text{ii) Resolviendo la inecuación equivalente } (x-2)(x+9) \geq 0$$

$$x \in \langle -\infty; -9 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle \dots(2)$$

De (1) y (2), se tiene $x \in \langle 2; +\infty \rangle$

Tres menores soluciones enteras: 3; 4 y 5

$\therefore$ La suma de las tres menores soluciones enteras es 12.

Rpta.: D

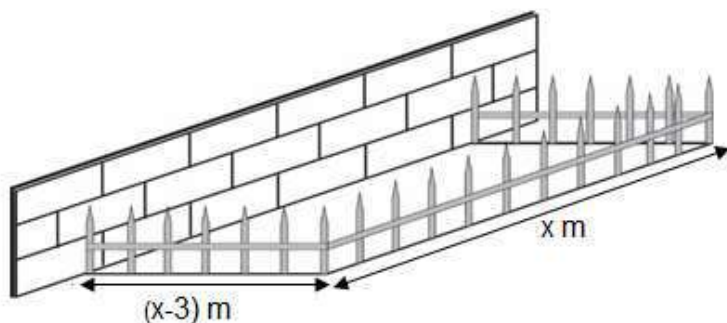
4. Aprovechando la existencia de un muro de su casa, Kins ha cercado una parcela en forma rectangular para plantar rosas, tal como se muestra en la figura. Si la medida de la diagonal de la parcela es menor que la medida de su largo aumentado en un metro, ¿cuál es máxima longitud entera de la cerca?

A) 10 m

B) 6 m

C) 12 m

D) 9 m



Solución:

De la figura, se tiene

$$D^2 = (x-3)^2 + x^2 \rightarrow D = \sqrt{(x-3)^2 + x^2}$$

Pero,

$$D < x+1$$

$$\rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + x^2} < x+1 \quad \wedge \quad x-3 > 0$$

$$\rightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 9} < x+1$$

$$\rightarrow 2x^2 - 6x + 9 < x^2 + 2x + 1$$

$$\rightarrow x^2 - 8x + 8 < 0$$

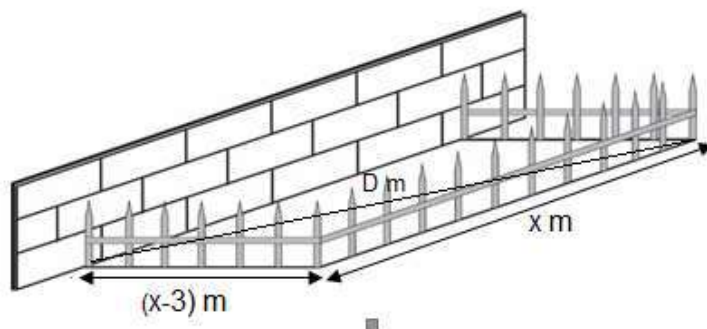
$$\rightarrow (x-4)^2 - 8 < 0 \rightarrow (x-4)^2 < 8$$

$$\rightarrow -2\sqrt{2} < x-4 < 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow 4 - 2\sqrt{2} < x < 4 + 2\sqrt{2} \quad \wedge \quad x > 3$$

Soluciones enteras: 4; 5 y 6

$$\rightarrow x_{\max} = 6$$



$\therefore$ Longitud de la cerca $_{\max} = 3 + 3 + 6 = 12$ m.

Rpta.: C

5. Dados los conjuntos

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left(|x|^2 + 3x + 9 \right) \left(\frac{x+2}{x-4} \right) < 0 \right\} \quad \text{y} \quad T = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{2}{|x-1|} \leq 3 \right\}.$$

Halle la suma de los dos mayores elementos enteros de $(M \cap T)$.

A) 6

B) 8

C) 5

D) 9

Solución:

$$\text{i) En } M: \underbrace{\left(|x|^2 + 3x + 9 \right)}_{\substack{\Delta < 0 \\ (+)}} \left(\frac{x+2}{x-4} \right) < 0$$

$$\rightarrow \frac{x+2}{x-4} < 0$$

$$\rightarrow M = \langle -2, 4 \rangle$$

$$\text{ii) En } T: \frac{2}{|x-1|} \leq 3 \quad \text{como } |x-1| > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{se tiene}$$

$$|x-1| \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x-1 \geq \frac{2}{3} \vee x-1 \leq -\frac{2}{3}, \quad x \neq 1$$

$$\Rightarrow T = \left\langle -\infty, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty \right)$$

Luego

$$M \cap T = \left\langle -2, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{5}{3}, 4 \right)$$

$\therefore$ La suma de mayores elementos enteros de $(M \cap T)$ es 5.

Rpta.: C

6. Si $T = [c; d]$ es el conjunto solución de la inecuación $\frac{x-5}{2x+|x^2-2x+1|} \geq 0$,

halle el valor de $P = \sqrt{cd - c - 1}$.

A) 16

B) 12

C) 13

D) 14

Solución:

i) Restricciones

$$30 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 30 \quad \dots(1)$$

$$x^2 + x + 13 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|x^2 - 2x + 1| = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

ii) Resolviendo la inecuación equivalente

$$\frac{x-5}{x^2+1} \geq 0 \rightarrow x \in \langle 5; +\infty \rangle \quad \dots(2)$$

Luego, de $(1) \cap (2)$ se tiene

$$C.S = [5; 30] \rightarrow c = 5, d = 30$$

$$\therefore P = \sqrt{cd - c - 1} = \sqrt{150 - 5 - 1} = \sqrt{144} = 12.$$

Rpta.: B

7. Si $K = \langle a; b \rangle \cup [c; d]$ es el conjunto solución de la inecuación $\sqrt{\frac{2x-8}{x-1}} + \sqrt{\frac{5-x}{x+3}} \geq 0$, halle el valor de $P = ab - cd$.
- A) - 20 B) - 24 C) - 23 D) - 22

Solución:

$$\sqrt{\frac{2x-8}{x-1}} + \sqrt{\frac{5-x}{x+3}} \geq 0$$

i) Restricciones

$$\begin{aligned} \frac{2x-8}{x-1} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{5-x}{x+3} \geq 0 \\ x \in \langle -\infty; 1 \rangle \cup [4; +\infty) \quad \wedge \quad x \in \langle -3; 5] \\ \rightarrow x \in \langle -3; 1 \rangle \cup [4; 5] \quad \dots(1) \end{aligned}$$

ii) Resolviendo la inecuación

$$\underbrace{\sqrt{\frac{2x-8}{x-1}}}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{\frac{5-x}{x+3}}}_{\geq 0} \geq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R} \quad \dots(2)$$

De $(1) \cap (2)$: $x \in \langle -3; 1 \rangle \cup [4; 5] \rightarrow a = -3, b = 1, c = 4, d = 5$
 $\therefore P = (-3)(1) - (4)(5) = -3 - 20 = -23.$

Rpta.: C

8. Halle la suma de todas las soluciones enteras que verifican la inecuación:

$$\frac{\sqrt{x-1}(x^2+2x+17)^2 |x+10|}{(x^2-10x+16)^{2019} \sqrt[3]{-x} |x-5| |x-6|} \geq 0.$$

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 17

Solución:

i) Restricciones

$$\begin{aligned} x-1 \geq 0, x-5 \neq 0, x-6 \neq 0, x^2+2x+17 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \rightarrow \underbrace{x \geq 1, x \neq 5, x \neq 6}_{(-10 \text{ y } 1 \text{ soluciones})} \\ \rightarrow x \in [1; +\infty) \cup \{-10\} - \{5; 6\} \quad \dots(1) \end{aligned}$$

ii) Calculando el conjunto solución parcial de la inecuación equivalente

$$\frac{1}{(-x)(x-8)^{2019}(x-2)^{2019}} \geq 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{x(x-8)(x-2)} \leq 0$$

$$\rightarrow x \in \langle -\infty; 0 \rangle \cup \langle 2; 8 \rangle \dots (2)$$

iii) Luego de $(1) \cap (2)$, se tiene

$$\text{C.S.} = \langle 2; 8 \rangle \cup \{1\} - \{5; 6\}$$

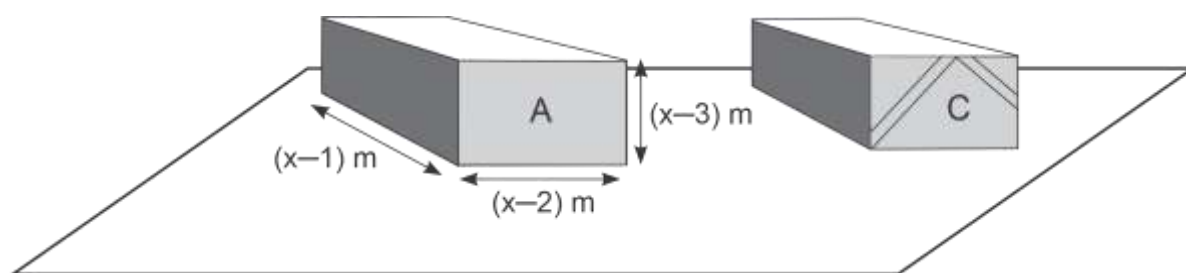
Soluciones enteras: 1; 3; 4 y 7

$\therefore$ La suma de todas las soluciones enteras es $(1) + (3) + (4) + (7) = 15$.

Rpta.: B

EJERCICIOS DE PROPUESTOS

1. Con el fin de exportar frutas, una empresa utiliza dos tipos de contenedores A y C en forma de paralelepípedo rectangular, como se muestra en la figura. Las dimensiones del contenedor C miden 1 metro menos, respectivamente, que las dimensiones de A. Si el volumen de C no excede al volumen de A, ¿cuál es el perímetro mínimo, entero, del contenedor C?



A) 10 m

B) 14 m

C) 11 m

D) 12 m

Solución:

De las figuras, se tiene

$$\text{Volumen}_A = (x-1)(x-2)(x-3) \quad \text{y} \quad \text{Volumen}_B = (x-2)(x-3)(x-4) \quad \text{y} \quad x > 4$$

$$\text{Condición: } \text{Volumen}_A \geq \text{Volumen}_C \wedge x > 4$$

$$\rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) \geq (x-2)(x-3)(x-4)$$

$$\rightarrow (x-2)(x-3)[(x-1)-(x-4)] \geq 0 \rightarrow (3)(x-2)(x-3) \geq 0$$

$$\rightarrow x \in \langle -\infty; 2 \rangle \cup [3; +\infty) \wedge x > 4$$

$$\rightarrow x \in \langle 4; +\infty) \rightarrow x_{\text{menor Entero}} = 5 \rightarrow \text{Perímetro}_{\text{menor Entero}} = 10\text{m}$$

Rpta.: A

2. En el x -ésimo mes del año 2019, Paco repartió equitativamente todas sus $x^4 - x^3 - 20x^2 + 50x$ canicas a $x^2 - 6x + 10$ niños de modo que no sobre ni falte canicas. Si cada niño recibió no más de seis canicas, ¿en qué mes de dicho año repartió todas sus canicas?

A) Febrero
D) Enero

B) Mayo
E) Marzo

Solución:

Total de manzanas: $x^4 - x^3 - 20x^2 + 50x$

Total de niños: $x^2 - 6x + 10$

Para niño recibe:

$$\frac{x^4 - x^3 - 20x^2 + 50x}{x^2 - 6x + 10} \rightarrow \frac{x^4 - x^3 - 20x^2 + 50x}{x^2 - 6x + 10} \leq 6$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - 6x + 10} \leq 6 \rightarrow x^2 - 6x + 10 \leq 6(x^2 - 6x + 10) \rightarrow x^2 + 5x - 6 \leq 0$$

$$\rightarrow x \in [-6, 1] \rightarrow x = 1$$

$\therefore$ Paco repartió todas sus canicas en enero.

Rpta.: D

3. Carlos con un billete de S/ 50 compró un polo cuyo costo está representado por $\overline{ab}$ soles. Si "a" es el menor elemento entero positivo del complemento de S y "b" es el número de elementos enteros de S de modo que S es el conjunto solución de la inecuación

$$2x^3(x+1) < (x+6)(2x+2)x,$$

¿cuánto recibió de vuelto Carlos por la compra de dicho polo?

A) 20

B) 24

C) 18

D) 16

Solución:

$$x^3(2x+2) - (x^2+6x)(2x+2) < 0 \rightarrow (2x+2)(x^3 - x^2 - 6x) < 0$$

$$\rightarrow 2(x+1)x(x-3)(x+2) < 0$$

$$\rightarrow S \cap Z = \{1; 2\} \rightarrow b = 2$$

$$\rightarrow S^c = \langle -\infty; -2 \rangle \cup [-1; 0] \cup [3; +\infty) \rightarrow a = 3$$

$$\rightarrow \overline{ab} = 32$$

$\therefore$ Carlos recibió de vuelto S/18.

Rpta.: C

4. La edad de Juan Carlos es la suma de los elementos enteros positivos pares del conjunto solución de la inecuación $\frac{\sqrt{9-x}(x^4-16)}{\sqrt[3]{x+7}(x^3-27)^5} \geq 0$; y la edad de Luis Alberto es la suma de los elementos enteros positivos impares del conjunto solución de $\frac{1}{x-2} + \frac{28}{x-17} < -1$. Halle la diferencia positiva entre ambas edades.

A) 41 años

B) 33 años

C) 42 años

D) 34 años

Solución:

$$i) \frac{\sqrt{9-x}(x^4-16)}{\sqrt[3]{x+7}(x^3-27)^5} \geq 0$$

$$\text{Restricción } 9-x \geq 0 \rightarrow x \leq 9$$

$$\frac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{(x+7)(x-3)} \geq 0, \quad x^2+4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$CS_{(1)} = \langle -\infty; 7 \rangle \cup [-2; 2] \cup \langle 3; 9 \rangle$$

Elementos enteros positivos: 1; 2; 4; 5; 6; 7; 8 y 9

Juan Carlos tiene : $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ años

$$ii) \frac{1}{x-2} + \frac{28}{x-17} < -1 \rightarrow \frac{(x+13)(x-3)}{(x-2)(x-17)} < 0$$

$$\rightarrow C.S_{(2)} = \langle -13; 2 \rangle \cup \langle 3; 17 \rangle$$

Elementos enteros positivos impares: 1;5;7;9;11; 13 y 15.

Luis Alberto tiene 61 años.

Diferencia positiva de sus edades 41 años.

Rpta.: A

5. Si el complemento del conjunto solución de la inecuación

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} \geq 0$$

es de la forma $\langle m; n \rangle \cup \{p\}$, ¿cuál es el valor de $K = \frac{mn + 3p}{m^2 - p}$?

- A) 6 B) 9 C) 4 D) 3

Solución:

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} \geq 0 \rightarrow \frac{(x-2)(2x^2+1)}{(x-1)^2(x-3)} \geq 0, x \neq 1, x \neq 3 \rightarrow \frac{x-2}{x-3} \geq 0$$

$$C.S = \langle -\infty; 1 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$$

$$(C.S.)^c = \langle 2; 3 \rangle \cup \{1\} \rightarrow m = 2, n = 3 \text{ y } p = 1$$

$$\therefore K = \frac{mn + 3p}{m^2 - p} = \frac{(2)(3) + 3(1)}{(2)^2 - (1)} = \frac{9}{3} = 3.$$

Rpta.: D

6. Con respecto a la inecuación

$$\frac{(x^2 - 6x + 9)^3 (x-2)^5 \sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{(x^2 - 11x + 28)^5 (x^2 + 1)} \leq 0,$$

se sabe que la suma de las soluciones enteras del conjunto solución representan los ingresos, en miles de soles, de una microempresa. Determine el ahorro mensual de la empresa si los egresos mensuales representan el 80% de los ingresos.

- A) S/ 3400 B) S/ 350 C) S/ 3700 D) S/ 3800

Solución:

i) Restricción

$$-x^2 + 7x - 6 \geq 0 \rightarrow x^2 - 7x + 6 \leq 0 \rightarrow x \in [1; 6] = S_1$$

ii) $x^2 + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$ $x = 1$ solución, $x = 6$ solución, $x = 3$ solución

$$\text{Luego, } \frac{x-2}{(x-4)(x-7)} \leq 0$$

$$\text{Luego, } x \in \langle -\infty; 2] \cup \langle 4; 7 \rangle \cup \{3\} = S_2$$

$$\text{Por tanto, } C.S. = S_1 \cap S_2 = [1; 2] \cup \langle 4; 6 \rangle \cup \{3\}$$

$$\sum \text{soluciones enteras} = 17$$

Por tanto los ingresos mensual son: 17 000 soles

Ahorro mensual: $20\%17000 = 3400$.**Rpta.: A**

7. ¿Cuántos elementos enteros tiene el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{(x-1)^{133}(4x-8)^{50}(x-5)^{17}}{\sqrt{x^2-4}(x^2+4x+3)(x^2-4x+5)} \leq 0 ?$$

A) 3

B) 2

C) 4

D) 5

Solución:

i) Restricciones

$$x^2 - 4 > 0 \wedge x^2 - 4x + 5 > 0 \wedge x = 2 \text{ (Por el exponente par)}$$

$$\rightarrow x \in \langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle \dots (1)$$

ii) Resolviendo la inecuación equivalente

$$\frac{(x-1)(x-5)}{(x+1)(x+3)} \leq 0 \rightarrow x \in \langle -3; -1 \rangle \cup [1; 5] \dots (2)$$

Luego, de (1) y (2) se tiene

$$C.S = \langle -3; -2 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$$

Elementos enteros: 3; 4 y 5

$\therefore$ El número de elementos enteros del C.S. es 3.

Rpta.: A

8. Halle la suma de las dos mayores soluciones enteras que verifican la inecuación

$$\frac{(x-3)^{2019} \sqrt[2020]{5-|x|} (x-6)^{2014}}{|x+2|(x-2)^{2017} (x^2+5)^{2018} (x+1)^{2015}} \leq 0.$$

A) 8

B) 11

C) 10

D) 7

Solución:

i) Restricciones

$$5 - |x| \geq 0 \wedge x - 6 = 0 \wedge |x + 2| \neq 0$$

$$\rightarrow |x| \leq 5 \wedge x = 6 \wedge x \neq -2$$

$$\rightarrow x \in [-5; 5] \cup \{6\} - \{-2\} \dots (1)$$

ii) Resolviendo la inecuación equivalente

$$\frac{x-3}{(x-2)(x+1)} \leq 0 \rightarrow x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle \dots (2)$$

Luego, de (1) $\cap$ (2) se tiene

$$C.S = [-5; -1] \cup \langle 2; 3 \rangle \cup \{5; 6\} - \{-2\}$$

Dos mayores soluciones enteras son: 5 y 6

$\therefore$ La suma es 11.

Rpta.: B

Álgebra

EJERCICIOS

1. Halle la suma de los elementos enteros positivos del conjunto solución de la inecuación fraccionaria $\frac{2}{x^2 - x - 6} \geq \frac{3}{x^2 - 4}$.

A) 10 B) 7 C) 5 D) 6 E) 9

Solución:

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{2}{(x-3)(x+2)} - \frac{3}{(x-2)(x+2)} &\geq 0 \Rightarrow \frac{2(x-2) - 3(x-3)}{(x-3)(x+2)} \geq 0 \\ \Rightarrow \frac{-x+5}{(x-3)(x-2)(x+2)} &\geq 0 \Rightarrow \frac{x-5}{(x-3)(x-2)(x+2)} \leq 0 \\ \text{CS} &= \langle -2, 2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \text{CS} \cap \mathbb{Z}^+ &= \{1, 4, 5\} \\ \therefore \sum x &= 1 + 4 + 5 = 10 \end{aligned}$$

Rpta.: A

2. En la tienda comercial “El Rey”, el precio de una camisa y de una casaca está dado por el valor de $(76 + ab)$ soles y $10(cd - r)$ soles respectivamente. Si $a, b \cup c, d \cup \{r\}$ con $a < d$ es el conjunto solución de la inecuación $(3x^4 - 25x^2 - 18)^3(x^3 - 8)^5(x - 9)^2(8 - x) \geq 0$ y Juan compra los dos artículos, ¿cuánto fue el pago total que realizó Juan?

A) 210 soles B) 190 soles C) 290 soles
D) 220 soles E) 250 soles

Solución:

$$\begin{aligned} \text{i) De } (3x^4 - 25x^2 - 18)^3(x^3 - 8)^5(x - 9)^2(8 - x) &\geq 0 \text{ (por } -1) \\ (x^2 - 9)(3x^2 + 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x - 9)^2(x - 8) &\leq 0 \\ \text{ii) } 3x^2 + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x^2 + 2x + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ (x - 9)^2 \text{ se elimina pero } x = 9 \text{ es solución} \\ \text{iii) } (x + 3)(x - 3)(x - 2)(x - 8) &\leq 0 \\ \text{CS} &= -3, 2 \cup 3, 8 \cup \{9\} \Rightarrow a = -3, b = 2, c = 3, d = 8, r = 9 \end{aligned}$$

Precio de una camisa: $(76 + (-3)2)$ soles = 70 soles

Precio de una casaca: $10(3(8) - 9)$ soles = 150 soles

Pago total: 220 soles

Rpta.: D

3. Paco es dueño de varias carpinterías en las que solo se fabrican sillas y mesas del mismo modelo, la producción diaria de cada carpintería es de 30 muebles, en donde cada una produce en un día tantas sillas como carpinterías que es dueño Paco. La ganancia por una mesa es de S/ 20 y por una silla tantos soles como la producción diaria en sillas de una carpintería. Si la ganancia total por una producción diaria con todas las carpinterías juntas no supera los S/ 12000, ¿Cuántas sillas como máximo produce una carpintería de Paco?

A) 16 B) 20 C) 19 D) 17 E) 21

Solución:

Paco es dueño de x carpinterías.

Producción diaria de 1 carpintería: 30 muebles

Número de sillas: x

Número de mesas: $30 - x$

Ganancia diaria de 1 carpintería (soles): $x \cdot x + 20(30 - x) = x^2 - 20x + 600$

Ganancia total de 1 día (soles): $x(x^2 - 20x + 600) = x^3 - 20x^2 + 600x$

Planteamiento :

$$x^3 - 20x^2 + 600x \leq 12000 \Rightarrow x^3 - 20x^2 + 600x - 12000 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 20)(x^2 + 600) \leq 0 \Rightarrow x \leq 20 \Rightarrow x_{\text{máx}} = 20$$

$\therefore$ Cada carpintería produce diariamente 20 sillas como máximo.

Rpta.: B

4. Pablo es propietario de un edificio, cuyo número de pisos y el número de departamentos que tiene cada piso está dado por el valor de (ab) y $(2c + d)$ respectivamente. Si $\langle a, b \rangle \cup [c, d] - \{-d\}$ es el conjunto solución de la

inecuación $\frac{(x^3 - 1)(x^2 - 9)}{(x^2 + 5x + 6)(x + 6)} \leq 0$, halle el total de departamentos que tiene el edificio de Pablo.

A) 54 B) 50 C) 60 D) 44 E) 48

Solución:

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1)(x+3)(x-3)}{(x+2)(x+3)(x+6)} \leq 0, \text{ pero } x^2+x+1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+3)(x-3)}{(x+2)(x+3)(x+6)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x+6)} \leq 0, x \neq -3$$

$$CS = \langle -6, -2 \rangle \cup [1, 3] - \{-3\}$$

Nº de pisos del edificio: $(-6)(-2) = 12$

Nº departamentos por piso: $2(1) + 3 = 5$

Total de departamentos: $12(5) = 60$

Rpta.: C

5. Determine la suma de cuadrados de las soluciones enteras de la inecuación:

$$\frac{(x+2)\sqrt{75-x^2}}{(x-6)(x+9)(x-3)^2} \leq 0.$$

- A) 55 B) 47 C) 45 D) 46 E) 51

Solución:

i) Se debe cumplir:

$$75 - x^2 \geq 0 \rightarrow -5\sqrt{3} \leq x \leq 5\sqrt{3} \rightarrow S_1 = [-5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}] - \{3\}$$

ii) $(x-3)^2$ se elimina, pero $x \neq 3 \rightarrow$

$$\frac{x+2}{x-6} \leq 0, x \neq 3 \rightarrow S_2 = [-2, 6) - \{3\}$$

$$CS = S_1 \cap S_2 \rightarrow CS = [-2, 6) - \{3\}$$

$$CS \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\}$$

La suma de cuadrados de las soluciones enteras es 51.

Rpta.: E

6. Carlos es un agricultor que tiene un terreno de forma cuadrada y de una hectárea en el departamento de Junín y se dedica al sembrío de kion chino. Carlos ha llegado a la conclusión que se optimiza la producción, si las plantas se siembran en filas a partir de los bordes de su terreno y a la distancia de $\left(\frac{b-c}{a}\right)$ metros entre planta y planta. Si $\langle a; b \rangle \cup \{c\}$ es el conjunto solución de la inecuación

$\frac{x^3 - 27x + 54}{\sqrt[6]{x+4}(x-2)^{15}} \leq 0$, determine la cantidad máxima de plantas de kion chino que puede sembrar Carlos en su terreno.

- A) 160000 B) 160801 C) 90000 D) 250000 E) 360000

Solución:

$$i) \frac{x^3 - 27x + 54}{\sqrt[6]{x+4}(x-2)^{15}} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2(x+6)}{\sqrt[6]{x+4}(x-2)} \leq 0$$

$$x+4 > 0, x=3 \Rightarrow S_1 = \langle -4, +\infty \rangle$$

$$ii) \frac{x+6}{x-2} \leq 0, x=3$$

$$S_2 = [-6, 2) \cup \{3\}$$

$$CS = S_1 \cap S_2 = \langle -4, 2 \rangle \cup \{3\} \Rightarrow a = -4, b = 2, c = 3$$

$$\text{Se siembra cada } \left(\frac{b-c}{a} \right) = \left(\frac{2-3}{-4} \right) = 0,25m = 25cm.$$

Luego el número de plantas que se sembró en una hectárea es $401 \times 401 = 160801$, porque se siembra desde los bordes.

Rpta.: B

7. Determine la suma de los cuatro mayores elementos enteros del conjunto solución

de la inecuación: $\frac{(x+1)\sqrt{-x}(x-1)^{20}}{|x-2|-6} \leq 0$

- A) -6 B) -11 C) -5 D) -12 E) -3

Solución:

$$i) \text{ Restricción: } -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$S_1 = \langle -\infty, 0], x=0 \text{ es solución}$$

$$ii) \text{ De } \frac{(x+1)\sqrt{-x}(x-1)^{20}}{|x-2|-6} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)}{|x-2|-6} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(|x-2|+6)}{(|x-2|-6)(|x-2|+6)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)(|x-2|+6)}{(x^2-4x-32)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)}{(x+4)(x-8)} \leq 0$$

$$S_2 = \langle -\infty, -4 \rangle \cup [-1, 8)$$

$$iii) CS = (S_1 \cap S_2) \Rightarrow CS = \langle -\infty, -4 \rangle \cup [-1, 0]$$

Suma de los cuatros mayores elementos enteros del $CS = -6 - 5 - 1 + 0 = -12$.

Rpta.: D

8. Sea $T(n)$ una expresión que representa el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide n metros. Determine el área de un triángulo equilátero cuyo lado es numéricamente igual a la suma de cifras del resultado que se obtiene al sumar los elementos enteros del conjunto solución de la siguiente inecuación,

$$\frac{\sqrt{8-|x-4|}(x^3-729)^5(x^2-6x+8)^{36}}{(x-7)^{2(n+1)}(x^3+27)^{15}} \leq 0.$$

A) $\frac{49\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2$

B) $16\sqrt{3} \text{ m}^2$

C) $\frac{121\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2$

D) $16\sqrt{3} \text{ m}^2$

E) $\frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2$

Solución:

i) Restricciones:

$$8-|x-4| \geq 0 \Rightarrow |x-4| \leq 8 \Rightarrow -4 \leq x \leq 12$$

$$S_1 = [-4, 12], \text{ soluciones: } x = -4 \text{ y } x = 12$$

ii) $\frac{(x-9)(x^2+9x+81)(x-4)^{36}(x-2)^{36}}{(x-7)^{2(n+1)}(x+3)(x^2-3x+9)} \leq 0, \quad x = -4, x = 12$

$x = 2 \wedge x = 4$ son soluciones y $x \neq 7$, además

$$x^2 + 9x + 81 > 0 \wedge x^2 - 3x + 9 > 0$$

iii) $\frac{x-9}{x+3} \leq 0 \Rightarrow S_2 = \langle -3, 9 \rangle - \{7\}$

$$CS = (\langle -3, 9 \rangle \cup \{4, 12\}) - \{7\}$$

$$\text{Suma de elementos enteros del } CS = 43 \Rightarrow n = 4 + 3 = 7$$

$$T(n) = \frac{n^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Si } n = 7 \Rightarrow T(7) = \frac{49\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2.$$

Rpta.: A

EJERCICIOS DE PROPUESTOS

1. Si $L = \langle a, b \rangle \cup \langle c, d \rangle$ con $a < c$, es el conjunto solución de la inecuación $\frac{2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} > \frac{1}{x^2 - 4}$, halle el valor de $\frac{a+c}{b+d}$.

A) 0 B) 2,5 C) 0,75 D) 2,0 E) 1,0

Solución:

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{2}{(x-1)(x+2)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+2)} > 0 &\Rightarrow \frac{2-(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-2)} > 0 \\ \Rightarrow \frac{-x+3}{(x-1)(x-2)(x+2)} > 0 &\Rightarrow \frac{x-3}{(x-1)(x-2)(x+2)} < 0 \\ \text{ii) } CS = \langle -2, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle = \langle a, b \rangle \cup \langle c, d \rangle \\ \Rightarrow a = -2, b = 1, c = 2, d = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a+c}{b+d} = \frac{-2+2}{1+3} = 0$$

Rpta.: A

2. Si $[\alpha, \beta)$ es el conjunto solución de la inecuación $\sqrt{256-x^4} + \sqrt{\frac{1}{2-x}} \geq 0$, halle el valor de $L = \beta - \alpha + 4$.

A) 8 B) 4 C) 6 D) 10 E) 2

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Restricciones: } 256 - x^4 \geq 0 \wedge 2 - x > 0 &\Rightarrow (x^2+16)(x^2-16) \leq 0 \wedge x < 2 \\ \Rightarrow (x+4)(x-4) \leq 0 \wedge x < 2 \\ CS = [-4, 2) &\Rightarrow \alpha = -4, \beta = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore L = 2 - (-4) + 4 = 10.$$

Rpta.: D

3. Allison tiene un ahorro de $(x^5 + 7x^2 + 7)$ soles con lo que compró un electrodoméstico al precio de $(15x^3 + 16x)$ soles con $x \in \mathbb{Z}$, y lo que le quedó de su ahorro le alcanzó exactamente para sus gastos de más de una semana, gastando diariamente $(x^2 + 1)$ soles. Si el gasto diario de Allison fue menor a 37 soles, ¿en cuántos días gastó lo que le quedó de su ahorro, después de comprar dicho electrodoméstico?

A) 45 B) 46 C) 52 D) 55 E) 56

Solución:

$$i) (x^5 + 7x^2 + 7) - (15x^3 + 16x) = x^5 - 16x^3 + x^3 + 7x^2 - 16x + 7$$

$$x^2(x^3 - 16x + 7) + (x^3 - 16x + 7)$$

$$\underbrace{(x^3 - 16x + 7)}_{\text{número de días}} \underbrace{(x^2 + 1)}_{\text{gasto diario}}$$

$$\Rightarrow x^3 - 16x + 7 > 7$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 16) > 0 \Rightarrow x \in \langle -4, 0 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$$

$$ii) (x^2 + 1) < 37 \rightarrow x^2 < 36$$

De i) y ii) : $x = 5$

$\therefore$ Número de días : $(x^3 - 16x + 7) = 52$ días

Rpta.: C

4. Don Julián tiene dos hijos, donde la edad del hijo menor es la suma de las soluciones enteras de la inecuación $\frac{(x-3)^{2018}(x+2)^{2019}}{2020\sqrt{x-1}(x-5)(x+6)^{2020}} \leq 0$.

Si el producto de las soluciones enteras es la edad del hijo mayor, ¿en cuánto se diferencian sus edades?

- A) 15 años B) 5 años C) 19 años D) 14 años E) 11 años

Solución:

i) El factor $(x-3)^{2018}$ se elimina, pero $x=3$ es solución.

ii) El factor $(x+2)^{2019}$ se reduce a $(x+2)$.

iii) El factor $(x+6)^{2020}$ se elimina, pero $x \neq -6$.

iv) El factor $2020\sqrt{x-1}$ se elimina, pero $x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \rightarrow S_1 = \langle 1, +\infty \rangle$.

v) $\frac{x+2}{x-5} \leq 0$, $x=3$, $x \neq -6 \rightarrow S_2 = [-2, 5]$

$$CS = S_1 \cap S_2 = \langle 1, 5 \rangle$$

Edad del hijo menor: $2+3+4 = 9$ años

Edad del hijo mayor: $2(3)(4) = 24$ años

Diferencia de edades: 15 años

Rpta.: A

5. En la UNMSM es un requisito estudiar un idioma. Carmen está estudiando el idioma de inglés y la nota mínima para aprobar el nivel básico está dada por la suma de los elementos enteros del conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{(x-1)^{121}(2x-4)^{50}(x-5)^{11}}{\sqrt{x^2-4} \cdot x^2+4x+3 \cdot x^2-4x+5} \leq 0.$$

Halle la nota de Carmen, sabiendo que obtuvo la nota mínima.

- A) 10 B) 11 C) 14 D) 13 E) 12

Solución:

i) $(2x-4)^{50} > 0, x \neq 2 \wedge x^2-4x+5 > 0$

De $\sqrt{x^2-4} \Rightarrow x^2-4 > 0 \Rightarrow S_1 = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$

ii) $\frac{(x-1)(x-5)}{(x+1)(x+3)} \leq 0 \Rightarrow S_2 = \langle -3, -1 \rangle \cup [1, 5]$

$CS = S_1 \cap S_2 \Rightarrow CS = \langle -3, -2 \rangle \cup \langle 2, 5$

La nota que obtuvo Carmen es 12.

Rpta.: E

6. Jaime postuló a la Universidad de San Marcos, logrando ingresar en el n intento de veces. Si n es el número de enteros que verifican la siguiente inecuación:

$\frac{x-2}{|x+2|-|x-3|} \leq 0$, ¿cuántas veces postuló Jaime a la Universidad de San Marcos?

- A) 4 B) 5 C) 1 D) 3 E) 2

Solución:

i) $\frac{x-2}{|x+2|-|x-3|} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(|x+2|+|x-3|)}{(|x+2|-|x-3|)(|x+2|+|x-3|)} \leq 0$

$\frac{x-2}{|x+2|^2-|x-3|^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-2}{(2x-1)5} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-2}{2x-1} \leq 0$

ii) $CS = \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right]$

En el CS, hay dos elementos enteros que verifican la inecuación: 1 y 2.

Jaime postuló 2 veces a San Marcos.

Rpta.: E

7. Si se posaran b palomas en cada poste sobrarían c postes, pero si se posara $(b-2)$ palomas en cada poste sobrarían $(a+1)$ palomas, donde $-a, b \cup c, a$ es el conjunto solución de la de la inecuación $|1-|x-8|| \geq \sqrt{25-x^2}$. Determine el número total de palomas.

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 17

Solución:

i) De $|1-|x-8|| \geq \sqrt{25-x^2}$

$$25-x^2 \geq 0 \Rightarrow S_1 = [-5, 5]$$

ii) De (i) $\Rightarrow |x-7| \geq \sqrt{25-x^2} \Rightarrow 7-x \geq \sqrt{25-x^2}$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x-4) \geq 0$$

$$S_2 = (-\infty, 3] \cup [4, +\infty)$$

$$CS = S_1 \cap S_2 = [-5, 3] \cup [4, 5] \Rightarrow a = 5, b = 3, c = 4$$

iii) Sea k : Número de postes que se tiene

a) Si se posan tres palomas en cada poste sobrarían 4 postes

Número de palomas: $3(k-4)$

b) Si se posara una paloma en cada poste sobrarían 6 palomas

Número de palomas: $k+6$

$$\text{De (a) y (b)} \Rightarrow 3(k-4) = k+6 \Rightarrow k = 9$$

Número de palomas: 15

Rpta.: C

8. La edad de Juan excede en 4 años a la edad de Junior, donde la edad de Junior es la suma de los cuadrados de los elementos enteros del conjunto solución de la

$$\text{inecuación: } \frac{(4+3x-x^2)^3 \sqrt[5]{x^2-100}}{\sqrt[8]{30+x-x^2} (x^3-27)^7} > 0.$$

¿Qué edad tendrá Juan dentro de 10 años?

A) 30 años B) 34 años C) 32 años D) 40 años E) 44 años

Solución:i) Edad de Junior: n Edad de Juan: $n + 4$

$$\text{ii) } \frac{(4 + 3x - x^2)^3 \sqrt[5]{x^2 - 100}}{\sqrt[8]{30 + x - x^2} (x^3 - 27)^7} > 0 \rightarrow \frac{(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 100)}{\sqrt[8]{30 + x - x^2} (x^3 - 27)} < 0$$

$$\text{Restricciones: } 30 + x - x^2 > 0 \rightarrow x^2 - x - 30 < 0 \rightarrow (x - 6)(x + 5) < 0$$

$$S_1 = \langle -5, 6 \rangle$$

$$\text{iii) } \frac{(x - 4)(x + 1)(x + 10)(x - 10)}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} < 0 \rightarrow \frac{(x - 4)(x + 1)(x + 10)(x - 10)}{x - 3} < 0$$

$$S_2 = \langle -\infty, -10 \rangle \cup \langle -1, 3 \rangle \cup \langle 4, 10 \rangle$$

$$CS = S_1 \cap S_2 = \langle -1, 3 \rangle \cup \langle 4, 6 \rangle$$

$$\text{Total elementos enteros} = \{0, 1, 2, 5\}$$

$$n = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 5^2 = 30$$

Edad de Junior = $n = 30$ años

Edad de Juan = 34 años y dentro de 10 años Juan tendrá 44 años.

Rpta.: E

Álgebra

EJERCICIOS

1. Marco tiene $[(ac)^{ab} + 4b]$ años, su edad es el doble de la que tenía Jorge, cuando Marco tenía la tercera parte de la edad que tiene Jorge. Sabiendo que la inecuación $\frac{(x^3-8)(x^2-7x+13)(x^2-9)^2}{(1-x)(4-x^2)} \leq 0$, tiene como C.S = $\langle -a, b \rangle \cup \{-c, c\}$, $c < 0$, ¿Cuántos años tiene Jorge?

- A) 30 B) 45 C) 40 D) 35 E) 32

Solución:

$$\frac{(x^3-8)(x^2-7x+13)(x^2-9)^2}{(1-x)(4-x^2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-7x+13)(x+3)^2(x-3)^2}{(x-1)(x-2)(x+2)} \leq 0$$

observamos :

- i) $x^2 + 2x + 4 > 0$, $x^2 - 7x + 13 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pues $\Delta < 0$
 ii) $x = 3$, $x = -3$ son soluciones
 iii) Luego $\frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x+2)} \leq 0$, $x \neq 2$
 iv) Luego los P.C = $\{-2, 1\} \rightarrow x \in \langle -2, 1 \rangle$
 v) Por tanto de i) – iv) se tiene $CS = \langle -2, 1 \rangle \cup \{-3, 3\} \rightarrow a = 2, b = 1, c = -3$
 vi) Luego Marco tiene $[(ac)^{ab} + 4b] = 40$ años

	pasado	Presente
Marco	y	40
Jorge	20	$3y$

- vii) $4y = 60 \rightarrow y = 15$
 viii) Por tanto Jorge tiene 45 años.

Rpta.: B

2. Si $0 < a < b < c < 1$ y $b > \sqrt{ac}$, halle el conjunto solución de la inecuación

$$(ax - b)^5(bx - c)^7(cx - a)^9 < 0.$$

- A) $\langle -\infty, \frac{a}{c} \rangle \cup \langle \frac{c}{b}; \frac{b}{a} \rangle$ B) $\langle -\infty, \frac{a}{b} \rangle \cup \langle \frac{c}{b}; \frac{b}{a} \rangle$ C) $\langle -\infty, \frac{b}{c} \rangle \cup \langle \frac{c}{b}; \frac{b}{a} \rangle$
 D) $\langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle \frac{c}{b}; \frac{b}{a} \rangle$ E) $\langle -\infty, \frac{a}{c} \rangle \cup \langle \frac{c}{b}; \frac{c}{a} \rangle$

Solución:

$$(ax - b)^5(bx - c)^7(cx - a)^9 < 0$$

Donde los puntos críticos son $x = \frac{b}{a}$ $x = \frac{c}{b}$ y $x = \frac{a}{c}$

Ahora del dato $b > \sqrt{ac}$ se tiene $b^2 > ac$ entre ab se tiene $\frac{b}{a} > \frac{c}{b}$

Además como $0 < a < b < c < 1$ se tiene que $\frac{c}{b} > 1$ y $\frac{a}{c} < 1$

Así se tiene $\frac{b}{a} > \frac{c}{b} > 1 > \frac{a}{c}$

Ubicando los puntos críticos en la recta el conjunto solución será $\langle -\infty, \frac{a}{c} \rangle \cup \langle \frac{c}{b}; \frac{b}{a} \rangle$.

Rpta.: A

3. Si m representa el número de hijos de la familia Romero y m pertenece al conjunto

solución de la inecuación $\frac{|x-5| - |10-x|}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-7}} < \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x-7}}{|x-5| + |x-10|}$. ¿Cuántos integrantes

tiene la familia Romero, si los padres viven con sus hijos?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Solución:

- i) $\left[\underbrace{x-2 \geq 0 \text{ y } x-7 > 0}_{x > 7} \text{ o } \underbrace{x-2 > 0 \text{ y } x-7 \geq 0}_{x \geq 7} \right] \leftrightarrow x \geq 7$
- ii) $\underbrace{(x-5)^2 - (x-10)^2}_{10x-75} < \underbrace{(x-2) - (x-7)}_5 \rightarrow x < 8$
- iii) Así $7 \leq x < 8$
- iv) Por tanto $CS = [7, 8) \rightarrow m = 7$
- v) Luego hay 9 integrantes en la familia Romero.

Rpta: E

4. Alicia conoce a Robert por facebook, ellos llevan buen tiempo de conocerse virtualmente, pero nunca se han encontrado en la vida real. Cierta día, ella le pregunta a Robert: ¿qué edad tiene?, a lo que él responde: mi edad es igual a diez veces la suma de los cuadrados de los elementos enteros del conjunto solución, aumentado en 3, de la siguiente inecuación :

$$\frac{\sqrt[4]{33+8x-x^2}(x^3-27)^{13}\sqrt[5]{4-x}}{(x^3+125)(x^4-16)^{10}\sqrt[10]{8-x}} > 0.$$

¿Cuál será la edad de Robert en 5 años?

- A) 33 B) 28 C) 43 D) 23 E) 53

Solución:

- i) $33+8x-x^2 > 0 \text{ y } 8-x > 0 \leftrightarrow (x-11)(x+3) < 0 \text{ y } x < 8 \rightarrow -3 < x < 8$
- ii) $\frac{(x-3)^{13}(x^2+3x+9)^{13}(4-x)}{(x+5)(x^2-5x+25)(x^2+4)(x+2)(x-2)} > 0$
- iii) $x^2+3x+9 > 0, x^2+4 > 0 \text{ y } x^2-5x+25 > 0$, pues $\Delta < 0$

- iv) $\frac{(x-3)(x-4)}{(x+5)(x+2)(x-2)} < 0$, los $PC = \{3, 4, -5, 2, -2\}$
- v) Luego de i), iii) e iv) se tiene $CS = \langle -2, 2 \rangle \cup \langle 3, 4 \rangle$
- vi) Así $(-1)^2 + (1)^2 + (0)^2 = 2$
- vii) Por tanto la edad de Robert es $10(2) + 3 = 23$
- viii) Luego en 5 años, tendrá 28.

Rpta: B

5. Halle la suma de los elementos enteros del complemento del conjunto solución de la

inecuación: $\frac{x^2 + 2x - 2|x+1| + 2}{|x+1|^2 - 4} > 0$.

- A) -1 B) -4 C) -5 D) -3 E) 1

Solución:

$$\frac{x^2 + 2x - 2|x+1| + 2}{|x+1|^2 - 4} > 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1 - 2|x+1| + 1}{(|x+1| - 2)(|x+1| + 2)} > 0$$

$$\frac{(|x+1| - 1)^2}{(|x+1| - 2)(|x+1| + 2)} > 0$$

Observamos que:

- i) $(|x+1| + 2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- ii) $|x+1| - 2 > 0 \rightarrow x > 1 \text{ o } x < -3$
- iii) $CS = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$
- iv) $|x+1|^2 - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 0, x \neq -2$
- v) Por tanto $(CS)' = [-3, 1]$
- vi) Así la suma de los elementos enteros del complemento del conjunto solución es -5.

Rpta.: C

6. Alejandra tiene un total de $(-x^4 + x^3 + 3x^2 + 7x + 6)$ unidades de cuentos infantiles, los cuales serán donados de forma equitativa y exacta a $(x^2 + x + m)$ centros de educación inicial. ¿Cuántos cuentos como máximo podrán recibir cada centro de educación inicial, sabiendo que los valores de x son enteros positivos?

A) 4 B) 6 C) 3 D) 2 E) 8

Solución:

Total de cuentos: $(-x^4 + x^3 + 3x^2 + 7x + 6) > 0$

Entonces $-(x^2 - 2x - 3) \underbrace{(x^2 + x + 2)}_{\text{Nro de centros de educ. inicial}} > 0$

Luego cada centro educativo recibe: $-(x^2 - 2x - 3)$ cuentos

$$-(x - 3)(x + 1) > 0 \rightarrow -1 < x < 3$$

Entonces $x = 0, 1, 2$

Si $x = 1$, se tendrá el nro. Máximo de cuadernos: $-(x^2 - 2x - 3) = 4$ para cada centro.

Rpta.: A

7. En el conjunto solución de la inecuación $\frac{{}^{2n}\sqrt{x^2 - x - 12} (x+5)^{2n+1}}{|4x+5-x^2|(x-6)} \leq 0$, se tiene 4 elementos enteros a, b, c , y d , tal que $a < b < c < d$. Calcule el área del triángulo cuyas coordenadas son $(d - 1, |b|)$, (a, d) y $(-c, -2a)$.

A) $10u^2$ B) $8u^2$ C) $16u^2$ D) $24u^2$ E) $26u^2$

Solución:

i) $x^2 - x - 12 \geq 0 \rightarrow x \leq -3 \text{ o } x \geq 4$

ii) $4x + 5 - x^2 \neq 0 \rightarrow (x - 5)(x + 1) \neq 0 \rightarrow x \neq -1, x \neq 5$

iii) $\frac{(x+5)}{(x-6)} \leq 0 \rightarrow PC = \{-5, 6\} \rightarrow -5 \leq x < 6$

iv) luego de i) - iii) : $-5 \leq x \leq -3 \text{ o } 4 \leq x < 6, x \neq 5$

v) así el CS = $[-5, -3] \cup [4, 6) - \{5\}$

vi) por lo tanto $a = -5, b = -4, c = -3$ y $d = 4$

vii) Luego las Coordenadas $(3, 4), (-5, 4)$ y $(3, 10)$, corresponden a un triángulo rectángulo cuya área es $24u^2$.

Rpta.: D

8. Marlene viajara este año a Orlando, para conocer a Danilo y Gloriana Montero, pues ella los admira mucho. Pero, para lograr dicho sueño, ella necesita trabajar más horas a la semana y haciendo sus cálculos, el número de horas semanales que debe trabajar está dado por el número de elementos enteros del conjunto solución de:

$$\frac{\sqrt{x+10} (x^2 + x + 1)^{31}}{|x^2 + 3x + 2| \sqrt{400 - x^2}} \geq 0$$

Si ella estuvo trabajando 20 horas semanales ¿cuántas horas más debe trabajar para cumplir su sueño?

- A) 14 B) 10 C) 12 D) 11 E) 8

Solución:

$$\frac{\sqrt{x+10} (x^2 + x + 1)^{31}}{|x^2 + 3x + 2| \sqrt{400 - x^2}} \geq 0$$

- i) $x^2 + x + 1 > 0$, pues $\Delta < 0$
 ii) $x + 10 \geq 0$, $400 - x^2 > 0 \rightarrow -10 \leq x < 20$
 iii) $|x^2 + 3x + 2| = |x + 1||x + 2| \neq 0 \rightarrow x \neq -1, x \neq -2$
 C.S.: $[-10, 20) - \{-1, -2\}$

Número de elementos enteros es: 28

Marlene debe trabajar 28 horas semanales.

Le falta añadir a las 20 horas solo 8 horas más.

Rpta.: E

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se desea fabricar cajas abiertas cuyo volumen no debe superar los 18000 cm^3 . Para ello se utilizara piezas de cartón de forma rectangular de 50 cm de ancho y 80 cm de largo; cortando en las cuatro esquinas cuadrados de una misma área y doblando los lados de manera perpendicular a la base. Determine la suma de cifras de m^{n+1} , donde m y n son el mayor y menor valor entero que toma la longitud del cuadrado que se va a cortar.
- A) 18 B) 9 C) 19 D) 8 E) 13

Solución:

x : Longitud del lado del cuadrado que se va a cortar (cm)

$$\begin{aligned} V(x) &= x(50 - 2x)(80 - 2x) \leq 18000 \\ &\rightarrow 4(x^3 - 65x^2 + 1000x) \leq 18000 \\ &\rightarrow x^3 - 65x^2 + 1000x - 4500 \leq 0 \end{aligned}$$

Factorizando, $(x - 10)^2(x - 45) \leq 0$

$x = 10$ (Solución) y $x \leq 45 \dots (1)$

Por otro lado, $50 - 2x > 0$ y $80 - 2x > 0 \rightarrow 0 < x < 25 \dots (2)$

De (1) y (2): $0 < x < 25$

Luego: $m = 24$ y $n = 1 \rightarrow m^{n+1} = 24^2 = 576 \rightarrow$ suma de cifras = 18

Rpta.: A

2. El conjunto solución de la inecuación $\frac{(x-1)^3 \sqrt{x+1} (x^2-x-6)^{2019}}{(x-5)|x-4|} \leq 0$

está dado por $[U, N] \cup [M, S) \cup \langle S, M+2 \rangle$. Calcule la suma de cifras de $U + N + M + S + M + \overline{SMM}$.

- A) 7 B) 10 C) 9 D) 13 E) 11

Solución:

- i) $x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$ y $x = -1$ es una solución
- ii) $x \neq 4$
- iii) $\frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{x-5} \leq 0 \wedge x \neq 5$
- iv) $P.C = \{1, 3, -2, 5\}$
- v) $CS = [-1, 1] \cup [3, 5) - \{4\} = [-1, 1] \cup [3, 4) \cup \langle 4, 5 \rangle$
- vi) $U = -1, N = 1, M = 3, S = 4$
- vii) $U + N + M + S + M + \overline{SMM} = 10 + 433 = 443$
- viii) Suma de cifras = $4 + 4 + 3 = 11$

Rpta.: E

3. La herencia de un pequeño comerciante (en miles de dólares) está representado por la suma de las 5 mayores soluciones enteras del conjunto solución de la inecuación $\frac{\sqrt[6]{5-x} (x+7)}{(x^3+3x^2-x-3)^3(x-1)^{32}} \geq 0$, y el número de herederos está dado por el doble de la mayor solución entera negativa, aumentado en 9. ¿Cuántos dólares le corresponde a cada uno de los herederos, si la repartición es equitativa?

A) 2400 B) 1800 C) 2700 D) 1500 E) 3100

Solución:

- i) $5 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 5$
 ii) $\frac{(x+7)}{(x+1)^3(x-1)^3(x+3)^3(x-1)^{32}} \geq 0 \leftrightarrow \frac{(x+7)}{(x-1)(x+3)(x+1)} \geq 0$
 iii) $PC = \{-7, -1, 1, 3\} \rightarrow x \leq -7 \vee -3 < x < -1 \vee 1 < x$
 iv) Luego de i) e iii) : $CS = \langle -\infty, -7] \cup \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 1, 5]$
 v) suma de las 5 mayores soluciones enteras es $5 + 4 + 3 + 2 + -2 = 12$
 vi) el doble de la mayor solución entera negativa, aumentado en 9 es
 $2(-2) + 9 = 5$
 vii) por tanto $\frac{12000}{5} = 2400$ dolares es lo que corresponde a cada heredero.

Rpta.: A

4. En el conjunto solución de la inecuación $\frac{|x-3|-2}{|x|-5} \geq 0$, se tiene que el mayor elemento entero negativo es m y el menor elemento entero positivo es n . Calcule el mínimo valor de $(nx^2 + mx), \forall x \in \mathbb{R}$.

A) 8 B) -4 C) -9 D) -8 E) 9

Solución:

- $$\frac{|x-3|-2}{|x|-5} \geq 0$$
- i) $x < 0$: $\frac{3-x-2}{-x-5} \geq 0 \rightarrow \frac{x-1}{x+5} \geq 0 \rightarrow PC = \{1, -5\} \rightarrow x < -5 \text{ o } x \geq 1$
 $\rightarrow x < -5$
 ii) $0 \leq x < 3$: $\frac{3-x-2}{x-5} \geq 0 \rightarrow \frac{x-1}{x-5} \leq 0 \rightarrow PC = \{1, 5\} \rightarrow 1 \leq x < 5$
 $\rightarrow 1 \leq x < 3$
 iii) $3 \leq x$: $\frac{x-3-2}{x-5} \geq 0 \rightarrow \frac{x-5}{x-5} \geq 0 \rightarrow 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{5\}$
 $\rightarrow 3 \leq x$

- iv) Luego el $CS = \langle -\infty, -5 \rangle \cup [1, +\infty) - \{5\}$
 v) Así $m = -6, n = 1$
 vi) Por tanto $(nx^2 + mx) = x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9 \geq -9$, su mínimo valor es -9 .

Rpta.: C

5. Si $G = \left\{ (x^2 + 3) \in \mathbb{Z} : \frac{x+3}{x-3} \geq \frac{x^2+3}{x^2} \right\}$, halle el menor elemento de G .

- A) 12 B) 13 C) 15 D) 11 E) 19

Solución:

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{x^2+3}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 3x^2 - (x^3 - 3x - 3x^2 - 9)}{x^2(x-3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overbrace{6x^2 - 3x + 9}^{\Delta < 0}}{\underbrace{x^2}_{> 0}(x-3)} \geq 0, x \neq 0 \Leftrightarrow x > 3$$

Luego $x > 3 \rightarrow x^2 > 9 \rightarrow x^2 + 3 > 9 + 3 = 12$

Así $G = \{13, 14, 15, \dots\}$

Rpta.: B

6. Si $M = \left\{ x \in \mathbb{Z} : \frac{(x^4 - x^3 - 8x^2 + 9x - 9)\sqrt{6-|x|}}{\sqrt[4]{x^2 - 9x + 20}(x^3 - 1)^2} > 0 \right\}$ halle el número de elementos del conjunto M .

- A) 13 B) 4 C) 8 D) 2 E) 5

Solución:

$$\frac{(x^4 - x^3 - 8x^2 + 9x - 9)\sqrt{6-|x|}}{\sqrt[4]{x^2 - 9x + 20}(x^3 - 1)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)(x^2 - x + 1)\sqrt{6-|x|}}{\sqrt[4]{(x-5)(x-4)}(x-1)^2(x^2 + x + 1)^2} > 0 \dots (*)$$

Observa que:

- i) $6 - |x| > 0$ y $(x-5)(x-4) > 0 \rightarrow -6 < x < 4 \vee 5 < x < 6$
 ii) $x^2 - x + 1 > 0$ y $x^2 + x + 1 > 0$, pues $\Delta < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 iii) $(x-1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$
 iv) Luego (*) se reduce a : $(x-3)(x+3) > 0$, donde $x > 3 \vee -3 > x$
 v) Por tanto de i)-iv) : $-3 > x > -6 \vee 5 < x < 6$
 vi) $M = \{x \in \mathbb{Z} : -3 > x > -6 \vee 5 < x < 6\}$
 vii) $M = \{-5, -4\}$

Rpta.: D

7. Whendy se está animando a comprar una lavadora cuyo precio es 1200 soles, pero, siempre y cuando el vendedor le haga un descuento del $m\%$, donde m representa el número de soluciones enteras del conjunto solución de la inecuación

$$\frac{(-x^2 - 5x + 14)^{3011}}{2x^4 + 14x^3 + 31x^2 + 24x + 9} > 0$$
, ¿Cuál fue el precio final que pagó Whendy, si el vendedor le hizo dicho descuento?

- A) S/1100 B) S/1116 C) S/1016 D) S/1166 E) S/980

Solución:

$$\frac{(-x^2 - 5x + 14)^{3011}}{2x^4 + 14x^3 + 31x^2 + 24x + 9} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x - 14}{\underbrace{(x+3)^2}_{>0} \underbrace{(2x^2 + 2x + 1)}_{\Delta < 0}} < 0$$

$$(x+7)(x-2) < 0, \quad x \neq -3$$

$$PC = \{2, -7\} \rightarrow -7 < x < 2, \quad x \neq -3$$

Por tanto el conjunto solución tiene 7 elementos, así $m = 7$,

$1200(7\%) = 84$ soles es el descuento, luego Wendy pagó $1200 - 84 = 1116$ soles.

Rpta.: B

8. Natalia le dijo a Juaneco que el número de días que le faltan para dar a Luz a su bebe, está dada por el menor elemento entero del conjunto solución, aumentado en 2, de la inecuación $\frac{t^6 - 1}{t^2 - 1} \geq 91$, $t > 1$. ¿Qué día nacerá el bebe, si dicha conversación la tuvieron un jueves?

- A) Miércoles B) Lunes C) Martes D) Sábado E) Viernes

Solución:

Observa que $t > 1$

$$\text{Por condición del problema } D(t) = \frac{t^6 - 1}{t^2 - 1} \geq 91 \rightarrow \frac{(t^2 - 1)(t^4 + t^2 + 1)}{t^2 - 1} \geq 91$$

$$t^4 + t^2 + 1 \geq 91 \rightarrow t^4 + t^2 - 90 \geq 0 \rightarrow (t^2 + 10)(t^2 - 9) \geq 0$$

$$(t+3)(t-3) \geq 0 \rightarrow t \leq -3 \text{ o } t \geq 3$$

Luego $t = 3$, por tanto el bebe nacerá en 5 días, un Martes.

Rpta.: C

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

15
semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

Sistema de inecuaciones lineales e Introducción a la programación lineal.

1. Sistema de inecuaciones lineales (SIL)

Un SIL está formado por dos o más inecuaciones lineales.

Estudiaremos los siguientes tipos de sistema:

- 1.1 SIL con una variable
- 1.2 SIL con dos o más variables

1.1 Sistema de inecuaciones lineales con una variable

Generalmente, se resuelve cada inecuación en forma independiente, luego con las soluciones parciales se obtiene la solución común a todas, que sería la solución del sistema.

Ejemplo 1

¿Cuántos números enteros verifican el sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} 3x - 4(x - 2) > 2 \\ 3x + 4 > 2(x + 4) \end{cases} ?$$

Solución:

Sea N° de caramelos = x

$$\begin{cases} 3x - 4(x - 2) > 2 & \rightarrow 6 > x & \dots(1) \\ 3x + 4 > 2(x + 4) & \rightarrow x > 4 & \dots(2) \end{cases}$$

Luego, de (1) y (2) $4 < x < 6$ como $x \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow x = 5 \rightarrow \text{CS} = \{5\}$

5 es el único número entero que verifica el sistema

Inecuaciones lineales con dos variables*Definición**

Una inecuación lineal en las variables “x” y “y” puede escribirse en una de las siguientes formas:

$$ax + by + c < 0; \quad ax + by + c \leq 0; \quad ax + by + c > 0; \quad ax + by + c \geq 0$$

donde $\{a, b \text{ y } c\} \in \mathbb{R}$ con $ab \neq 0$.

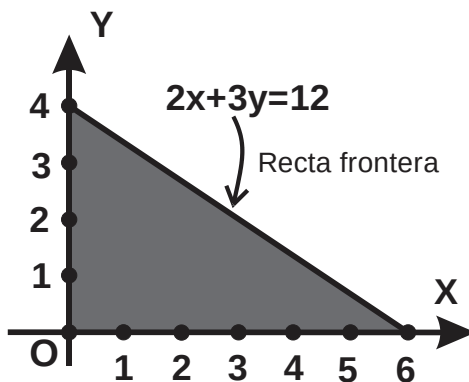
El conjunto solución (gráfica) de una inecuación lineal en “x” e “y” consiste en todos los puntos (x, y) ubicados en el plano, cuyas coordenadas satisfacen dicha inecuación.

Ejemplo 2:

Con respecto a la inecuación $2x + 3y \leq 12$, el punto (3;1) es una solución pues

$$2(3) + 3(1) \leq 12 \rightarrow 9 \leq 12 \quad (\text{lo cual es verdadero})$$

El conjunto solución gráficamente es el semiplano sombreado en la figura mostrada. Este conjunto solución se puede dividir en dos subconjuntos. Un subconjunto consiste en todos los pares (x, y) que satisfacen la parte de igualdad $2x + 3y = 12$. El otro subconjunto consta de todos los pares (x, y) que satisfacen la parte de la desigualdad $2x + 3y < 12$.



El procedimiento para determinar el semiplano apropiado es el siguiente:

- 1. Grafique la recta frontera que presenta la ecuación.**
- 2. Determine el lado de la recta que satisface la desigualdad estricta.** Para determinar esto, se puede seleccionar un punto arbitrario en cualquier lado de la recta y sustituir sus coordenadas en la desigualdad. Si las coordenadas satisfacen la desigualdad, ese lado de la recta está incluido en el semiplano permisible. Si las coordenadas no satisfacen la desigualdad, el semiplano permisible cae del otro lado de la recta.

1.2 SIL con dos o más variables

Generalmente, se despeja una misma variable de cada inecuación y sumando o restando se trata de eliminarla, este proceso se repite hasta lograr un sistema con una variable, y luego se procede como en 1.1

Ejemplo 3:

Halle el número de soluciones en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ del sistema:
$$\begin{cases} x + 2y > -3 \\ x - 3y < 2 \\ y < 2 \end{cases}$$

Solución:

Consideremos:

$$\begin{cases} x + 2y > -3 & \dots (1) \\ x - 3y < 2 & \dots (2) \\ y < 2 & \dots (3) \end{cases}$$

De (1) y (2) se tiene $-3 - 2y < x < 2 + 3y \dots (4)$

Tomando los extremos: $-3 - 2y < 2 + 3y \rightarrow -\frac{6}{5} < y$

De (3): $-\frac{6}{5} < y < 2$

Como $y \in \mathbb{Z}$, $y = -1$; $y = 0$; $y = 1$

En (4):

$y = -1$; $-3 - 2(-1) < x < 2 + 3(-1) \rightarrow$ no hay valores enteros para x (0 soluciones)

$y = 0$; $-3 - 2(0) < x < 2 + 3(0) \rightarrow x = -2$; ...; $x = 1$ (4 soluciones)

$y = 1$; $-3 - 2(1) < x < 2 + 3(1) \rightarrow x = -4$; ...; $x = 4$ (9 soluciones)

El sistema tiene 13 soluciones

Ejemplo 4:

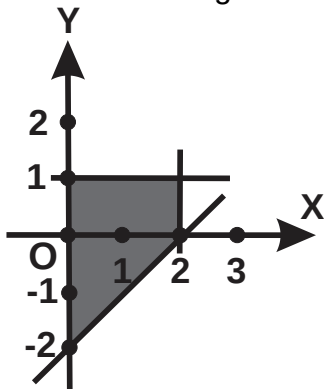
Grafique la región determinada por las siguientes inecuaciones

$$\begin{cases} x - y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

Solución:

Geométricamente, cada inecuación representa un semiplano, incluida la recta frontera.

El conjunto solución del sistema es el conjunto de pares ordenados de números reales que satisfacen a la vez las 4 inecuaciones. Tales pares ordenados ubicados en el plano generan la región sombreada siguiente.

**2. Introducción a la programación lineal**

En numerosos problemas de la vida cotidiana se nos pide optimizar (maximizar o minimizar) una función (llamada función objetivo) sujeta a un sistema de ecuaciones o inecuaciones. Este sistema de ecuaciones o inecuaciones a la que está sujeta la función objetivo refleja las restricciones, impuestas en la(s) solución(es) del problema. Este tipo de problemas se llaman problemas de programación matemática. En particular, los problemas en los que tanto la función objetivo como las restricciones son expresadas en forma de ecuaciones o inecuaciones lineales se llaman problemas de programación lineal.

GUÍA PARA PROGRAMACIÓN LINEAL

- 1. Identificar variables:** Determine cuáles cantidades variables del problema deben recibir el nombre de "x" y "y".
- 2. Encontrar la función objetivo:** Escriba una expresión para la función que deseamos maximizar o minimizar.
- 3. Graficar la región factible:** La región factible está formada por el conjunto de puntos del plano que verifican el sistema de inecuaciones (restricciones del problema). Dichos puntos forman un recinto convexo acotado (poligonal) o no acotado.
- 4. Encontrar el máximo o mínimo:** Evalúe la función objetivo en los vértices e la región factible para determinar su valor máximo o mínimo.

Nota: Cuando una región factible puede estar contenida dentro de un círculo, como la región **R** del ejemplo 2, se denomina **región factible acotada**. De otra manera es **no acotada**. Cuando una región factible contiene al menos un punto, se dice **no vacía**; en caso contrario es **vacía**.

Teorema. Una función lineal definida sobre una región factible acotada no vacía tiene un valor máximo (mínimo) que puede hallarse en un vértice.

Ejemplo 5:

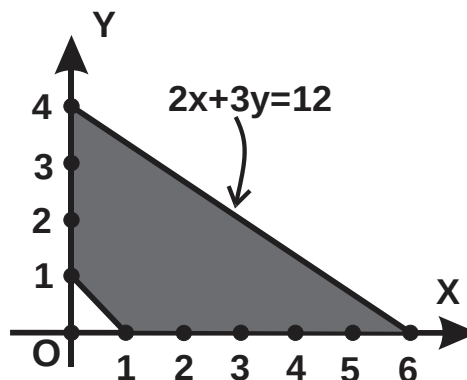
Calcule el máximo valor de la función $f(x,y) = 3x + 4y$ sujeto a restricciones

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ 1 \leq x + y \\ 0 \leq x, 0 \leq y \end{cases}$$

Solución:

Graficando tenemos una región cerrada cuyos vértices son: $(0,1)$; $(1,0)$; $(6,0)$; $(0,4)$ tabulando:

(x,y)	$f(x,y) = 3x + 4y$
$(0,1)$	$3(0) + 4(1) = 4$
$(1,0)$	$3(1) + 4(0) = 3$
$(6,0)$	$3(6) + 4(0) = \mathbf{18}$
$(0,4)$	$3(0) + 4(4) = 16$



El valor máximo de $f(x,y)$ es 18.

Álgebra

EJERCICIOS

1. Un docente tiene programado para dictar cierta cantidad de horas por semana. Se sabe que si tuviera programado el doble de horas, menos 5 horas, no excedería la máxima cantidad de horas semanales que son 19 horas. Sin embargo, si dictaría la tercera parte de la cantidad de horas que tiene programadas, más tres horas adicionales, tendría más horas que la mínima cantidad de horas semanales que son 6. ¿Cuántas horas por semana le programaron al docente?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12

Solución:

- 1) Sea x la cantidad de horas por semana que tiene programadas el docente. De los datos se tiene:

$$\begin{cases} 2x - 5 \leq 19 \\ \frac{x}{3} + 3 > 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 12 \\ x > 9 \end{cases}$$

- 2) Como el número de horas de programación debe ser entero y múltiplo de 3, $x = 12$. El docente tiene programadas 12 horas semanales

Rpta.: D

2. Juan tiene cierto número de pelotas idénticas y desea guardarlas en dos cajas de distinto tamaño. Si guardaría las tres cuartas partes del número de pelotas en la primera caja hasta cubrir la capacidad de esta y cerrarla, le quedarían más de dos pelotas por guardar. Sin embargo, si guardaría los cinco sextos del número de pelotas en la segunda caja hasta cubrir su capacidad y cerrarla, le faltaría menos de tres pelotas por guardar. ¿Cuántas pelotas debe guardar Juan en total?

A) 12 B) 18 C) 24 D) 30

Solución:

- 1) Sea x el número de pelotas que debe guardar Juan:

$$\begin{cases} x - \frac{3x}{4} > 2 \rightarrow \frac{x}{4} > 2, x = 8 \dots(1) \\ x - \frac{5x}{6} < 3 \rightarrow \frac{x}{6} < 3, x = 18 \dots(2) \end{cases}$$

- 2) Luego, de (1) y (2) $8 < x < 18$ y $x = 12$, como el número de pelotas debe ser entero, $\rightarrow x = 12$
- 3) $\therefore$ Juan tiene que guardar 12 pelotas

Rpta.: A

3. Para $x \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$, $y \in \mathbb{Z}$ se tiene el sistema $\begin{cases} 3x - 4y \leq 4 \\ 2x + y < 10 \end{cases}$. Bajo las condiciones de “x” e “y” resulta que el gasto diario en pasajes (en soles) y la cantidad de dinero, en soles, que dispone Raúl para dicho gasto están representados por el número de soluciones y la mayor suma de cuadrados de las componentes de cada solución del sistema, respectivamente. Si Raúl quiere proyectar su gasto de pasajes para una semana en la que se moviliza de lunes a viernes, ¿cuánto dinero le falta?

- A) 6 soles B) 12 soles C) 11 soles D) 14 soles

Solución:

- 1) Del sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y \leq 4 \\ 2x + y < 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3x-4}{4} \leq y \dots (1) \\ y < \frac{40-2x}{1} \dots (2) \end{cases}$$

De (1) y (2) se tiene $\frac{3x-4}{4} \leq y < 10 - 2x \dots (3)$

Tomando los extremos: $\frac{3x-4}{4} < 10 - 2x \rightarrow 3x - 4 < 40 - 8x$

$11x < 44 \rightarrow x < 4$

- 2) Como $x \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ en (3)

$x = 2 \rightarrow \frac{3(2)-4}{4} \leq y < 10 - 2(2) \rightarrow \frac{1}{2} \leq y < 6 \wedge y \in \mathbb{Z} \rightarrow y = 1, 2, 3, 4, 5$

$x = 3 \rightarrow \frac{3(3)-4}{4} \leq y < 10 - 2(3) \rightarrow \frac{5}{4} \leq y < 4 \wedge y \in \mathbb{Z} \rightarrow y = 2, 3$

Hay siete soluciones: $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,2), (3,3)$

- 3) La cantidad de dinero que dispone Raúl para su gasto en pasajes es la mayor suma de cuadrados de las componentes de cada solución es decir $2^2 + 5^2 = 29$ soles.
Gasto diario en pasajes es el número de soluciones: 7 soles
- 4) En una semana su gasto diario de pasajes es de 35 soles,
 $\therefore$ le falta $35 - 29 = 6$ soles

Rpta.: A

4. El número de canicas que tiene José no supera al número de canicas que tiene Mario, aumentado en dos. Se conoce también que el triple del número de canicas que tiene José sumado con el doble del número de canicas que tiene Mario no es menor a 17 canicas. Si Mario no tiene más de tres canicas, ¿cuál es el máximo número de canicas que puede tener José?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

Solución:

- 1) Consideremos:

x el número de canicas que tiene José; y el número de canicas que tiene Mario

$$\begin{cases} x \leq y + 2 \cdots (1) \\ 3x + 2y \geq 17 \cdots (2) \\ y \leq 3 \cdots (3) \end{cases}$$

- 2) De (1) y (2) se tiene $\frac{17-2y}{3} \leq x \leq y+2 \cdots (4)$

Tomando los extremos $\frac{17-2y}{3} \leq y+2 \rightarrow \frac{11}{5} \leq y$, y es entero

$y = 3, 4, 5 \cdots$ pero según (3) $y \leq 3$ luego $y = 3$

- 3) Sustituyendo en (4)

$$y = 3 \rightarrow \frac{17-2(3)}{3} \leq x \leq 3+2 \rightarrow \frac{11}{3} \leq x \leq 5 \rightarrow x = 4 \text{ o } x = 5$$

- 4) José puede tener como máximo 5 canicas

Rpta.: C

5. En un campeonato de fútbol en el que participan Carlos, Ángel y Paco, se sabe que, Carlos anotó menos de 6 goles y entre los tres anotaron más de 34 goles. Si Carlos hubiese anotado 26 goles más, habría superado la cantidad de goles anotados por Ángel y Paco juntos. ¿Cuánto suman los goles anotados por Ángel y Paco?

A) 28 B) 29 C) 30 D) 32

Solución:

- 1) Consideremos:

x el número de goles anotados por Carlos

y el número de goles anotados por Ángel

z el número de goles anotados por Paco

de los datos se tiene:

$$\begin{cases} x < 6 \cdots (1) \\ x + y + z > 34 \cdots (2) \\ x + 26 > y + z \cdots (3) \end{cases}$$

2) De (2) y (3) se tiene $34 - x < y + z < x + 26 \dots (4)$

Tomando los extremos $34 - x < x + 26 \rightarrow x > 4$

Además de (1) se tiene $x < 6$, luego $x = 5$

3) Reemplazando en (4)

$x = 5 \rightarrow 29 < y + z < 31 \rightarrow y + z = 30$

4) Los goles anotados por Ángel y Paco suman 30

Rpta.: C

6. Mirko va sembrar en su jardín rosas. Si consideramos un sistema de coordenadas XY, el suelo del terreno del jardín en donde sembrará rosas queda determinado por el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 8 \leq 4x - 3y \\ 20 \geq 4x - 3y \\ 2 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases} \text{ . Donde una unidad de cada eje coordenado del plano cartesiano}$$

representa un metro. Determine el área en metros cuadrados donde Mirko sembró rosas.

A) 10 m^2

B) 12 m^2

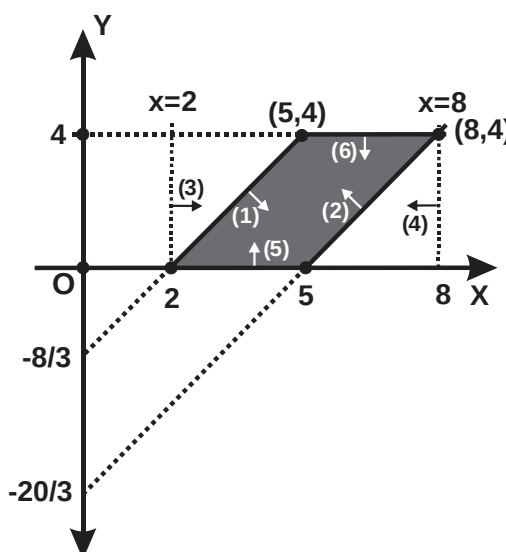
C) 14 m^2

D) 16 m^2

Solución:

1) Consideremos $\begin{cases} 8 \leq 4x - 3y \dots (1) \\ 20 \geq 4x - 3y \dots (2), x \geq 2 \dots (3) \\ x \leq 8 \dots (4), y \geq 0 \dots (5) \\ y \leq 4 \dots (6) \end{cases}$

Graficando se tiene:



2) Área: $\text{base} \times \text{altura} = (5 - 2) \times 4 = 12$

3) El área donde Mirko sembró rosas fue de 12 m^2

Rpta.: B

7. Una vendedora ofrece a sus clientes dos tipos de productos: M y N. Se sabe que su ganancia por la venta de cada producto del tipo M es de S/5 y por cada producto del tipo N es S/10. En una semana dispone de 90 productos en total, y sabe que el número de productos N no excede al doble del número de productos M. ¿Cuántos productos del tipo M debe vender para que su ganancia sea máxima?

A) 30 B) 40 C) 50 D) 60

Solución:

- 1) Consideremos:

x el número de productos tipo M

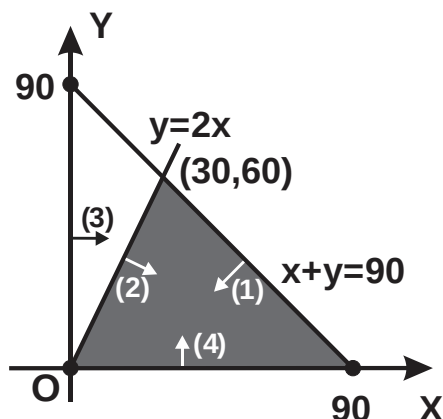
y el número de productos tipo N

de los datos se tiene

$$\begin{cases} x + y \leq 90 \\ y \leq 2x \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y \leq 90 \dots (1) \\ y \leq 2x \dots (2) \\ x \geq 0 \dots (3), y \geq 0 \dots (4) \end{cases}$$

La función de beneficio $F(x,y) = 5x + 10y$ que debemos maximizar

- 2) Graficando



- 3) Evaluando la función objetivo en los vértices de la región determinada

$$F(30,60) = 5(30) + 10(60) = 750 \text{ Máximo}$$

$$F(0,0) = 5(0) + 10(0) = 0$$

$$F(90,0) = 5(90) + 10(0) = 450$$

- 4) Para obtener la ganancia máxima, la vendedora debe vender 30 productos M y 60 productos N.

Rpta.: A

8. Una familia solo consume pan y queso diariamente en el desayuno. Un kilogramo de pan contiene 2000 calorías y 50 gramos de proteínas, y un kilogramo de queso contiene 4000 calorías y 200 gramos de proteínas. La familia requiere consumir por lo menos 6000 calorías y 200 gramos de proteínas, consumiendo solamente pan y queso para el desayuno en un día. Si el kilogramo de pan y queso cuestan 6 y 21 soles, respectivamente, ¿qué cantidad de pan y queso debe comprar la familia diariamente para satisfacer los requerimientos de su desayuno por día, gastando la menor cantidad de dinero?

- A) 2 kg de pan y $\frac{1}{2}$ kg de queso B) $\frac{1}{2}$ kg de pan y 2 kg de queso
C) 1 kg de pan y 1 kg de queso D) 3 kg de pan y 2 kg de queso

Solución:

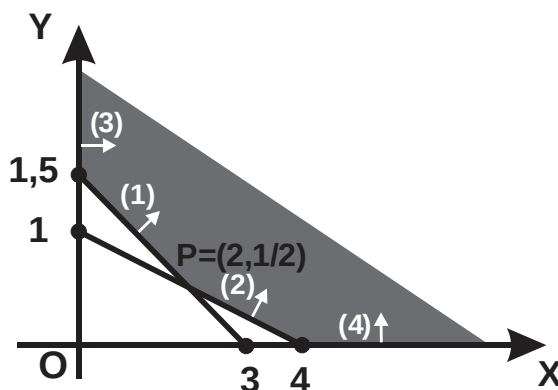
- 1) Consideremos:

x el número de kilogramos de pan
y el número de kilogramos de queso

$$\begin{cases} 2000x + 4000y \geq 6000 \\ 50x + 200y \geq 200 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y \geq 3 \cdots (1) \\ x + 4y \geq 4 \cdots (2) \\ x \geq 0 \cdots (3), y \geq 0 \cdots (4) \end{cases}$$

La función de costo $F(x,y) = 6x + 21y$ que debemos minimizar

- 2) Graficando



- 3) Evaluando la función objetivo en los vértices de la región determinada

$$F\left(0, \frac{3}{2}\right) = 6(0) + 21\left(\frac{3}{2}\right) = 31,5$$

$$F(4,0) = 6(4) + 21(0) = 24$$

$$F\left(2, \frac{1}{2}\right) = 6(2) + 21\left(\frac{1}{2}\right) = 22,5 \text{ Mínimo}$$

- 4) Para que la familia gaste la menor cantidad de dinero y cubra su dieta diaria debe comprar 2 kg de pan y medio kg de queso

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En un aula de clase hay inscrito cierto número de estudiantes. Si la mitad de los inscritos faltó el primer día de clases, asistieron menos de 19 estudiantes. Si la tercera parte de los inscritos en el aula son varones y la cantidad de mujeres inscritas es mayor a 22, ¿cuántos estudiantes inscritos hay en total en el aula?
- A) 24 B) 30 C) 36 D) 42

Solución:

- 1) Sea x el número de estudiantes del aula. De los datos se tiene:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} < 19 \\ \frac{2x}{3} > 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 38 \\ x > 33 \end{cases}$$

- 2) Como el número de estudiantes debe ser entero y múltiplo de 6, $x = 36$
Hay 36 estudiantes inscritos en el aula

Rpta.: C

2. A una conferencia asistió cierto número de personas. Si al doble del número de asistentes se le disminuye en 20, el resultado es menor que 50 y si al triple de dicho número de asistentes se le disminuye en 9, el resultado es mayor que 90. ¿Cuántas personas asistieron a dicha conferencia?
- A) 33 B) 34 C) 35 D) 36

Solución:

- 1) Sea x el número de asistentes a la conferencia. De los datos se tiene:

$$\begin{cases} 2x - 20 < 50 \\ 3x - 9 > 90 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 35 \\ x > 33 \end{cases}$$

- 2) Como el número de asistentes debe ser entero, $x = 34$. Son 34 asistentes

Rpta.: B

3. De un salón de clase mixto de una institución educativa particular de Educación primaria se sabe lo siguiente:
- La suma del triple del número de niños con el número de niñas que integran el salón no es mayor a 67 alumnos.
 - El cuádruplo del número de niños menos el triple del número de niñas es al menos 33 alumnos.
 - El doble del número de niñas menos el número de niños es al menos de 8 alumnos.
- ¿Cuántos alumnos en total hay en dicho salón de clase?
- A) 28 B) 30 C) 31 D) 33

Solución:

1) Consideremos:

x el número de niños del salón; y el número de niñas del aula. De los datos se tiene:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 67 \\ 4x - 3y \geq 33 \\ 2y - x \geq 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 67 \dots (1) \\ 4x - 3y \geq 33 \dots (2) \\ 2y - x \geq 8 \dots (3) \end{cases}$$

2) De (1) y (2) se tiene $\frac{33+3y}{4} \leq x \leq \frac{67-y}{3} \dots (4)$ Y de (2) y (3) se tiene $\frac{33+3y}{4} \leq x \leq 2y-8 \dots (5)$ Tomando los extremos (4) $\frac{33+3y}{4} \leq \frac{67-y}{3} \rightarrow y \leq 13$; enteroEn (5) $\frac{33+3y}{4} \leq 2y-8 \rightarrow y \geq 13$; enteroLuego $y = 13$

Sustituyendo en (4) y (5)

 $y = 13 \quad 18 \leq x \leq 18 \rightarrow x = 18$

5) Hay 31 estudiantes en el salón

Rpta.: C

4. El pago semanal, en soles, de Juan está representado por $\overline{abc}$. Si (a,b,c) es la solución del sistema, $\begin{cases} 2x + 3y + 4z \leq 46 \\ 3x + 9y + 12z \geq 129 \\ x \geq 3 \end{cases}$, ¿a cuánto asciende el monto percibido por Juan durante 4 semanas, si es el máximo posible?

A) S/ 1388

B) S/ 1536

C) S/ 1680

D) S/ 1788

Solución:

1) Consideremos:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z \leq 46 \dots (1) \\ 3x + 9y + 12z \geq 129 \dots (2) \\ x \geq 3 \dots (3) \end{cases}$$

2) De (1) y (2) se tiene $43 - x \leq 3y + 4z \leq 46 - 2x \dots (4)$ Tomando los extremos $43 - x \leq 46 - 2x \rightarrow x \leq 3$; entero y de (3) $x = 3$

3) Sustituyendo en (4)

 $x = 3 \rightarrow 40 \leq 3y + 4z \leq 40 \rightarrow 3y + 4z = 40$

- 4) Teniendo en cuenta que los valores de y , z son números enteros mayores o iguales a cero y menores o iguales a 9, se tiene:

Si $z = 7$, $y = 4$ entonces $(a,b,c) = (3,4,7)$

Si $z = 4$, $y = 8$ entonces $(a,b,c) = (3,8,4)$

- 5) $\overline{abc} = 384$, el monto máximo percibido por Juan durante 4 semanas es S/ 1536

Rpta.: B

5. El terreno de Lucía está delimitado por la región determinada al resolver el sistema

de inecuaciones, $\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ 1 \leq x + y \\ 0 \leq x, 0 \leq y \end{cases}$. Si las coordenadas del plano cartesiano están en

metros y Lucía vende a 100 soles cada metro cuadrado de su terreno, ¿cuánto dinero recibirá Lucía por la venta de su terreno?

A) S/ 1100

B) S/ 1120

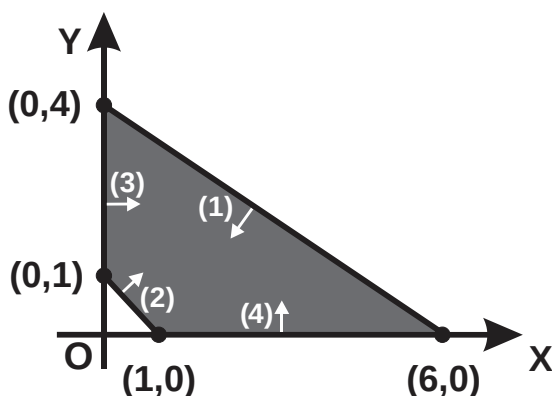
C) S/ 1150

D) S/ 1160

Solución:

- 1) Consideremos $\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \dots (1) \\ 1 \leq x + y \dots (2), 0 \leq x \dots (3) \\ 0 \leq y \dots (4) \end{cases}$

- 2) Graficando se tiene:



- 3) Área: $\frac{6 \times 4}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = \frac{23}{2} \text{ m}^2$

- 4) Lucía recibirá S/ 1150 por la venta de su terreno

Rpta.: C

6. Halle el área de la región determinada por

$$R: \begin{cases} |x| \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ x + y \geq 0 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$

A) $12 u^2$

B) $14 u^2$

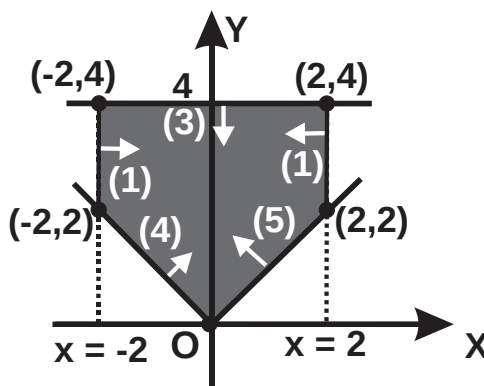
C) $15 u^2$

D) $16 u^2$

Solución:

$$1) \text{ Consideremos } \begin{cases} |x| \leq 2 \dots (1) \\ 0 \leq y \leq 4 \dots (2) \text{ ; } y \leq 4 \dots (3) \\ x+y \geq 0 \dots (4) \text{ ; } x-y \leq 0 \dots (5) \end{cases}$$

2) Graficando se tiene:



$$3) \text{ Área: } 2 \left(\frac{2+4}{2} \right) \times 2 = 12 \text{ u}^2$$

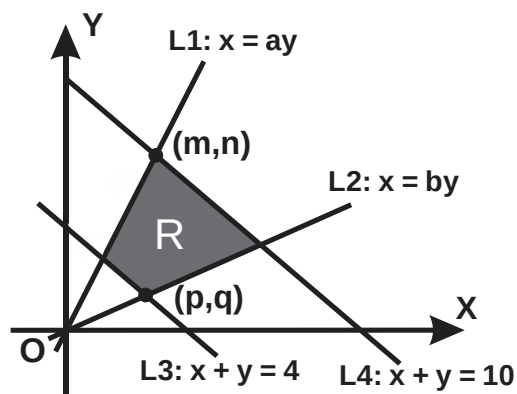
Rpta.: A

7. Para la función objetivo $f(x,y) = 2x + 3y$ se considera la región factible R mostrada en la figura adjunta.

Sabiendo que el máximo valor y mínimo valor posible que admite $f(x,y)$ sobre la región R es 26 y 10, respectivamente. Halle

$$\text{el valor de } H = \frac{n}{m} + \frac{p}{q} + \frac{b}{a}.$$

- A) -1 B) 0
C) 2 D) 4

**Solución:**

De la gráfica:

- Como (m,n) pertenece a L_4 y $f(x,y)$ alcanza su máximo valor en este punto:
 $m+n=10$; $2m+3n=26$, entonces $m=4$ y $n=6$
- Como (p,q) pertenece a L_3 y $f(x,y)$ alcanza su mínimo valor en este punto:
 $p+q=4$; $2p+3q=10$, entonces $p=2$ y $q=2$
- $(m,n) = (4,6)$ pertenece a L_1
 $4 = 6a \rightarrow a = 2/3$
- $(p,q) = (2,2)$ pertenece a L_2
 $2 = 2b \rightarrow b = 1$
- $H = \frac{n}{m} + \frac{p}{q} + \frac{b}{a} = \frac{6}{4} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2/3} = 4$

Rpta.: D

8. Una fábrica de piezas de automóviles cuenta con tres máquinas M_1 , M_2 y M_3 , que son empleadas en la fabricación de dos tipos de piezas P_1 y P_2 . El número de horas diarias que emplean las máquinas, M_1 , M_2 y M_3 en la producción de una unidad de cada tipo de pieza, se muestra en la tabla adjunta. Las maquinarias M_1 y M_2 están en óptimas condiciones y trabajan a lo más 10 horas diarias, mientras que la máquina M_3 , trabaja a lo más 6 horas. Si el precio al que se va a vender cada pieza P_1 es de 50 soles y el de cada pieza P_2 , 60 soles, determine el ingreso máximo, al vender las piezas, elaboradas en un día.

PIEZAS	M_1	M_2	M_3
P_1	1	2	1
P_2	2	1	1

- A) 250 soles B) 320 soles C) 340 soles D) 370 soles

Solución:

- 1) Consideremos:

N° piezas tipo P_1 : x

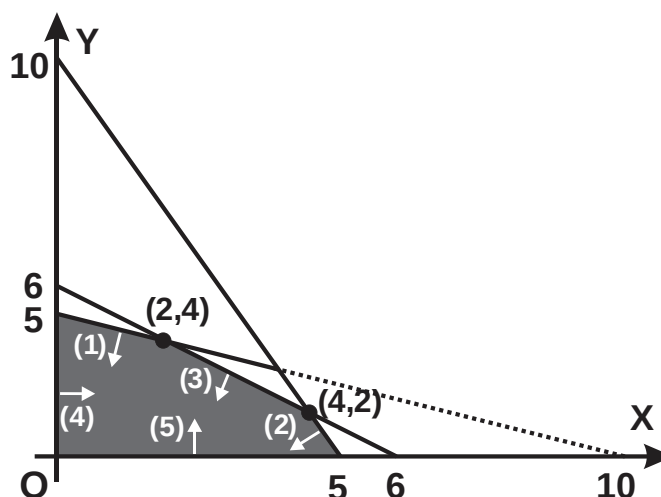
N° piezas tipo P_2 : y

el ingreso máximo sería $I(x,y) = 50x + 60y$

- 2) De los datos

$$\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ 2x + y \leq 10 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0 ; y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 10 \dots (1) \\ 2x + y \leq 10 \dots (2) \\ x + y \leq 6 \dots (3) \\ x \geq 0 \dots (4); y \geq 0 \dots (5) \end{cases}$$

- 3) Graficando



- 4) Evaluando la función objetivo en los vértices de la región determinada

Vertices	$I(x, y) = 50x + 60y$
(0;0)	0
(0;5)	300
(2;4)	340
(4;2)	320
(5;0)	250

El ingreso máximo es 340 soles

Rpta.: C

Álgebra

EJERCICIOS

1. Se sabe que el quíntuplo del número de monedas que hay dentro de una bolsa, es tal que disminuido en 8 no puede exceder de 57 monedas. Y que el séxtuplo del mismo número de monedas, aumentado en 7, no es menor que 84. ¿Cuál es el número de monedas que hay en la bolsa?

A) 9 B) 11 C) 13 D) 15

Solución:

- 1) Sea x el número de monedas que hay en la bolsa. De los datos se tiene:

$$\begin{cases} 5x - 8 \leq 57 \\ 6x + 7 \geq 84 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 13 \\ x \geq \frac{77}{6} \end{cases}$$

- 2) Como el número de monedas debe ser entero, $x = 13$

- 3) La bolsa tiene 13 monedas

Rpta.: C

2. Mery debe inscribir cierto número de personas para asistir a un evento y tiene una semana para entregar la relación. El primer día inscribe la mitad de la cantidad necesaria y el segundo día la tercera parte de dicha cantidad, con lo que le falta inscribir menos de 88 personas. El tercer día inscribe la tercera parte de los que inscribió el segundo día y finalmente el cuarto día completa la cantidad necesaria inscribiendo más de 28 personas cumpliendo el plazo indicado. ¿Cuántas personas inscribió Mery para asistir a dicho evento?

A) 540 B) 522 C) 504 D) 486

Solución:

1) Sea x el número de personas que debe inscribir Mery. De los datos se tiene:

$$\begin{cases} x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) < 88 \\ x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right) > 28 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 528 \\ x > 504 \end{cases}$$

2) Como el número de personas debe ser entero, $x = 522$

3) El número de personas que inscribió Mery es 522.

Rpta.: B

3. Para $x \in \mathbb{Z}^+$, $y \in \mathbb{Z}$ se tiene el sistema $\begin{cases} 6x - 5y \leq 30 \\ 4x + 3y \leq 0 \end{cases}$. Bajo las condiciones de x e y

resulta que la edad de Camila es la suma de valores de x , la edad de Dana es el mayor valor absoluto de y , si la edad de Valentina es igual al número total de soluciones del sistema, aumentado en uno. ¿Quién es la de mayor edad y quién la de menor edad en ese orden?

A) Valentina, Camila
C) Camila, Dana

B) Valentina, Dana
D) Camila, Valentina

Solución:

1) Del sistema:

$$\begin{cases} 6x - 5y \leq 30 \dots (1) \\ 4x + 3y \leq 0 \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{De (1) y (2) se tiene } \frac{6x - 30}{5} \leq y \leq -\frac{4x}{3} \dots (3)$$

$$\text{Tomando los extremos: } \frac{6x - 30}{5} \leq -\frac{4x}{3} \rightarrow 18x - 90 \leq -20x \rightarrow x \leq \frac{90}{38}$$

2) Como $x \in \mathbb{Z}^+$

$$x = 1 \rightarrow \frac{6(1) - 30}{5} \leq y \leq -\frac{4(1)}{3} \rightarrow -\frac{24}{5} \leq y \leq -\frac{4}{3} \rightarrow y = -2; y = -3; y = -4$$

$$x = 2 \rightarrow \frac{6(2) - 30}{5} \leq y \leq -\frac{4(2)}{3} \rightarrow -\frac{18}{5} \leq y \leq -\frac{8}{3} \rightarrow y = -3$$

Hay cuatro soluciones.

3) La edad de Camila: $1 + 2 = 3$

La edad de Dana: $|-4| = 4$

La edad de Valentina: $4 + 1 = 5$

- 4) La de mayor edad es Valentina y la de menor edad es Camila.

Rpta.: A

4. Thiago y Nicole han ahorrado cada uno cierta cantidad entera de dinero para comprar un regalo de navidad a su Mamá y el monto total ahorrado por ellos alcanza exactamente para comprar dicho regalo. Se sabe que el regalo cuesta menos de 200 soles y el monto ahorrado por Nicole excede en más de 50 soles al monto ahorrado por Thiago. Si el monto ahorrado por este es el máximo posible, ¿cuánto dinero ahorró Nicole para comprar el regalo de navidad de su Mamá?

- A) 75 soles B) 72 soles C) 125 soles D) 130 soles

Solución:

- 1) Consideremos:
x el monto ahorrado por Thiago; y el monto ahorrado por Nicole
$$\begin{cases} x + y < 200 \cdots (1) \\ y - x > 50 \cdots (2) \end{cases}$$
- 2) De (1) y (2) se tiene $50 + x < y < 200 - x \cdots (3)$
Tomando los extremos $50 + x < 200 - x \rightarrow x < 75$ y x es entero y el máximo posible
- 3) Sustituyendo en (3)
 $x = 74 \rightarrow 124 < y < 126 \rightarrow y = 125$
- 4) Como el monto ahorrado por Thiago es el máximo posible, el ahorra 74 soles y Nicole 125 soles.

Rpta.: C

5. Se tiene un número de tres cifras tal que la cifra de las centenas es mayor que la cifra de las decenas, y esta última es mayor a la cifra de las unidades. Además, la suma de la cifra de las centenas con la cifra de las unidades es menor que 10. La cifra de las centenas es menor que la cifra de las unidades, aumentada en 6. Finalmente, con estas condiciones, la cifra de las decenas alcanza el mayor valor posible. Respecto al número mencionado podemos afirmar:

- A) Es múltiplo de 15 B) La suma de sus cifras es 12
C) Es un número primo D) Es múltiplo de 6

Solución:

- 1) Consideremos el número de tres cifras $\overline{xyz}$, luego:
$$\begin{cases} x > y > z \cdots (1) \\ x + z < 10 \cdots (2) \\ x < z + 6 \cdots (3) \end{cases}$$
- 2) De (2) y (3) se tiene $x - 6 < z < 10 - x \cdots (4)$
Tomando los extremos $x - 6 < 10 - x \rightarrow x < 8$

- 3) Reemplazando en (4)
 $x = 7 \rightarrow 1 < z < 3 \rightarrow z = 2$
- 4) Como la cifra de la decenas $y < x$, para que tome el mayor valor posible $y = 6$, el número es 762 que es un múltiplo de 6.

Rpta.: D

6. En el cuarto piso del CEPREUNMSM, se desea construir un aula. Si consideramos un sistema de coordenadas rectangulares XY, el piso del aula queda determinado por el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} y \leq x + 10 \\ y \geq x, y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

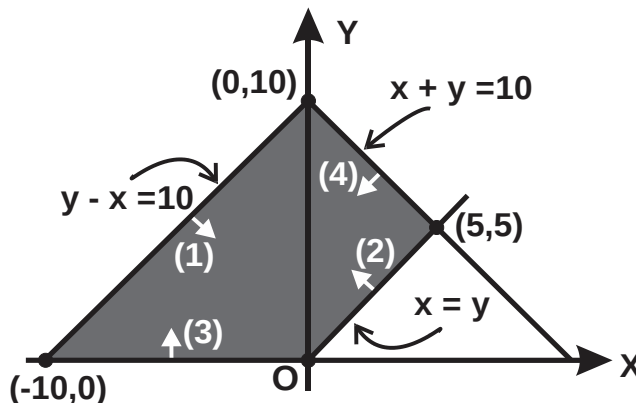
Donde una unidad de cada eje coordenado del plano cartesiano representa un metro. Halle la suma de los valores numéricos del área y el perímetro de dicha aula.

- A) $10 + 20\sqrt{2}$ B) $20\sqrt{2} + 60$ C) $85 + 20\sqrt{2}$ D) $88 + 25\sqrt{2}$

Solución:

- 1) Consideremos $\begin{cases} y \leq x + 10 \dots (1) \\ y \geq x \dots (2), y \geq 0 \dots (3) \\ x + y \leq 10 \dots (4) \end{cases}$

Graficando se tiene:



- 2) Perímetro: $\underbrace{10\sqrt{2}}_1 + \underbrace{5\sqrt{2}}_2 + \underbrace{10}_3 + \underbrace{5\sqrt{2}}_4 = 10 + 20\sqrt{2}$

Área:

Región formada por (1), (3) y el eje Y: $\frac{10(10)}{2} = 50$

Región formada por (2), (4) y el eje Y: $\frac{10(5)}{2} = 25$

- 3) La suma solicitada es: $50 + 25 + 10 + 20\sqrt{2} = 85 + 20\sqrt{2}$

Rpta.: C

7. Una empresa va a lanzar al mercado dos modelos de motocicletas: la SX y la súper SX, cuyos costos de fabricación por unidad son de S/ 10000 y S/ 15000 respectivamente. El presupuesto con el que cuenta la empresa para el proyecto es de S/ 1200000, y por ser el primer stock no se fabricaran más de 100 unidades en total. Si se ha calculado que el beneficio obtenido por cada motocicleta SX vendida será de S/ 2500, y por cada motocicleta súper SX será de S/ 3000; determine cuántas motocicletas de cada modelo (SX y súper SX) deberá fabricar la empresa para obtener el máximo beneficio.

A) 50 y 50

B) 0 y 80

C) 60 y 40

D) 100 y 0

Solución:

- 1) Consideremos:

x el número de motocicletas modelo SX

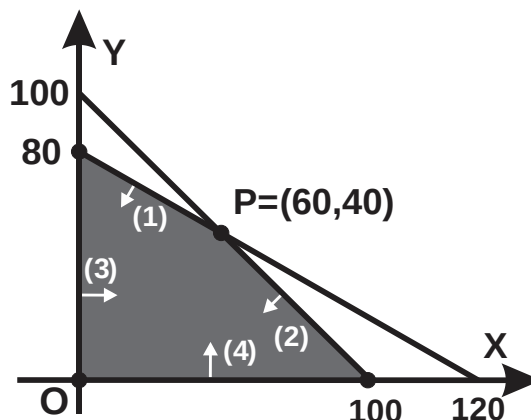
y el número de motocicletas modelo súper SX

de los datos se tiene

$$\begin{cases} 10000x + 15000y \leq 1200000 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 240 \dots (1) \\ x + y \leq 100 \dots (2) \\ x \geq 0 \dots (3), y \geq 0 \dots (4) \end{cases}$$

La función de beneficio $F(x,y) = 2500x + 3000y$ que debemos maximizar

- 2) Graficando



- 3) Evaluando la función objetivo en los vértices de la región determinada

$$F(0,80) = 2500(0) + 3000(80) = 240000$$

$$F(0,0) = 2500(0) + 3000(0) = 0$$

$$F(100,0) = 2500(100) + 3000(0) = 250000$$

$$F(60,40) = 2500(60) + 3000(40) = 270000 \text{ Máximo}$$

- 4) Para obtener el máximo beneficio la empresa deberá fabricar 60 motocicletas del modelo SX y 40 del modelo súper SX.

Rpta.: C

8. Una compañía aérea está de aniversario y desea ofertar a lo sumo 5000 boletos de dos tipos: turista y primera clase. La ganancia correspondiente a cada boleto de tipo turista es de 30 dólares, mientras que la ganancia por cada boleto de primera clase es de 40 dólares. Los boletos ofertados de tipo turista no pueden exceder de 4500 unidades y los de primera clase pueden ser como máximo la tercera parte de los que se ofertan del tipo turista. ¿Cuántos boletos de cada tipo deben ofertarse para que las ganancias sean máximas?

- A) 3750 de turista y 1250 de primera clase
 B) 4000 de turista y 1000 de primera clase
 C) 3000 de turista y 2000 de primera clase
 D) 1000 de turista y 4000 de primera clase

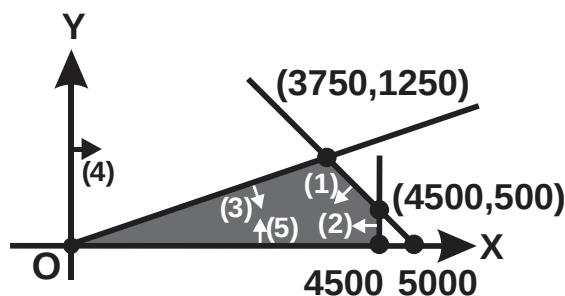
Solución:

- 1) Consideremos:
 x el número de boletos tipo turista
 y el número de boletos de primera clase

$$\begin{cases} x + y \leq 5000 \\ x \leq 4500 \\ y \leq \frac{x}{3} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y \leq 5000 \dots (1) \\ x \leq 4500 \dots (2) \\ y \leq \frac{x}{3} \dots (3) \\ x \geq 0 \dots (4), y \geq 0 \dots (5) \end{cases}$$

La función de ganancia $F(x,y) = 30x + 40y$ que debemos maximizar

- 2) Graficando



- 3) Evaluando la función objetivo en los vértices de la región determinada

$$F(4500,0) = 30(4500) + 40(0) = 135000$$

$$F(0,0) = 30(0) + 40(0) = 0$$

$$F(4500,500) = 30(4500) + 40(500) = 155000$$

$$F(3750,1250) = 30(3750) + 40(1250) = 162500 \text{ Máximo}$$

- 4) Para que la ganancia sea máxima la compañía deberá vender 3750 boletos de turista y 1250 de primera clase

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si se cuadruplica el número de naranjas que hay en una bolsa y luego se añaden 2 naranjas más, habría menos de 40 naranjas. Pero, si se quintuplicara el número de naranjas que hay en la bolsa y luego se extraen 3 naranjas habría más de 40 naranjas. ¿Cuántas naranjas hay en la bolsa?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9

Solución:

- 1) Sea x el número de naranjas que hay en la bolsa. De los datos se tiene:

$$\begin{cases} 4x + 2 < 40 \\ 5x - 3 > 40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < \frac{19}{2} \\ x > \frac{43}{5} \end{cases}$$

- 2) Como el número de naranjas que hay en la bolsa debe ser entero, $x = 9$
La bolsa tiene 9 naranjas

Rpta.: D

2. Alisson debe sacar copias para aplicar el examen parcial de matemática. Ella sabe que cada examen consta de 3 páginas y con el propósito de economizar hojas, hará las copias usando ambas caras de cada hoja. Si debe sacar más de 222 copias y se usaron menos de 152 hojas, ¿cuántos exámenes debe fotocopiar Alisson para el examen parcial de matemática?

A) 74 B) 75 C) 76 D) 77

Solución:

- 1) Sea x el número de exámenes de matemática que debe fotocopiar. De los datos se tiene:

$$\begin{cases} 3x > 222 \\ 2x < 152 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 74 \\ x < 76 \end{cases}$$

- 2) Como el número de exámenes debe ser entero, $x = 75$
Son 75 exámenes

Rpta.: B

3. Mary y Sandy deben presentar cierto número de informes al terminar cada semestre. Se sabe que este semestre Sandy debe presentar al menos 2 informes más que Mary y que cada informe de Mary es de 25 hojas, mientras que los informes de Sandy tienen 15 hojas. Además, entre las dos usaron no más de 150 hojas. Si el número de informes que debe presentar Mary es el mayor posible, ¿cuántos informes debe presentar Sandy al terminar este semestre?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

Solución:

- 1) Consideremos:
 x el número de informes que debe presentar Sandy; y y número de informes que debe presentar Mary. De los datos se tiene:

$$\begin{cases} x \geq 2 + y \\ 15x + 25y \leq 150 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 + y \cdots (1) \\ 3x + 5y \leq 30 \cdots (2) \end{cases}$$

- 2) De (1) y (2) se tiene $2 + y \leq x \leq 10 - \frac{5}{3}y \cdots (3)$

Tomando los extremos $2 + y \leq 10 - \frac{5}{3}y \rightarrow y \leq 3$; entero

Sustituyendo en (3)

$$\text{Mayor } y = 3 \rightarrow 5 \leq x \leq 5 \rightarrow x = 5$$

- 3) Sandy debe presentar 5 informes este semestre.

Rpta.: D

4. Jaime obtiene en su primera práctica de matemática la misma nota que en su primera práctica de comunicación y en la segunda práctica de matemática obtiene el doble de la nota que obtuvo en la segunda práctica de comunicación. Si las notas obtenidas en cada curso son valores enteros, el promedio de las dos prácticas de comunicación no excede a 12, la nota máxima en cada práctica es 20 y el promedio de las notas de las dos prácticas de matemática es al menos 17, ¿cuál es la nota que podría obtener Jaime en la segunda práctica de comunicación?

- A) 20 B) 18 C) 14 D) 10

Solución:

- 1) Consideremos:
 x la nota de Jaime en la primera práctica de comunicación; y la nota de Jaime en la segunda práctica de comunicación.

De los datos se tiene: x la nota de Jaime en la primera práctica de matemática; $2y$ la nota de Jaime en la segunda práctica de matemática.

Los promedios cumplen:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} \leq 12 \\ \frac{x+2y}{2} \geq 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y \leq 24 \cdots (1) \\ x+2y \geq 34 \cdots (2) \end{cases}$$

- 2) De (1) y (2) se tiene $34 - 2y \leq x \leq 24 - y \cdots (3)$

Tomando los extremos $34 - 2y \leq 24 - y \rightarrow 10 \leq y$; entero

- 3) Sustituyendo en (3)

$$y = 10 \rightarrow 14 \leq x \leq 14 \rightarrow x = 14$$

- 4) Jaime obtiene en la segunda práctica de comunicación 10.

Rpta.: D

5. Un campesino desea cercar su jardín colocando una malla cuyo costo por metro lineal es de \$15. Si consideramos un sistema de coordenadas rectangulares XY, dicho jardín queda determinado por el sistema de inequaciones

$$\begin{cases} x - y \leq 2 \\ -4 \leq x \leq 0, \text{ donde una unidad de cada eje coordenado del plano cartesiano} \\ y \leq -1 \end{cases}$$

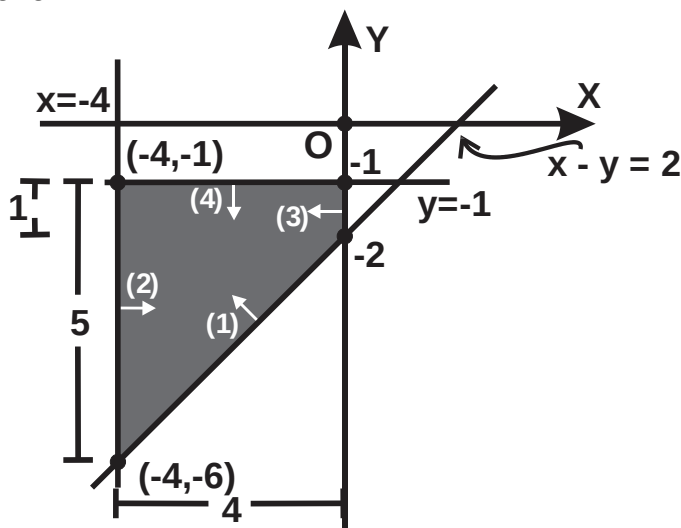
representa un metro. ¿Cuánto deberá pagar por cercar su jardín? (Considere $\sqrt{2} \approx 1,4$)

- A) \$300 B) \$ 250 C) \$ 234 D) \$ 230

Solución:

1) Consideremos $\begin{cases} x - y \leq 2 \dots (1) \\ -4 \leq x \dots (2), x \leq 0 \dots (3) \\ y \leq -1 \dots (4) \end{cases}$

- 2) Graficando se tiene:



- 3) Perímetro: $4\sqrt{2} + 5 + 1 + 4 = 10 + 4\sqrt{2} = 15,6$

- 4) Costo: $15,6 \times 15 = 234$, para cercar el jardín será necesario \$234

Rpta.: C

6. Si la forma de un terreno de cultivo es congruente con la región determinada por el sistema de inequaciones en x e y :

$$\begin{cases} 3x + y \leq 18 \\ x + 5y \leq 48 \\ x + y \geq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}, \text{ halle el \u00e1rea de dicho terreno.}$$

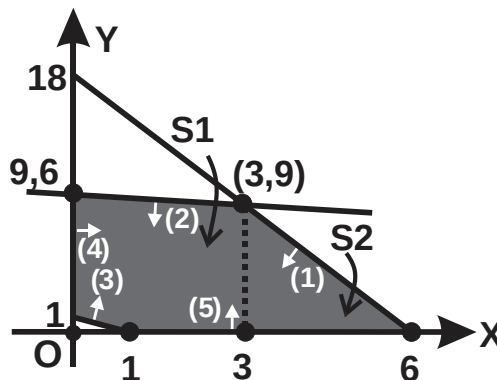
- A) 23,4 u² B) 40,9 u² C) 58,8 u² D) 166,9 u²

Solución:

1) Consideremos

$$\begin{cases} 3x + y \leq 18 \dots (1) \\ x + 5y \leq 48 \dots (2) \\ x + y \geq 1 \dots (3) \\ x \geq 0 \dots (4); y \geq 0 \dots (5) \end{cases}$$

2) Graficando se tiene:



3) Área: $\underbrace{\left(\frac{9+9,6}{2} \right) \times 3}_{S1} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{3 \times 9}{2}}_{S2} = 27,4 + 13,5 = 40,9 \text{ u}^2$

Rpta.: B

7. Un puesto de comida rápida vende hamburguesas de carne y de pollo. Diariamente prepara cierta cantidad de docenas de cada una de ellas, de modo que el total no excede las 15 docenas. Para preparar las hamburguesas de carne demora 20 minutos por cada docena y 10 minutos por cada docena de las de pollo, teniendo como máximo 3 horas para prepararlas. Si gana 3 soles por cada hamburguesa de carne y 2 soles por cada hamburguesa de pollo, ¿cuántas docenas de hamburguesas de pollo prepara y vende para que su ganancia sea máxima?

- A) 3 docenas B) 6 docenas C) 9 docenas D) 12 docenas

Solución:

1) Consideremos:

x el número de docenas hamburguesas de carne

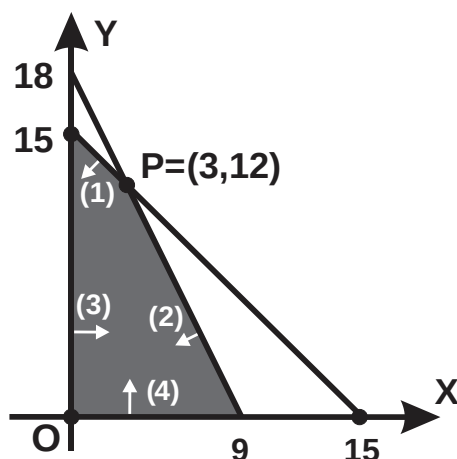
y el número de docenas hamburguesas de pollo

la ganancia que obtendría sería $F(x,y) = 36x + 24y = 12(3x + 2y)$

De los datos

$$\begin{cases} x + y \leq 15 \\ 20x + 10y \leq 180 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y \leq 15 \dots (1) \\ 2x + y \leq 18 \dots (2) \\ x \geq 0 \dots (3); y \geq 0 \dots (4) \end{cases}$$

2) Graficando



3) Evaluando la función objetivo en los vértices de la región determinada

$$F(0,15) = 12(3(0) + 2(15)) = 360$$

$$F(0,0) = 12(3(0) + 2(0)) = 0$$

$$F(9,0) = 12(3(9) + 2(0)) = 324$$

$$F(3,12) = 12(3(3) + 2(12)) = 396 \text{ Máximo}$$

4) Para que la ganancia sea máxima el puesto de comida deberá preparar y vender 3 docenas de hamburguesas de carne y 12 docenas de hamburguesas de pollo.

Rpta.: D

8. Una trattoria oferta 2 tipos de pizzas: clásicas y premium. Por cada pizza clásica gana 4 soles y por cada pizza premium gana 5 soles. Para elaborar cada pizza clásica utiliza 20 gramos de masa y 12 gramos de especias y para elaborar una pizza premium utiliza 20 gramos de masa y 15 gramos de especias. Cierta día solo dispone de 1,6 kg de masa y 1,05 kg de especias, ¿cuál será la ganancia máxima que podría obtener con los insumos de ese día?

A) S/ 420

B) S/ 370

C) S/ 350

D) S/ 320

Solución:

1) Consideremos:

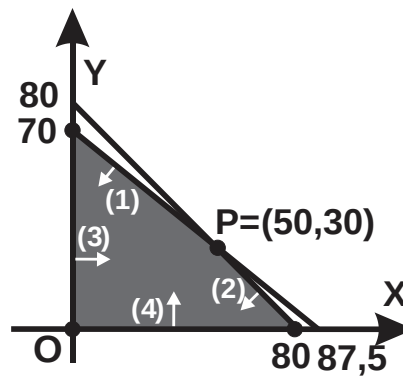
x el número de pizzas clásicas

y el número de pizzas Premium

la ganancia que obtendría sería $F(x,y) = 4x + 5y$

$$\text{De los datos } \begin{cases} 20x + 20y \leq 1600 \\ 12x + 15y \leq 1050 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y \leq 80 \dots (2) \\ 4x + 5y \leq 350 \dots (1) \\ x \geq 0 \dots (3); y \geq 0 \dots (4) \end{cases}$$

2) Graficando



3) Evaluando la función objetivo en los vértices de la región determinada

$$F(0,70) = 4(0) + 5(70) = 350 \text{ Máximo}$$

$$F(0,0) = 4(0) + 5(0) = 0$$

$$F(80,0) = 4(80) + 5(0) = 320$$

$$F(50,30) = 4(50) + 5(30) = 350 \text{ Máximo}$$

4) La ganancia máxima es de 350 soles.

Rpta.:C

Álgebra

EJERCICIOS

1. Una bomba extrae petróleo de un pozo y lo eleva a un depósito situado a 50 metros sobre el nivel del suelo. Si la distancia recorrida por la bomba desde que extrae el petróleo hasta que lo eleva al depósito supera los 750 metros y el exceso que tiene 900 metros con la dimensión de la profundidad (respecto del nivel del suelo) a la que se encuentra el petróleo es más de 100 metros. Se puede afirmar:

- I El petróleo se encuentra a una profundidad de 800 metros.
- II El petróleo se encuentra entre los 600 y 800 metros de profundidad.
- III La profundidad en la que se encuentra el petróleo supera los 800 metros.
- IV El petróleo se encuentra a una profundidad mayor a los 700 metros; pero menor a los 800 metros.
- V El petróleo se encuentra entre los 600 y 700 metros de profundidad.

- A) II B) III C) IV D) I E) V

Solución:

Sea "x" la profundidad (en metros) a la que se encuentra el petróleo
Luego se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 50 > 750 \rightarrow x > 700 \\ 900 - x > 100 \rightarrow x < 800 \end{cases}$$

Por tanto el petróleo se encuentra entre los 700 y 800 metros de profundidad.

Rpta.: C

2. Un número capicúa de tres cifras es tal que la suma de la cifra de las unidades con cuatro veces la cifra de las decenas es mayor que 16; además la cifra de las decenas disminuido de siete veces la cifra de las unidades es menor que cuatro. Si la cifra de las decenas es menor que cinco, halle la tercera parte del número capicúa mencionado.

- A) 32 B) 212 C) 84 D) 57 E) 47

Solución:

Sean

x : la cifra de las unidades del número capicúa

y : la cifra de las decenas del número capicúa

$$\begin{cases} x + 4y > 16 & \dots (1) \\ 7x - y < 4 & \dots (2) \\ y < 5 & \dots (3) \end{cases}$$

$$\text{De (1) y (2)} \quad : \quad 16 - 4y < x < \frac{y+4}{7} \quad \dots (4)$$

$$\text{De (4), por transitividad} \quad : \quad 16 - 4y < \frac{y+4}{7} \rightarrow \frac{108}{29} < y < 5 \rightarrow \boxed{y = 4}$$

$$\text{Reemplazando en (4)} \quad : \quad 0 < x < \frac{8}{7} \rightarrow \boxed{x = 1}$$

Luego el número capicúa es 141

∴ La tercera parte de dicho número es 47.

Rpta.: E

3. Parte de la lista de ingredientes requeridos para elaborar una unidad de dos tipos de pastel se muestra en la siguiente tabla,

	Azúcar (tazas)	Huevos (unidades)	Cantidad de porciones por unidad de pastel
Pastel de Manzana	3	2	6
Pastel de Plátano	2	5	8

Si hay 15 tazas de azúcar disponibles y la cantidad de huevos disponibles no es menor a 16 unidades, y considerando que se puede conseguir los demás ingredientes (manzana, plátano, etc.) ¿cuántas porciones de pastel de manzana se puede obtener para que la cantidad de porciones de pastel de plátano sea menor que 24?

- A) 6 B) 18 C) 24 D) 12 E) 30

Solución:

Sean

Cantidad de pasteles de manzana: x Cantidad de pasteles de plátano : y

$$\text{Cantidad de tazas de azúcar: } 3x + 2y \leq 15 \quad \dots(1)$$

$$\text{Número de unidades de huevo: } 2x + 5y \geq 16 \quad \dots(2)$$

$$\text{Cantidad de porciones de pastel de plátano: } 8y < 24 \rightarrow y < 3$$

$$\text{De (1) y (2): } \frac{16-5y}{2} \leq x \leq \frac{15-2y}{3}$$

$$\rightarrow \frac{16-5y}{2} \leq \frac{15-2y}{3}$$

$$\rightarrow \frac{18}{11} \leq y \wedge y < 3$$

$$\rightarrow y = 2, \text{ luego } x = 3$$

$\therefore$ Por tanto se obtiene 18 porciones de pastel de manzana.

Rpta.: B

4. Tres amigos, Lucho, Benito y Juan tienen en conjunto más de 16 libros. Benito piensa comprar 8 libros más y entonces tendría más libros de los que tienen Lucho y Juan juntos. Si Benito tiene menos libros que Juan y los libros que tiene éste último no llegan a 7, ¿cuántos libros tiene Lucho?

A) 5

B) 3

C) 4

D) 6

E) 2

Solución:

Sea

N° de libros de Lucho: x N° de libros de Benito: y N° de libros de Juan: z

$$\text{Luego, } \begin{cases} x + y + z > 16 & \dots(1) \\ y + 8 > x + z & \dots(2) \\ y < z & \dots(3) \\ z < 7 & \dots(4) \end{cases}$$

Haciendo (1) + (2):

$$x + 2y + z + 8 > x + z + 16 \rightarrow y > 4$$

En (3) y (4): $4 < y < z < 7 \rightarrow y = 5, z = 6$

Reemplazando en (1) y (2):

$$(x > 5 \wedge x < 7) \rightarrow x = 6$$

$\therefore$ Lucho tiene 6 libros.

Rpta.: D

5. Dado el sistema de inecuaciones lineales
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z > 43 \\ 2x - y + 5z < 25 \\ y - z > 1 \\ y < 6 \end{cases}; \{x, y, z\} \subset \mathbb{Z}^+. \text{ Si}$$

(a, b, c) es solución del sistema y "c" es el mayor valor de z, halle el valor de $a^2 - b^2 + c^2$.

A) 33

B) 29

C) 23

D) 28

E) 30

Solución:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z > 43 & \dots(1) \\ -2x + y - 5z > -25 & \dots(2) \\ y - z > 1 & \dots(3) \\ y < 6 & \dots(4) \end{cases}$$

Haciendo (1) + (2):

$$\rightarrow 18 < 4y$$

$$\text{De (4): } \frac{9}{2} < y < 6 \rightarrow y = 5 = b$$

$$\text{De (3): } z < 4 \rightarrow z = 3 = c \text{ (Mayor entero)}$$

$$\text{En (1): } x > 6,5$$

$$\text{En (2): } 7,5 > x$$

$$\text{Luego: } x = 7 = a$$

$$\therefore a^2 - b^2 + c^2 = 33.$$

Rpta.: A

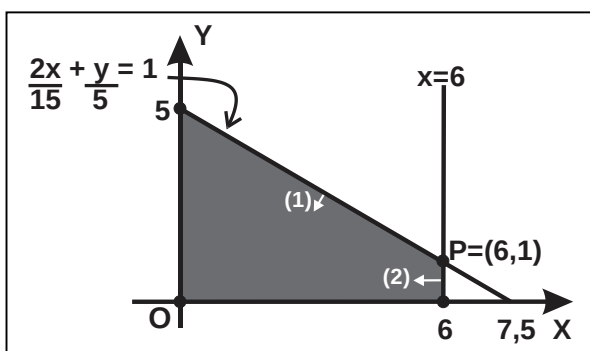
6. La región factible de un problema de programación lineal se ha obtenido de la intersección del primer cuadrante del plano cartesiano con la región definida por las siguientes inecuaciones,

$$\begin{cases} \frac{2}{15}x + \frac{1}{5}y \leq 1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Halle la suma de las abscisas de los vértices de dicha región factible.

- A) 17 B) 12 C) 10 D) 6 E) 11

Solución:



Se tiene el sistema $\begin{cases} 2x + 3y \leq 15 \\ x \leq 6 \end{cases}$

Intersectando las rectas:

$L_1: 2x + 3y = 15$ y $L_2: x = 6$
se obtiene el punto $P(6, 1)$.

De la gráfica se tiene los vértices del polígono convexo:

$(0, 0); (0, 5); (6, 0); (6, 1)$

$\therefore \sum$ de abscisas es $0 + 0 + 6 + 6 = 12$.

Rpta.: B

7. Sea $P(x_0, y_0)$ es el punto para el cual el valor mínimo de la función $f(x, y) = a(2x + y)$ es 2500. Si las coordenadas del punto P están sujetas a las restricciones

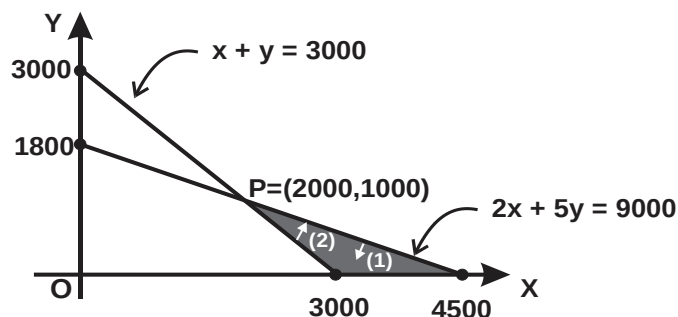
$$\begin{cases} x + y \geq 3000 \\ 2x + 5y \leq 9000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ halle la suma de las coordenadas del punto } Q(ax_0, ay_0), a > 0.$$

- A) 2250 B) 1000 C) 1500 D) 2500 E) 3000

Solución:

Función objetivo: Minimizar $f(x,y) = a(2x + y)$

Los vértices del polígono convexo son: $(3000,0)$; $(4500,0)$; $(2000,1000)$



Vértices	$f(x,y) = a(2x + y)$
$(3000,0)$	$6000a$
$(4500,0)$	$9000a$
$(2000,1000)$	$5000a$

Luego el valor mínimo de la función es $5000a = 2500$ y $P(2000, 1000)$

$$\rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow Q(ax_0, ay_0) = Q(1000, 500)$$

$\therefore \sum$ coordenadas del punto Q es 1500.

Rpta.: C

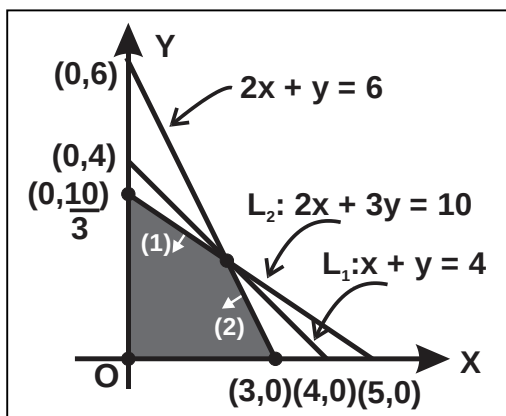
8. Una empresa, especializada en la fabricación de mobiliarios para casas de muñecas produce cierto tipo de minimesas y minisillas que vende a 200 y 300 soles, respectivamente. Cada minimesa requiere de 2 horas para su fabricación y cada minisilla 3 horas; además el material utilizado en cada minimesa y minisilla tiene un coste de 40 y 20 soles, respectivamente. Si por cada operario se dispone de 120 soles diario para material, además por cada operario el número total de unidades fabricadas de los dos tipos de producto no podrá exceder de 4 por día y, Sabiendo que la jornada laboral máxima es de 10 horas, ¿cuántas unidades (no nulas) de cada artículo debe fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos de la empresa?

- A) 2 minimesas y 2 minisillas
 B) 1 minimesa y 2 minisillas
 C) 3 minimesas y 1 minisilla
 D) 2 minimesas y 1 minisilla
 E) 1 minimesa y 3 minisillas.

Solución:

Sean x : N° de minimesas que produce cada operario por día
 y : N° de minisillas que produce cada operario por día

Función objetivo: Max. $f(x,y) = 200x + 300y$



$$\text{Restricciones} \quad \begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 40x + 20y \leq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices del polígono convexo

$$(0,0); (0, \frac{10}{3}); (2,2); (3,0)$$

Vértices	$f(x,y) = 200x + 300y$
$(0,0)$	0
$(0, \frac{10}{3})$	1000
$(2,2)$	1000
$(3,0)$	600

∴ Cada operario debe fabricar 2 minimesas y 2 minisillas para obtener máximo ingreso.

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Al sumar los resultados de dividir un número par por 2, 3 y 4 resulta mayor que 13. Si en la operación anterior se cambia el divisor 2 por 6 la suma resulta menor que 12. Halle la suma de cifras de dicho número par.

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 2

Solución:

Sea

n : el número par

$$\begin{cases} \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} > 13 & \rightarrow \frac{13n}{12} > 13 \quad \dots(1) \\ \frac{n}{6} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} < 12 & \rightarrow \frac{18n}{24} < 12 \quad \dots(2) \end{cases}$$

De (1) y (2)

$$\rightarrow 12 < n < 16$$

$$\rightarrow n = 14$$

$\therefore \sum$ cifras de n es 5.

Rpta.: B

2. Una mujer rema un bote aguas arriba (el bote se mueve en contra de la corriente) desde un punto en un río, a otro punto ubicado a más de 4 millas de distancia en una hora y media. El viaje de regreso, a favor de la corriente, le toma solo 45 minutos. ¿cuál es la mínima velocidad entera con la que rema la mujer con respecto al agua?

A) 7 mi/h B) 6 mi/h C) 3 mi/h D) 5 mi/h E) 4 mi/h

Solución:

Sean

Velocidad de remar (millas por hora): x

Velocidad de la corriente (millas por hora): y

Considerando que: Velocidad $\times$ (tiempo) = distancia recorrida en ambos tramos se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (x-y)\frac{3}{2} > 4 & \rightarrow x-y > \frac{8}{3} \quad \dots(1) \\ (x+y)\frac{3}{4} > 4 & \rightarrow x+y > \frac{16}{3} \quad \dots(2) \end{cases}$$

$$\text{De (1) + (2)} \quad : \quad 2x > 8 \rightarrow x > 4$$

$$\therefore x_{\text{Min}} = 5 \text{ mi/h.}$$

Rpta.: D

3. Dado el sistema de inecuaciones en x, y ,
$$\begin{cases} x + 2y < 7 \\ 3x - y > 4 \\ y > 0 \end{cases}; \{x, y\} \subset \mathbb{Z}.$$
 Halle el número de elementos de su conjunto solución.

A) 1 B) 4 C) 3 D) 2 E) 0

Solución:

De la primera y segunda inecuación,

$$\frac{y+4}{3} < x < 7-2y \quad \dots(I)$$

$$\text{Luego, } \frac{y+4}{3} < 7-2y \rightarrow y+4 < 21-6y \rightarrow 7y < 17$$

$$\text{Entonces } 0 < y < \frac{17}{7} = 2, \dots$$

$$\rightarrow y=1 \vee y=2$$

En (I) :

Si $y=2$ entonces, $2 < x < 3$ (No existe valores enteros)

Si $y=1$ entonces, $\frac{5}{3} < x < 5$; luego $x=2, 3, 4$

Luego las soluciones son $(2,1), (3,1), (4,1)$

$\therefore$ Hay 3 soluciones.

Rpta.: C

4. Si la terna (a,b,c) es la solución del sistema
$$\begin{cases} x + y + z < 14 \\ 6 - x + y < z \\ y > z \\ z > 1 \end{cases}; \{x,y,z\} \subset \mathbb{Z},$$
 halle el valor de $a - (b+c)$.

A) 5 B) 3 C) -2 D) 2 E) -5

Solución:

$$\begin{cases} x + y + z < 14 & \dots(1) \\ 6 - x + y < z & \dots(2) \\ y > z & \dots(3) \\ z > 1 & \dots(4) \end{cases}$$

$$\text{De (1)+(2)} \quad : \quad 6 + 2y < 14 \rightarrow y < 4$$

$$\text{De (3) y (4)} \quad : \quad y > z > 1 \rightarrow 1 < z < y < 4 \rightarrow z = 2 = c, y = 3 = b$$

$$\text{En (1)} \quad : \quad x < 9$$

$$\text{En (2)} \quad : \quad 7 < x$$

$$\text{Luego } x = 8 = a$$

$$\therefore a - (b + c) = 8 - (3 + 2) = 3.$$

Rpta.: B

5. Alexander se ha ejercitado físicamente más de 20 días este último mes haciendo caminatas, natación y realizando levantamiento de pesas. La cantidad de días que realizó levantamiento de pesas y caminatas fue menor que la cantidad de días en que practicó natación, aumentado en 10; además la cantidad de días que realizó caminatas supera a la cantidad de días que realizó natación. Si cada día realizó solo una de las tres actividades mencionadas, ¿cuántos días, como máximo, realizó entre estas dos últimas actividades? , sabiendo que los días que realizó caminatas fue inferior a 10 días.

A) 16

B) 13

C) 17

D) 15

E) 12

Solución:

Sean

Número de días que realiza natación : x

Número de días que realiza caminatas : y

Número de días que realiza pesas : z

El sistema de inecuaciones será

$$\begin{cases} x + y + z > 20 & \dots(1) \\ z + y < x + 10 & \dots(2) \\ y > x & \dots(3) \\ y < 10 & \dots(4) \end{cases}$$

$$\text{De (1) y (2)} : \begin{cases} x + y + z > 20 \\ x - z - y > -10 \end{cases} \quad , \text{ sumando se obtiene } , 2x > 10$$

Luego $x > 5$

De (3) y (4) : $5 < x < y < 10$

Entonces el máximo valor de x es 8 y el máximo valor de y es 9.

$$\therefore (x+y)_{\max} = 17.$$

Rpta.: C

6. Se desea construir una fuente de agua, que debe estar sobre una superficie, cuya extensión de sus dimensiones plasmadas en un sistema de coordenadas cartesianas satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} x-1 \leq y \\ x+y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Halle el perímetro de la mencionada superficie.

A) $9\sqrt{2}$ u

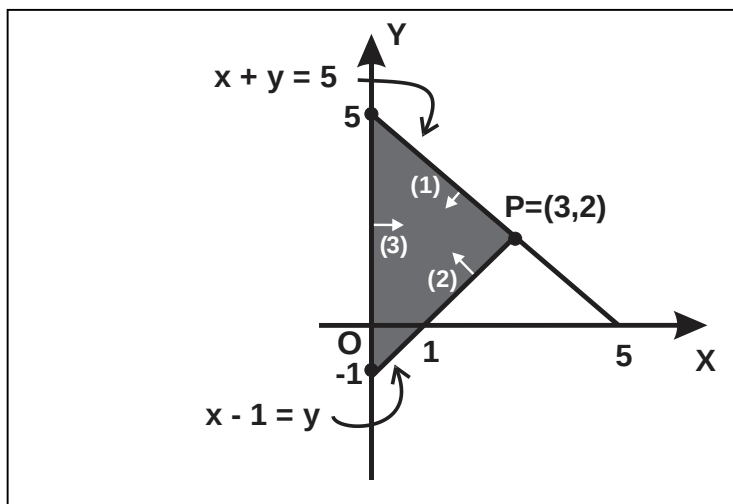
B) $12\sqrt{2}$ u

C) $(6+2\sqrt{2})$ u

D) $6\sqrt{2}$ u

E) $(6+6\sqrt{2})$ u

Solución:



i) $x-1=y$ pasa por $(0, -1)$ y $(1, 0)$

ii) $x+y=5$ pasa por $(5, 0)$ y $(0, 5)$

Hallamos

$$P: \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases} \rightarrow P=(3, 2)$$

De la gráfica se tiene:

Longitud de la base : 6

Longitud de los lados: $3\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$

$\therefore$ El perímetro de la superficie es $(6\sqrt{2} + 6)$ u.

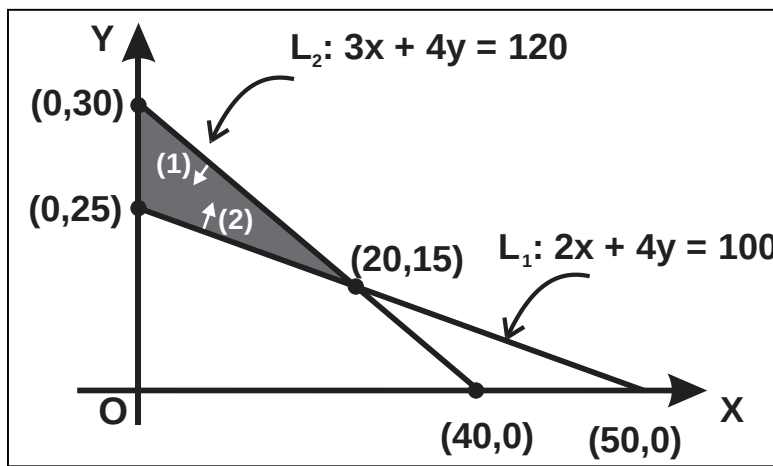
Rpta.: E

7. Si el valor máximo de la función $f(x,y) = ax + by$ es $55b$, donde los puntos (x,y)

están sujeta a las restricciones $\begin{cases} 2x + 4y \geq 100 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, halle una relación entre a y b .

A) $a = b$ B) $a = 2b$ C) $2a = b$ D) $a - 2b = 1$ E) $2b + a = 1$

Solución:



Función objetivo:

Max $f(x,y) = ax + by$

Restricciones

$$\begin{cases} x + 2y \geq 50 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices del polígono convexo:

$(0,25)$; $(0,30)$; $(20,15)$

Vértices	$f(x,y) = f(x,y) = ax + by$
$(0,25)$	$25b$
$(0,30)$	$30b$
$(20,15)$	$20a + 15b$

$$\rightarrow 20a + 15b = 55b \rightarrow 20a = 40b$$

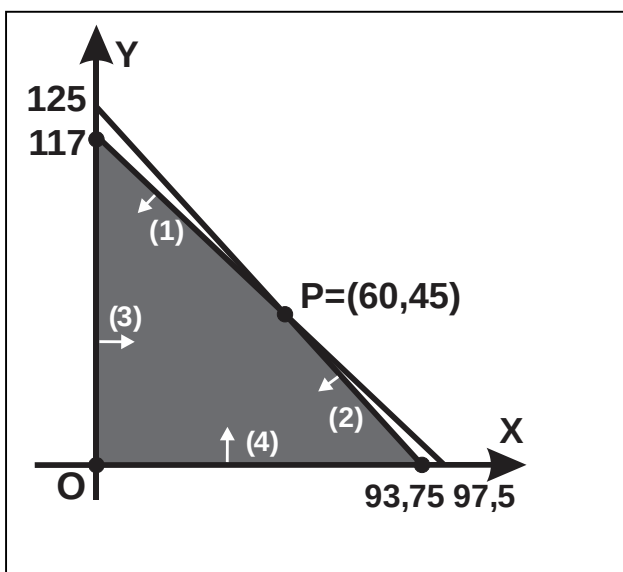
$$\therefore a = 2b.$$

Rpta.: B

8. Un empresario dedicado a la exportación de espárragos y fresas, observa que para la cosecha de una caja de espárragos cuyo peso es de 4kg, se necesita 240 min para el embalaje y 6 horas de cosecha, pero para la cosecha de una caja de fresas cuyo peso es de 10 kg necesita 180 min para embalaje y 5 horas de cosecha. Sabiendo que para la exportación se dispone al mes de 625 horas para el embalaje y 1170 horas para la cosecha y el precio de una caja de espárragos es de S/.70 y de una caja de fresas es de S/.60. Determine cuantos kg de cada tipo se deben cosechar, para obtener un máximo ingreso si solo se dispone del 60% de las horas disponibles para el embalaje y 50% de las horas disponibles para la cosecha y se cosecha al menos una caja de cada tipo.

- A) 240 kg de espárragos y 450 kg de fresas.
 B) 60 kg de espárragos y 45 kg de fresas.
 C) 450 kg de espárragos y 240 kg de fresas.
 D) 99 kg de espárragos y 450 kg de fresas.
 E) 45 kg de espárragos y 129 kg de fresas.

Solución:



Sean

x : N° de cajas de espárragos

y : N° de cajas de fresas

Función objetivo:

$$\text{Max } f(x, y) = 70x + 60y$$

Restricciones:

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 60\% \cdot 625 \\ 6x + 5y \leq 50\% \cdot 1170 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices del polígono convexo:

$(0, 0)$; $(0, 117)$; $(60, 45)$; $(93.75, 0)$

Vértices	$f(x, y) = 70x + 60y$
$(0; 0)$	0
$(0; 117)$	7140
$(60; 45)$	7500
$(93, 75; 0)$	7500

∴ Para obtener un ingreso máximo debe cosechar 60x4 kg de espárragos y 45x10 kg de fresas.

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. Julio, un vendedor de teléfonos, tenía cierto número de *smartphones* (del mismo modelo y de las mismas características) de los cuales vendió 50, quedándole más de la mitad. Al día siguiente le devolvieron 10, después logró vender 30 *smartphones* más con lo cual le quedaron menos de 38. Calcule la suma de la máxima con la mínima cantidad posible de *smartphones* que Julio tenía al inicio.

A) 210 B) 202 C) 204 D) 208 E) 206

Solución:

N° par *smartphones* al inicio: x

$$\begin{cases} x - 50 > \frac{x}{2} & \rightarrow x > 100 \quad \dots(1) \\ x - 50 + 10 - 30 < 38 & \rightarrow x < 108 \quad \dots(2) \end{cases}$$

De (1) y (2), resulta

$$\rightarrow 100 < x < 108, x \text{ es par}$$

$$\rightarrow x = 102; 104; 106 \rightarrow x_{\text{MAX}} = 106 \wedge x_{\text{MIN}} = 102$$

$$\therefore \text{La suma es } 106 + 102 = 208$$

Rpta.: D

2. En un campeonato del Cubo de Rubik, realizado en Lima, los participantes Misael y Samir llegaron a la final, con tiempos sorprendentes en el armado del cubo. Si tales tiempos cumplen lo siguiente: "la diferencia del doble del tiempo de Misael con el tiempo de Samir (en ese orden) es menos de 100 segundos, y la suma del tiempo de Misael con el doble del tiempo de Samir supera los 125 segundos; además, Samir armó el cubo en un tiempo menor a los 32 segundos. Si los tiempos de ambos competidores fueron segundos enteros, ¿quién ganó la competencia y cuál fue su tiempo?

A) Misael con 30 s. B) Samir con 25 s. C) Misael con 29 s.
D) Misael con 40 s. E) Samir con 31 s.

Solución:

Sean

Tiempo en segundos de Misael en armar el cubo : x Tiempo en segundos de Samir en armar el cubo : y

$$x \in \mathbb{Z} ; y \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2x - y < 100 & \dots (1) \\ x + 2y > 125 & \dots (2) \\ y < 32 & \dots (3) \end{cases}$$

$$\text{De (1) y (2)} : 125 - 2y < x < \frac{y + 100}{2} \quad \dots (4)$$

$$\text{De (4), por transitividad} : 125 - 2y < \frac{y + 100}{2} \rightarrow 30 < y < 32 \rightarrow \boxed{y = 31}$$

$$\text{Reemplazando en (4)} : 63 < x < 65,5 \rightarrow \boxed{x = 64} \vee \boxed{x = 65}$$

$\therefore$ Samir ganó la competencia con un tiempo de 31 segundos.

Rpta.: E

3. El número de hijos que tiene Moisés supera al número de hijos que tiene Víctor, y los de éste supera al número de hijos de Benito. Entre Benito y Moisés tienen menos de 5 hijos, y si Benito tuviese 3 hijos más tendría más que Moisés. Si Moisés, Víctor y Benito tienen por lo menos un hijo, ¿cuántos hijos tiene Moisés?

A) 6 B) 4 C) 5 D) 2 E) 3

Solución:

Sean

N° de hijos de Moisés : x

N° de hijos de Víctor : y

N° de hijos de Benito : z

$$x \in \mathbb{Z} ; y \in \mathbb{Z} ; z \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} z < y < x & \dots(1) \\ x + z < 5 & \dots(2) \\ x < z + 3 & \dots(3) \end{cases}$$

$$\text{Haciendo (2)+(3), resulta } 2x + z < z + 8 \rightarrow x < 4 \quad \dots(4)$$

Reemplazando (4) en (1):

$$z < y < x < 4 \quad \wedge \{x, y, z\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\rightarrow x = 3, y = 2, z = 1$$

$\therefore$ Moisés tiene 3 hijos.

Rpta.: E

4. Marco observa que en una granja hay entre patos y cuyes menos de 20. Si al contar la cantidad de patas de estos es más de 46, ¿cuántos patos, como máximo, hay en dicha granja?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

Solución:

Sea

N° de patos que hay en la granja: x

N° de cuyes que hay en la granja: y

$$\begin{cases} x + y < 20 \\ 2x + 4y > 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 4y < 80 & \dots(1) \\ -2x - 4y < -46 & \dots(2) \end{cases}$$

Haciendo (1) + (2):

$$2x < 34 \rightarrow x < 17 \rightarrow x \in \{16; 15; 14; \dots\}$$

Si

$$x = 16 \rightarrow 3, \dots < y < 4 \text{ (Imposible)}$$

$$x = 15 \rightarrow 4 < y < 5 \text{ (Imposible)}$$

$$x = 14 \rightarrow 4,5 < y < 6 \rightarrow y = 5$$

$\therefore$ Máximo del número de patos: 14

Rpta.: C

5. Si la terna (x, y, z) es la solución del sistema
$$\begin{cases} x + y + z > 16 \\ 8 - x + y > z \\ y < -z \\ -z < 7 \end{cases}; \{x, y, z\} \subset \mathbb{Z}, \text{ halle el}$$
 valor de $x - y + z$.

A) 8

B) 6

C) 9

D) 7

E) 5

Solución:

$$\begin{cases} y < -z < 7 \\ 8 + 2y + z > 16 + z \rightarrow y > 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow 4 < y < -z < 7$$

$$\rightarrow y = 5, -z = 6$$

$$\text{En (I)} : x > 17$$

$$\text{En (II)} : 19 > x$$

$$\text{Luego} : x = 18$$

$$\therefore x - y + z = 7.$$

Rpta.: D

6. Un comerciante vende dos mezclas diferentes de café. La mezcla estándar usa 4 oz de granos de arábica y 12 oz de granos de robusta por paquete; la mezcla Premium usa 10 oz de arábica y 6 oz de robusta por paquete. El comerciante tiene disponible 80 oz de granos arábica y 90 oz de robusta. La región R es la solución de un sistema de inecuaciones que describe el posible número de paquetes estándar y Premium que el comerciante pueda hacer de acuerdo con estas condiciones, halle el área de dicha región.

A) 700 u^2
D) $10\,900 \text{ u}^2$

B) 600 u^2
E) $10\,4900 \text{ u}^2$

C) $10\,480 \text{ u}^2$

Solución:

Sean

x : N° de paquetes estándar

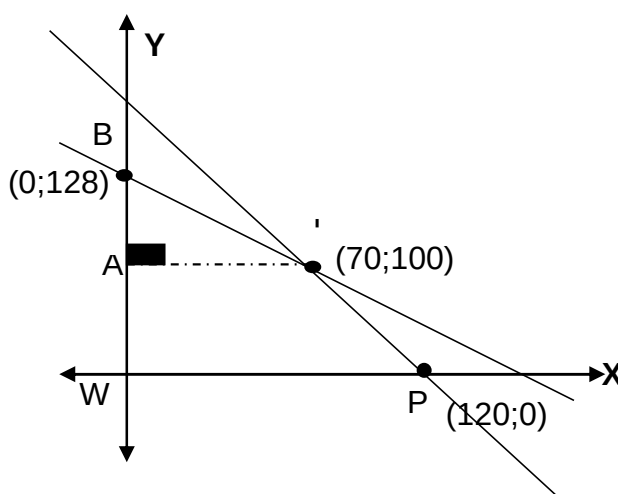
y : N° de paquetes Premium

Sistema de desigualdades según los datos

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}y \leq 80 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}y \leq 90 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Del gráfico, se tiene

$$\text{Área}(R) = \underbrace{\text{Área}_{\triangle BAL}} + \underbrace{\text{Área}_{WALP}}$$



$$\therefore \text{Área}(R) = \left(\frac{\cancel{70} \times 28}{2} \right) + \left(\frac{70 + 120}{2} \right) \cancel{100} = 10\,480 \text{ u}^2.$$

Rpta.: C

7. Funacustica fabrica un gabinete para almacenar discos compactos que se pueden comprar completamente ensamblado o como un kit para armar. Cada gabinete se procesa en el departamento de manufactura y en el departamento de montaje. La producción (en unidades) de los departamentos de manufactura y montaje, por día, se muestran en la siguiente tabla:

N° Gabinetes	Manufactura	Montaje
Completamente ensamblados	200	100
Kit para armar	200	300

Cada gabinete completamente ensamblado contribuye con S/ 50 a las utilidades de la empresa, mientras cada kit aporta S/ 40 a sus utilidades. Considerando que x_1 y x_2 son las unidades totalmente ensambladas y de kits, respectivamente, ¿cuál será la función objetivo “z” y las restricciones del problema de programación lineal que permita a dicha fábrica maximizar sus utilidades por día?

A) $\max z(x_1, x_2) = 50x_1 + 40x_2$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 200x_1 + 100x_2 \leq 1 \\ 200x_1 + 300x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

B) $\max z(x_1, x_2) = 40x_1 + 50x_2$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 200x_1 + 100x_2 \geq 1 \\ 200x_1 + 300x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

C) $\max z(x_1, x_2) = 40x_1 + 50x_2$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \frac{1}{200}x_1 + \frac{1}{200}x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{100}x_1 + \frac{1}{300}x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

D) $\max z(x_1, x_2) = 50x_1 + 40x_2$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \frac{1}{200}x_1 + \frac{1}{300}x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{200}x_1 + \frac{1}{100}x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

E) $\max z(x_1, x_2) = 50x_1 + 40x_2$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \frac{1}{200}x_1 + \frac{1}{200}x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{100}x_1 + \frac{1}{300}x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

Sean

N° de gabinetes completamente ensamblado: x_1 N° de gabinetes – Kit para armar : x_2

Según la tabla, las restricciones son

$$\begin{cases} \frac{1}{200}x_1 + \frac{1}{200}x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{100}x_1 + \frac{1}{300}x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

El utilidad total para x_1 y x_2 , respectivamente es

$$z(x_1, x_2) = 50x_1 + 40x_2$$

Finalmente, el problema a estudiar es el siguiente

$$\max z(x_1, x_2) = 50x_1 + 40x_2$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \frac{1}{200}x_1 + \frac{1}{200}x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{100}x_1 + \frac{1}{300}x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rpta.: E

8. Un fabricante produce dos tipos de reproductores de video: Vista y Xtreme. Para su producción, los aparatos requieren del uso de dos máquinas, A y B. El número de horas necesarias para ambos está indicado en la tabla siguiente:

Reproductores	Máquina A	Máquina B
Vista	1 h	2h
Xtreme	3h	2 h

Si cada máquina puede utilizarse 24 horas por día y las utilidades en los modelos Vista y Xtreme son \$ 50 y \$ 80, respectivamente, ¿cuántos reproductores de cada tipo deben producirse y venderse por día para obtener una utilidad máxima?

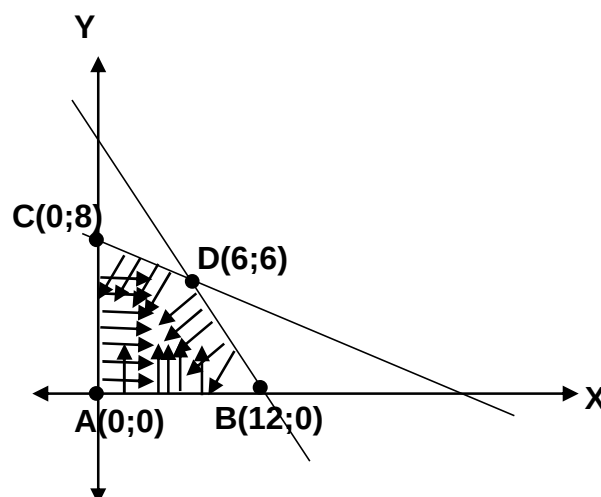
- A) 7 reproductores Vista y 6 reproductores Xtreme.
 B) 12 reproductores Vista y ningún reproductor Xtreme.
 C) 6 reproductores Vista y 6 reproductores Xtreme.
 D) 5 reproductores Vista y 8 reproductores Xtreme.
 E) 7 reproductores Vista y 7 reproductores Xtreme.

Solución:

Sean x : N° de reproductores Vista
 y : N° de reproductores Xtreme

Función objetivo: $f(x,y) = 50x + 80y$

$$\text{Restricciones : } \begin{cases} x + 3y \leq 24 \\ 2x + 2y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



Vértices del polígono convexo

$A(0;0)$, $B(12;0)$, $C(0;8)$, $D(6,6)$

Vértices	$f(x,y) = 50x + 80y$
$A(0;0)$	0
$B(12;0)$	600
$C(0;8)$	640
$D(6;6)$	780 (Máximo)

- ∴ El fabricante debe producir 6 reproductores Vista y 6 reproductores Xtreme, para una utilidad máxima de S/ 780.

Rpta. : C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hoy, Tyzon disponía de cierta cantidad de botellas piscos, de los cuales vende 20 y le quedan más de 10 piscos. Luego le devuelven 8 piscos y después vende 18 piscos más, con lo que le quedan menos de 6. ¿Cuántas botellas de piscos, como máximo, le quedaron luego de su primera venta?

A) 17 B) 14 C) 16 D) 15 E) 18

Solución:

Nº piscos al inicio: x

$$\begin{cases} x - 20 > 10 & \rightarrow x > 30 \quad \dots(1) \\ x - 20 + 8 - 18 < 6 & \rightarrow x < 36 \quad \dots(2) \end{cases}$$

De (1) y (2)

$$\rightarrow 30 < x < 36$$

$$\rightarrow x = 31; \dots; 35 \rightarrow x_{\text{MAX}} = 35$$

∴ A Tyzon le quedaron como máximo 15 piscos en su primera venta.

Rpta.: D

2. Yesly va al mercado y observa que el costo de 4 kg de mantequilla junto con 3 kg de mermelada es menor que S/ 100, y el costo de 3 kg de mantequilla excede al costo de 2 kg de mermelada en más de S/ 20. Los costos de cada kilogramo de mermelada y de cada kilogramo de mantequilla son números enteros de soles. Si el costo de cada kilogramo de mermelada es el máximo posible, ¿cuál es el costo de cada kilogramo de mantequilla?

A) S/ 12 B) S/ 16 C) S/ 13 D) S/ 15 E) S/ 18

Solución:

Sean

Costo de 1 kg de mermelada : x

Costo de 1 kg de mantequilla : y

$$x \in \mathbb{Z} ; y \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 4y + 3x < 100 & \dots(1) \\ 3y - 2x > 20 & \dots(2) \end{cases}$$

$$\text{De (1) y (2)} \quad : \quad \frac{20+2x}{3} < y < \frac{100-3x}{4}$$

$$\text{De (4), por transitividad} \quad : \quad \frac{20+2x}{3} < \frac{100-3x}{4} \rightarrow 80+8x < 300-9x \rightarrow x < 12,94$$

$$\rightarrow x_{\text{MAX}} = 12$$

Luego,

$$14,6... < y < 16 \rightarrow y = 15$$

$\therefore$ El costo de un 1kg de mantequilla es de S/ 15.

Rpta.: D

3. Dado el sistema de inecuaciones en x , y $\begin{cases} x - y > -5 \\ 4x + y < 6 \\ y > 2 \end{cases}$, halle el número de elementos de su conjunto solución, cuyas coordenadas son números enteros.

A) 3 B) 2 C) 1 D) 4 E) 0

Solución:

Del sistema

$$\begin{cases} x - y > -5 & \dots(1) \\ 4x + y < 6 & \dots(2) \\ y > 2 & \dots(3) \end{cases}$$

De (1) y (2):

$$\boxed{y - 5 < x < \frac{6-y}{4}} \quad \dots(4)$$

$$\rightarrow y - 5 < \frac{6-y}{4} \rightarrow y < 5,2 \quad \dots(5)$$

$$\text{De (3) y (5):} \quad 2 < y < 5,2 \rightarrow y = \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 5 \end{cases}$$

Con $y=3$ en (4), resulta $-2 < x < \frac{3}{4} \rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$ pues $x \in \mathbb{Z}$

Con $y=4$ en (4), resulta $-1 < x < \frac{1}{2} \rightarrow x = 0$ pues $x \in \mathbb{Z}$

Con $y=5$ en (4), resulta $0 < x < \frac{1}{4} \rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

$$CS = \{(0,3); (-1,3); (0,4)\}$$

$$\therefore n(CS) = 3.$$

Rpta.: A

4. Si la terna (x,y,z) es la solución del sistema
$$\begin{cases} 3x + y + 6z > 2 \\ x + z \leq y - z - 2 \\ z - x \leq 5 \\ y \leq 3 \end{cases}; \{x,y,z\} \subset \mathbb{Z},$$
 halle

el mayor valor de $2(y+z)$.

A) 8

B) 6

C) 9

D) 7

E) 10

Solución:

$$\begin{cases} 3x + y + 6z > 2 & \dots(1) \\ x + z \leq y - z - 2 & \dots(2) \\ z - x \leq 5 & \dots(3) \\ y \leq 3 & \dots(4) \end{cases}$$

$$\text{De (2)+(3): } -y + 3z \leq 3 \rightarrow 3z \leq y + 3$$

$$\text{De (4) : } y + 3 \leq 6 \rightarrow 3z \leq y + 3 \leq 6 \rightarrow 3z \leq 6 \rightarrow \boxed{z \leq 2}$$

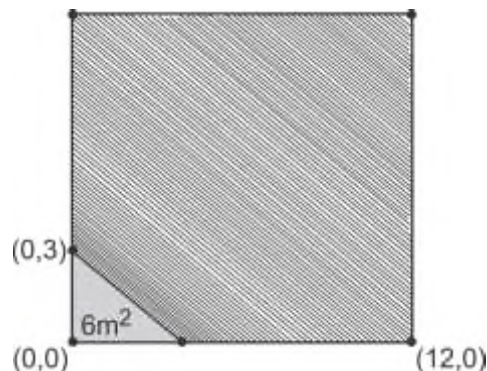
Como nos piden el mayor valor de

$$2(y+z) \rightarrow y=3 \wedge z=2$$

$$\therefore 2(y+z)_{\text{MAX}} = 10$$

Rpta.: E

5. Se tiene un terreno de forma rectangular de 180 m^2 , en el que se dejará un espacio libre, de forma triangular, y de 6 m^2 , como se muestra en el gráfico adjunto.



Determine el sistema de inecuaciones que representa la región comprendida por el terreno, sin la región triangular.

A)
$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 15 \end{cases}$$

B)
$$\begin{cases} 5x + 3y \geq 12 \\ 0 \leq x \leq 15 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases}$$

C)
$$\begin{cases} 3x + 4y \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 15 \end{cases}$$

D)
$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 15 \end{cases}$$

E)
$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

Solución:

Calculando la ecuación de la recta que pasa por $(0,3)$ y $(4,0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

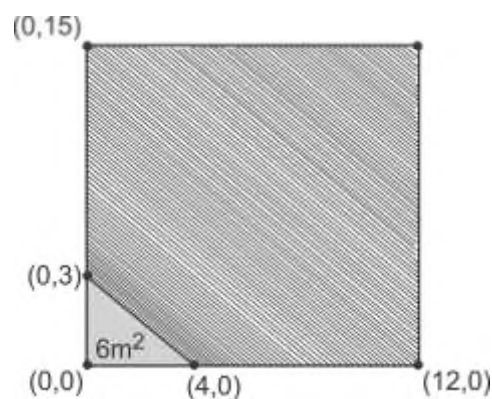
$$\rightarrow m = \frac{0 - 3}{4 - 0} = -\frac{3}{4}$$

$$\rightarrow y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 4)$$

$$\rightarrow 3x + 4y = 12$$

El sistema de inecuaciones será

$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 15 \end{cases}$$



Rpta.: A

6. Las restricciones mineras obligan a cierta empresa a extraer como máximo 4 toneladas de oro y 4 toneladas de plata al año. Además, el total de la extracción de estos dos minerales no puede ser superior a 6 toneladas. La región R es la solución de un sistema de inecuaciones que describe las posibles toneladas de oro y plata que dicha empresa puede extraer al año. Halle el área de dicha región.

A) $12 u^2$ B) $15 u^2$ C) $16 u^2$ D) $14 u^2$ E) $18 u^2$

Solución:

Sean

N° de toneladas de oro al año : x

N° de toneladas de plata al año: y

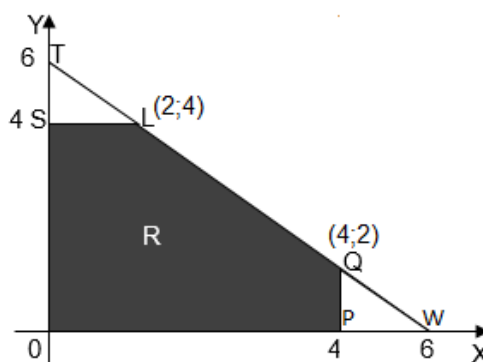
$$\begin{cases} x \leq 4 \\ y \leq 2 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Del gráfico, se tiene

$$\text{Área}_{\Delta TOW} = \underbrace{\text{Área}_{\Delta TSL}} + \text{Área}(R) + \underbrace{\text{Área}_{\Delta QPW}}$$

$$\rightarrow \frac{6 \times 6}{2} = \left(\frac{2 \times 2}{2} \right) + \text{Área}(R) + \frac{2 \times 2}{2}$$

$$\therefore \text{Área}(R) = 14 u^2$$



Rpta.: D

7. Halle la suma de las coordenadas del punto que maximiza la función $f(x,y) = x + 4y$

$$\text{sujeta a las restricciones} \begin{cases} x \leq 10 - y \\ 2y \leq 12 - x \\ x \geq y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

A) 6 B) 9 C) 8 D) 4 E) 7

Solución:

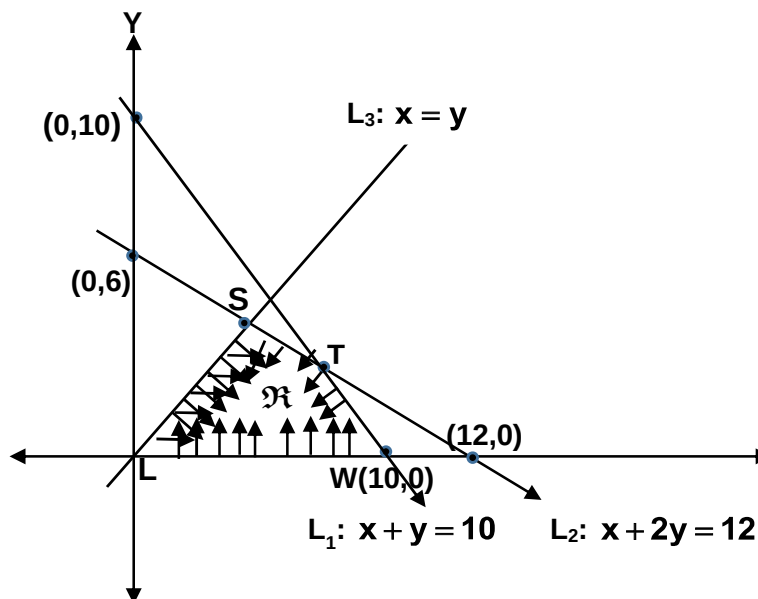
Función objetivo $f(x,y) = x + 4y$

$$\text{Restricciones} \begin{cases} x \leq 10 - y \\ 2y \leq 12 - x \\ x \geq y \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 12 \\ x \geq y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Vértices del polígono convexo

$L(0;0)$, $S(4;4)$, $T(8;2)$, $W(10,0)$

Vértices	$f(x,y) = x + 4y$
$L(0;0)$	0
$S(4;4)$	20 (Máximo)
$T(8;2)$	16
$W(10;0)$	10



El punto que maximiza la función objetivo es $(4;4)$

$\therefore$ La suma de las coordenadas del punto $(4;4)$ es $4 + 4 = 8$.

Rpta.: C

8. Un fabricante de juguetes prepara un programa de producción para dos juguetes: camiones y trompos, en base en la información concerniente a sus tiempos de producción dados en la tabla siguiente:

	Máquina A	Máquina B	Acabado
Camiones	2 h	3 h	5 h
Trompos	1 h	1 h	1 h

Las horas disponibles por semana son: para operación de la máquina A, 80 horas, para la máquina B, 50 horas y para acabado, 70 horas. Si las utilidades obtenidas por cada camión y cada trompo son de S/ 7 y S/ 2, respectivamente, ¿cuántos juguetes de cada tipo debe producir por semana el fabricante con el fin de maximizar la utilidad?

- A) 12 camiones y 6 trompos.
- B) 14 camiones y ningún trompo.
- C) 50 trompos y ningún camión.
- D) 10 camiones y 20 trompos.
- E) 20 camiones y 10 trompos.

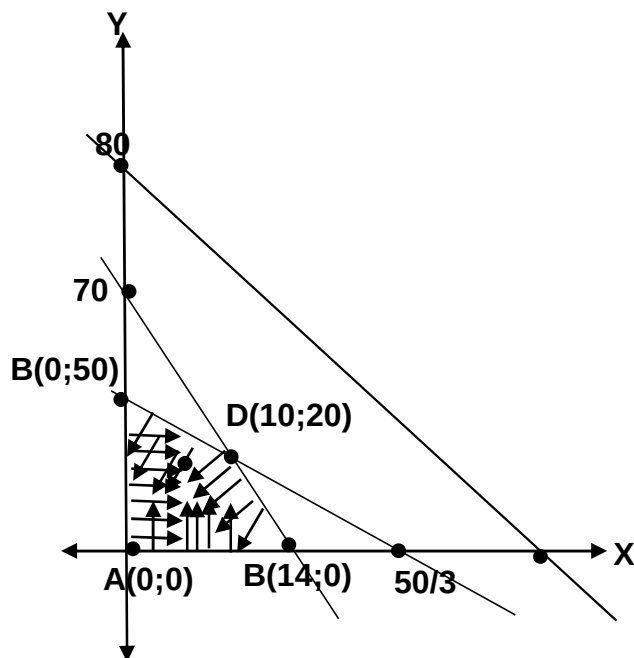
Solución:Sean x : N° de camiones y : N° de tromposFunción objetivo: $f(x,y) = 7x + 2y$

$$\text{Restricciones : } \begin{cases} 2x + y \leq 80 \\ 3x + y \leq 50 \\ 5x + y \leq 70 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices del polígono convexo

 $A(0;0)$, $B(0;50)$, $C(10;20)$, $D(14,0)$

Vértices	$f(x,y) = 7x + 2y$
$A(0;0)$	0
$B(0;50)$	100
$C(10;20)$	110 (Máximo)
$D(14;0)$	98



$\therefore$ El fabricante debe producir por semana 10 camiones y 20 trompos para una utilidad máxima de S/ 110.

Rpta. : D

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

16
semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

LOGARITMOS

ECUACIONES E INECUACIONES LOGARÍTMICAS ECUACIONES E INECUACIONES EXPONENCIALES

1. PROPOSICIÓN

Dados $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, existe un único $y \in \mathbb{R}$, tal que $b^y = x$.

2. DEFINICIÓN DE LOGARITMO

Dados $b > 0$, $b \neq 1$ y $x > 0$. El logaritmo de x en base b , denotado con $\log_b x$ es el número $y \in \mathbb{R}$, tal que $b^y = x$.

Simbólicamente $\log_b x = y \Leftrightarrow x = b^y$

Ejemplo 1. $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$

Observaciones.

2.1. Cuando la base del logaritmo es $b=10$, denotaremos $\log x = \log_{10} x$ (logaritmo decimal o vulgar).

2.2. Cuando la base del logaritmo es el número trascendente $e = 2,718281 \dots$, denotaremos por $\ln x = \log_e x$ (logaritmo natural o neperiano).

3. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Dados $\{a, x, y\} \subset \mathbb{R}^+$, $b > 0$, $b \neq 1$, se tiene:

1) $\log_b b = 1$.

2) $\log_b 1 = 0$.

3) $\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$

4) $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

5) $\log_b (x^n) = n(\log_b x)$, $\forall n \in \mathbb{R}$

6) $\log_{(b^n)} (x^m) = \left(\frac{m}{n}\right) \log_b x$, $\{m, n\} \subset \mathbb{R}$, $n \neq 0$

7) $(\log_a b) \cdot (\log_b a) = 1$, $a \neq 1$

8) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$, $a \neq 1$

9) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, $c > 0$

10) $a^x = e^{x \cdot \ln a}$.

11) $b^{\log_b x} = x$

12) $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$

Observación.

3.1 De la propiedad 7, se concluye: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

4. ECUACIÓN LOGARÍTMICA

Ejemplo 2: Resuelva $\log_{(3x)}(8-6x)=2$

Solución:

Existencia: $3x > 0 \wedge 3x \neq 1 \wedge 8-6x > 0$

$$\rightarrow x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{3} \wedge \frac{4}{3} > x \quad \dots\dots(1)$$

Resolución:

$$\log_{(3x)}(8-6x)=2$$

$$\leftrightarrow 8-6x=(3x)^2$$

$$\leftrightarrow 9x^2+6x-8=0$$

$$\leftrightarrow (3x-2)(3x+4)=0 \leftrightarrow x \in \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{4}{3} \right\} \dots\dots(2)$$

Intersectamos los conjuntos obtenidos en (1) y (2) para obtener el conjunto solución C.S:

Por tanto, $C.S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

Ejemplo 3: Resuelva $(\log_x 2) \left(\log_{\frac{x}{16}} 2 \right) = \log_{\frac{x}{64}} 2$

Solución:

Existencia: $x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 16 \wedge x \neq 64 \quad \dots\dots(1)$

Resolución: $(\log_x 2) \left(\log_{\frac{x}{16}} 2 \right) = \log_{\frac{x}{64}} 2$; aplicamos la propiedad de la observación 3.1:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 \left(\frac{x}{16} \right)} = \frac{1}{\log_2 \left(\frac{x}{64} \right)}$$

$$\frac{1}{\log_2 x} \left(\frac{1}{\log_2 x - \log_2 16} \right) = \frac{1}{\log_2 x - \log_2 64}$$

$$\frac{1}{\log_2 x (\log_2 x - 4)} = \frac{1}{(\log_2 x) - 6}$$

$$\rightarrow \log_2 x (\log_2 x - 4) = (\log_2 x) - 6$$

$$\rightarrow (\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x - \log_2 x + 6 = 0$$

$$\rightarrow (\log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + 6 = 0 \rightarrow (\log_2 x - 2)(\log_2 x - 3) = 0$$

Luego : $\log_2 x = 2 \quad \vee \quad \log_2 x = 3$

$$\rightarrow x = 2^2 = 4 \quad \vee \quad x = 2^3 = 8 \quad \dots (2)$$

Intersectamos los conjuntos obtenidos en (1) y (2) para obtener el conjunto solución C.S:

Por tanto, C.S = $\{4, 8\}$.

5. INECUACIONES LOGARÍTMICAS

Caso 1 $b > 1$: $\log_b x < \log_b y \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0 \wedge x < y)$

Caso 2 $0 < b < 1$: $\log_b x < \log_b y \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0 \wedge x > y)$

Ejemplo 4. Resuelva $\log_3(12x - 5) \leq 2$

Solución:

Existencia : $12x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{12} \dots (1)$

Resolución : $\log_3(12x - 5) \leq 2$

$$\Leftrightarrow \log_3(12x - 5) \leq 2 \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(12x - 5) \leq \log_3 3^2$$

$$\Leftrightarrow 12x - 5 \leq 9 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{6} \dots (2)$$

De (1) y (2): C.S. = $\left[\frac{5}{12}, \frac{7}{6} \right]$

Ejemplo 5. Resuelva $\log_{\left(\frac{1}{125}\right)}(x - 2) > \frac{1}{3}$

Solución:

$$\text{Existencia: } x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Resolución: } \log_{\left(\frac{1}{125}\right)}(x-2) > \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \log_{\left(\frac{1}{125}\right)}(x-2) > \log_{\left(\frac{1}{125}\right)}\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\Leftrightarrow x-2 < \left(\frac{1}{125}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow x-2 < \frac{1}{5} \Leftrightarrow x < \frac{11}{5} \dots (2) \end{aligned}$$

$$\text{De (1) y (2): C.S.} = \left\langle 2, \frac{11}{5} \right\rangle$$

6. ECUACIONES EXPONENCIALES

Proposición: Sea $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ $b \neq 1$: $b^x = b^y \Rightarrow x = y$

Ejemplo 6. Resuelva $2^{2x+2} + 2 = 9(2^x)$

Solución:

$$\text{Sea } a = 2^x > 0$$

$$2^{2x+2} + 2 = 9(2^x) \rightarrow (2^x)^2 4 + 2 = 9(2^x); \text{ hacemos } 2^x = a$$

reemplazando

$$4a^2 + 2 = 9a \rightarrow 4a^2 - 9a + 2 = 0 \rightarrow (4a - 1)(a - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \vee a = 2 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{4} \vee 2^x = 2 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{-2, 1\}$$

7. INECUACIONES EXPONENCIALES

Caso 1 Si $b > 1$: $b^{p(x)} > b^{q(x)} \Leftrightarrow p(x) > q(x)$.

Caso 2 Si $0 < b < 1$: $b^{p(x)} > b^{q(x)} \Leftrightarrow p(x) < q(x)$

Ejemplo 7. Resolver $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-1} \geq \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}}$

Solución:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \geq 1 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-1+x-2} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$\rightarrow 2x^2 + x - 3 \leq 0 \rightarrow (2x + 3)(x - 1) \leq 0$$

$$\therefore \text{C.S.} = \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$$

Álgebra

EJERCICIOS

1. Halle el producto de los valores de x que satisfacen la ecuación $\log_2(x^2) - 6\log_x(2) = 1$.

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 4 D) $2\sqrt{2}$

Solución:

$$\log_2(x^2) - 6\log_x(2) = 1, x > 0, x \neq 1$$

$$\rightarrow 2\log_2(x) - \frac{6}{\log_2(x)} = 1 \rightarrow 2(\log_2(x))^2 - \log_2(x) - 6 = 0$$

$$\rightarrow (2\log_2(x) + 3)(\log_2(x) - 2) = 0$$

$$\rightarrow \left(\log_2(x) = -\frac{3}{2} \vee \log_2(x) = 2 \right) \rightarrow \left(x = 2^{-\frac{3}{2}} \vee x = 2^2 \right)$$

$$\therefore \text{Producto de soluciones} = 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 2^2 = \sqrt{2}.$$

Rpta.: A

2. El dermatólogo le recomendo a Julia que use jabon de glicerina para el cuidado de su piel. Ya en la farmacia, ella compró n jabones de glicerina al precio unitario de m soles. Si $m = \log_3(81) \cdot \log_9(7) \cdot \log_7(81)$ y $n = \log_2(m^2)$, ¿cuánto pago Julia por la compra de los n jabones?

A) 24 soles B) 32 soles C) 40 soles D) 48 soles

Solución:

Se tiene

$$m = \log_3(81) \cdot \log_9(7) \cdot \log_7(81) \wedge n = \log_2(m^2)$$

$$\rightarrow m = \log_3(9^2) \cdot \log_9(7) \cdot \log_7(9^2) \wedge n = 2\log_2(m)$$

$$\rightarrow m = 2 \cdot 2\log_3(9) \cdot \log_9(7) \cdot \log_7(9)$$

$$\rightarrow m = 4\log_3(9) = 4(2) = 8 \wedge n = 2\log_2(m) = 2\log_2(8) = 6$$

$$\therefore \text{Pago por la compra de jabones} = mn = (8)(6) = 48 \text{ soles.}$$

Rpta.: D**3.** Si $x > y > 1$ tal que

$$\log_y(x-y) + \log_y\left(\frac{x^2-y^2}{x-y}\right) + \log_y\left(\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}\right) + \dots + \log_y\left(\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x^n-y^n}\right) = n+1, (n \in \mathbb{Z}^+);$$

$$\text{halle el valor de } M = \left(\log_{\left(\frac{x}{y}\right)} 2 \right)^{\log_{(n+1)}(2)}.$$

A) 4

B) 8

C) 2

D) 1

Solución:

$$\log_y(x-y) + \log_y\left(\frac{x^2-y^2}{x-y}\right) + \log_y\left(\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}\right) + \dots + \log_y\left(\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x^n-y^n}\right) = n+1$$

$$\rightarrow \log_y\left((x-y)\left(\frac{x^2-y^2}{x-y}\right)\left(\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}\right) \dots \left(\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x^n-y^n}\right)\right) = \log_y(x^{n+1}-y^{n+1}) = n+1$$

$$\rightarrow y^{n+1} = x^{n+1} - y^{n+1} \rightarrow x^{n+1} = 2y^{n+1} \rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = 2 \rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt[n+1]{2}$$

$$\therefore M = \left(\log_{\left(\sqrt[n+1]{2}\right)} 2 \right)^{\log_{(n+1)}(2)} = (n+1)^{\log_{(n+1)}(2)} = 2.$$

Rpta.: C

4. Según el psiquiatra Humberto Castillo Martell, asesor del Ministerio de Salud del Perú, se tiene la información que debido al estigma hacia las enfermedades mentales, muchas personas con ideas o intentos de quitarse la vida prefieren callar y no buscar atención a la salud mental por miedo al rechazo y discriminación. El psiquiatra afirma que para ayudar a salvar vidas se debe romper el tabú en la sociedad y perder el miedo a hablar de este problema de salud pública, porque el suicidio se puede prevenir. Anualmente, según la OMS, una persona a nivel mundial se quita la vida cada $\left[k_1^3 - 6k_1^2 \cdot k_2 \right]$ segundos, donde k_1, k_2 son la mayor y menor solución respectivamente de $a^{\log_4 \sqrt{a}} = a^{\log_4 a} - 2$. Halle cada qué tiempo una persona se quita la vida en el mundo según la OMS.

A) 40 segundos B) 20 segundos C) 30 segundos D) 50 segundos

Solución:

$$\begin{aligned}
 a^{\log_4 \sqrt{a}} &= a^{\log_4 a} - 2 \rightarrow a^{\frac{1}{2} \log_4 a} = a^{\log_4 a} - 2 \\
 &\rightarrow 0 = a^{\log_4 a} - \sqrt{a^{\log_4 a}} - 2 \\
 &\rightarrow \sqrt{a^{\log_4 a}} = 2 \quad \vee \quad \sqrt{a^{\log_4 a}} = -1 (\text{No}) \\
 \text{Luego } a^{\log_4 a} &= 4 \rightarrow \log_4 a^{\log_4 a} = \log_4 4 \rightarrow (\log_4 a)^2 = 1 \\
 &\rightarrow \log_4 a = 1 \quad \vee \quad \log_4 a = -1 \\
 &\rightarrow a = 4 = k_1 \quad \vee \quad a = \frac{1}{4} = k_2
 \end{aligned}$$

$\therefore$ Según la OMS cada año en el mundo, cada $\left[4^3 - 6(4)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right) \right] = 40$ segundos una persona se quita la vida.

Rpta.: A

5. Halle el producto de los valores de x que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^{\log_a(y)} + y^{\log_a(x)} = 2a \\ \log_a(x) + 12\log_a(y) = 8 \end{cases}; \{a, x, y\} \subset \mathbb{R}^+ - \{1\}..$$

A) a^6

B) a^8

C) a

D) a^2

Solución:

Se tiene

$$\begin{cases} x^{\log_a(y)} + y^{\log_a(x)} = 2a \dots (I) \\ \log_a(x) + 12\log_a(y) = 8 \dots (II) \end{cases}$$

$$\text{de (I): } x^{\log_a(y)} + x^{\log_a(y)} = 2a \rightarrow 2x^{\log_a(y)} = 2a \rightarrow x^{\log_a(y)} = a$$

$$\rightarrow \log_a(x^{\log_a(y)}) = \log_a(a) \rightarrow \log_a(y)\log_a(x) = 1 \rightarrow \log_a(y) = \frac{1}{\log_a(x)}$$

$$\text{en (II): } \log_a(x) + 12\log_a(y) = 8 \rightarrow \log_a(x) + \frac{12}{\log_a(x)} = 8$$

$$\rightarrow (\log_a(x))^2 - 8\log_a(x) + 12 = 0$$

$$\rightarrow (\log_a(x) - 2)(\log_a(x) - 6) = 0$$

$$\rightarrow \log_a(x) = 2 \vee \log_a(x) = 6 \rightarrow (x = a^2 \vee x = a^6)$$

$$\therefore \text{Producto de valores de } x = a^2 a^6 = a^8.$$

Rpta.: B

6. Halle la suma de los elementos enteros del conjunto solución en la inecuación,

$$\log(|x^2 - (|x| + 8)|) > \log x, \text{ si } x < 12.$$

A) 65

B) 62

C) 59

D) 74

Solución:

$$\log(|x^2 - (|x| + 8)|) > \log x, \text{ si } x < 12$$

$$\rightarrow 0 < x < 12$$

$$\rightarrow \log(|x^2 - x - 8|) > \log x$$

$$\rightarrow |x^2 - x - 8| > x$$

$$\rightarrow (x^2 - x - 8 > x \vee x^2 - x - 8 < -x)$$

$$\rightarrow ((x-4)(x+2) > 0) \vee ((x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}) < 0)$$

$$\rightarrow (x > 4 \vee -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}) \wedge 0 < x < 12$$

$$\rightarrow CS = \langle 0, 2\sqrt{2} \rangle \cup \langle 4, 12 \rangle$$

$$\therefore \text{Suma de valores enteros del CS} = 1 + 2 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 59.$$

Rpta.: C

7. En marzo de 1995 la inversión extranjera en el Perú y de acuerdo al país de origen fue la siguiente: España $(a + bc)\%$, Estados Unidos $(c - b)\%$, Reino Unido $(a - b)\%$ y otros países $(a + b + c)\%$. Si $[a^b, a^c]$ es el conjunto solución de $\log(x) < 2\sqrt{\log(x) - 2} + 10$. Halle la inversión que tuvo Perú en marzo de 1995 de España y Estados Unidos, respectivamente.

A) 46% y 16% B) 46% y 8% C) 30% y 16% D) 30% y 20%

Solución:

i) Condición

$$x > 0 \wedge \log(x) - 2 \geq 0 \rightarrow \log(x) \geq 2 \rightarrow x \geq (10)^2$$

$$\rightarrow x \in [(10)^2, +\infty)$$

ii) Resolviendo

$$\log(x) < 2\sqrt{\log(x) - 2} + 10$$

$$\rightarrow \log(x) - 2 - 2\sqrt{\log(x) - 2} - 8 < 0$$

$$\rightarrow (\sqrt{\log(x) - 2})^2 - 2\sqrt{\log(x) - 2} - 8 < 0$$

$$\rightarrow (\sqrt{\log(x) - 2} - 4)(\sqrt{\log(x) - 2} + 2) < 0$$

$$\rightarrow \sqrt{\log(x) - 2} - 4 < 0 \rightarrow \sqrt{\log(x) - 2} < 4, x > 0$$

$$\rightarrow \log(x) < 18 \rightarrow x \in [0, (10)^{18}]$$

$$\text{De i) } \wedge \text{ ii) } \rightarrow \text{CS} = [(10)^2, (10)^{18}] = [a^b, a^c]$$

$$\rightarrow a = 10, b = 2, c = 18$$

$\therefore$ La inversión extranjera en el Perú es:

$$\text{España: } (a + bc)\% = (10 + (2)(18))\% = 46\%$$

$$\text{Estados Unidos: } (c - b)\% = (18 - 2)\% = 16\%$$

Rpta.: A

8. Halle el conjunto solución de $\log((5)^x 36) - \log 6 \geq \log(2^x + 1) + (15)^{\log_{15}(x)}$.

A) $\langle 0, 2]$ B) $[1, 2]$ C) $\langle 0, 1]$ D) $\langle 1, 2]$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\log((5)^x 36) - \log 6 \geq \log(2^x + 1) + (15)^{\log_{15}(x)}, x > 0 \\
&\rightarrow \log\left(\frac{(5)^x 36}{6}\right) \geq \log(2^x + 1) + x \\
&\rightarrow \log((5)^x 6) \geq \log(2^x + 1) + \log(10)^x \\
&\rightarrow \log((5)^x 6) \geq \log((2^x + 1)(10)^x) \\
&\rightarrow (5)^x 6 \geq (2^x + 1)(10)^x \\
&\rightarrow (5)^x 6 \geq (2^x + 1)(5)^x (2)^x \\
&\rightarrow 6 \geq (2^x + 1)(2)^x \rightarrow (2^x)^2 + (2^x) - 6 \leq 0 \\
&\rightarrow (2^x + 3)(2^x - 2) \leq 0 \rightarrow 2^x - 2 \leq 0 \rightarrow 2^x \leq 2^1, x > 0 \\
&\therefore \text{CS} = \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

Rpta.: C**EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. Una familia decide ir al cine, cuya entrada general unitaria es de 15 soles. Si la solución de la ecuación $\log_x(10)\log(x^2 - 12) = 1$, representa el número de integrantes de una familia que decide ir al cine, ¿cuál es el pago total que hace la familia por concepto de entradas?

A) 48 soles B) 36 soles C) 24 soles D) 60 soles

Solución:

$$\begin{aligned}
&\log_x(10)\log(x^2 - 12) = 1 \\
&\rightarrow x > 0, x \neq 1, x^2 - 12 > 0 \rightarrow x > \sqrt{12} \\
&\text{luego } \log_x(10)\log(x^2 - 12) = 1 \rightarrow \log(x^2 - 12) = \log(x) \\
&\rightarrow x^2 - 12 = x \rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0 \rightarrow x = 4 \\
&\rightarrow \text{Los integrantes de una familia son 4} \\
&\therefore \text{Se paga por las entradas de la familia} = (4)(15) = 60 \text{ soles}
\end{aligned}$$

Rpta.: D

2. José matricula a su hijo en un colegio particular pagando al contado $(a - 2)$ meses de pensión. Si $7m$ representa el pago mensual en cientos de soles por la pensión, donde $m = \log\left(\frac{a^2 - 44}{a - 2}\right)$ y además $2^8 + 2^{11} + 2^a = (2^b + 2^c)^2, \{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}^+, (b > c)$; ¿cuánto pagó José por el total de la pensión?

A) 4000 soles B) 7000 soles C) 5000 soles D) 6000 soles

Solución:

$$2^8 + 2^{11} + 2^a = (2^b + 2^c)^2, \{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}^+, (b > c)$$

$$\rightarrow 2^8 + 2^{11} + 2^a = 2^{2b} + 2^{1+b+c} + 2^{2c}$$

$$\rightarrow 1+b+c=11, 2c=8, 2b=a$$

$$\rightarrow c=4, b+c=10 \rightarrow b=6 \rightarrow a=2(6)=12$$

$$\rightarrow m = \log\left(\frac{a^2 - 44}{a - 2}\right) = \log\left(\frac{(12)^2 - 44}{12 - 2}\right) = 1 \rightarrow 7m = 7$$

$\rightarrow$ Pago mensual de pensión = 700 soles, por 10 meses

$\therefore$ Pago Total = $(700)(10) = 7000$ soles.

Rpta.: B

3. En un partido de baloncesto, el equipo "Los Halcones" anotó $8(m+n)$ puntos y el equipo "Los Gavilanes" anotó $\frac{m}{n}$ puntos, donde m y n son las soluciones de la ecuación $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 1024$. Si además se cumple que $m > n$, ¿cuál fue la diferencia positiva de los puntajes obtenidos por cada equipo?

A) 2

B) 1

C) 3

D) 4

Solución:

Hacemos $\log_2 x = a \rightarrow x = 2^a$, reemplazando en la ecuación

$$2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 1024$$

$$\rightarrow 2^{a^2} + (2^a)^a = 2^{10} \rightarrow 2^{a^2+1} = 2^{10} \rightarrow a^2 = 9$$

$$\rightarrow a = 3 \vee a = -3 \rightarrow x = 8 \vee x = \frac{1}{8}$$

Es decir $m = 8$ y $n = \frac{1}{8}$, entonces "Los Halcones" anotaron $8(m+n) = 65$ puntos y

"Los Gavilanes" anotaron $\frac{m}{n} = 64$ puntos.

$\therefore$ Diferencia positiva de puntos = $65 - 64 = 1$.

Rpta.: B

4. Halle el mayor valor de $(2x+y)$ en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log(x) + \log(y) = 2 \end{cases}$$

A) 30

B) 35

C) 40

D) 45

Solución:

Se tiene $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log(x) + \log(y) = 2 \end{cases} \rightarrow x > 0, y > 0$

$\rightarrow \log(x) + \log(y) = 2 \rightarrow \log(xy) = 2 \rightarrow xy = 100$

$\rightarrow x^2 + y^2 = 425 \rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 425 + 200 = 625$

$\rightarrow (x + y)^2 = 625 \rightarrow x + y = 25, xy = 100$

$\rightarrow (x = 20, y = 5) \vee (x = 5, y = 20)$

$\therefore$ Mayor valor de $(2x + y) = 2(20) + 5 = 45$.

Rpta.: D

5. Halle el producto de los valores de x que satisfacen la ecuación

$$\frac{\ln(x)}{\ln(0,25(x))} + \frac{\ln(x)}{\ln(2x)} + \log_{((0,5)x)}(x)^{-2,1} = 0.$$

- A) $\frac{1}{512}$ B) $\frac{1}{256}$ C) $\frac{1}{128}$ D) $\frac{1}{64}$

Solución:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(0,25(x))} + \frac{\ln(x)}{\ln(2x)} + \log_{((0,5)x)}(x)^{-2,1} = 0, x > 0, (0,5)x \neq 1$$

$$\rightarrow \log_{(0,25(x))}(x) + \log_{(2x)}(x) + \log_{((0,5)x)}(x)^{-2,1} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\log_2(x)}{\log_2(0,25(x))} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(2x)} + \frac{\log_2(x)^{-2,1}}{\log_2(0,5(x))} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\log_2(x)}{\log_2(x) - 2} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(x) + 1} - (2,1) \frac{\log_2(x)}{\log_2(x) - 1} = 0$$

cambio de variable $\log_2(x) = y$

$$\rightarrow y \left(\frac{1}{y-2} + \frac{1}{y+1} - (2,1) \frac{1}{y-1} \right) = 0$$

$$\rightarrow y \left(\frac{10}{y-2} + \frac{10}{y+1} - \frac{21}{y-1} \right) = 0$$

$$\rightarrow y(-y^2 - 9y + 52) = 0$$

$$\rightarrow y(y+13)(y-4) = 0$$

$$\rightarrow y = \log_2(x) = 0, y = \log_2(x) = -13, y = \log_2(x) = 4$$

$$\rightarrow x = 2^0 = 1, x = 2^{-13}, x = 2^4$$

$$\therefore \text{Producto de soluciones} = 1(2^{-13})(2^4) = 2^{-9} = \frac{1}{512}.$$

Rpta.: A

6. Halle la suma de los cuatro menores valores enteros que satisfacen la inecuación $\log_{(0,5)}(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) < \log_{(0,5)}(6x + 12)$.

A) 16 B) 20 C) 24 D) 28

Solución:

$$\log_{(0,5)}(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) < \log_{(0,5)}(6x + 12)$$

$$\rightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 > 0, 6x + 12 > 0, x^3 - 3x^2 - 4x + 12 > 6x + 12$$

$$\rightarrow (x-2)(x+2)(x-3) > 0, x > -2, x(x-5)(x+2) > 0$$

$$\rightarrow x \in \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 5, +\infty \rangle \rightarrow CS = \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 5, +\infty \rangle$$

$$\therefore \text{Suma de los cuatro menores enteros del CS} = -1 + 6 + 7 + 8 = 20.$$

Rpta.: B

7. Halle el conjunto solución de la siguiente inecuación $\log_{(0,5)}(\log_{11}(x^2 - 5)) > 0$.

A) $\langle -4, -\sqrt{6} \rangle \cup \langle \sqrt{6}, 4 \rangle$

B) $\langle -5, -\sqrt{6} \rangle \cup \langle \sqrt{6}, 5 \rangle$

C) $\langle \sqrt{6}, 5 \rangle$

D) $\langle -5, -\sqrt{6} \rangle$

Solución:

$$\log_{(0,5)}(\log_{11}(x^2 - 5)) > 0$$

$$\rightarrow x^2 - 5 > 0 \rightarrow x \in \langle -\infty, -\sqrt{5} \rangle \cup \langle \sqrt{5}, +\infty \rangle \dots (I)$$

$$\rightarrow \log_{11}(x^2 - 5) > 0 = \log_{11}(1) \rightarrow x^2 - 5 > 1 \rightarrow x^2 > 6$$

$$\rightarrow x \in \langle -\infty, -\sqrt{6} \rangle \cup \langle \sqrt{6}, +\infty \rangle \dots (II)$$

Resolviendo la inecuación inicial

$$\rightarrow \log_{(0,5)}(\log_{11}(x^2 - 5)) > 0 = \log_{(0,5)}(1)$$

$$\rightarrow \log_{11}(x^2 - 5) < 1 = \log_{11}(11) \rightarrow x^2 - 5 < 11$$

$$\rightarrow x^2 < 16 \rightarrow x \in \langle -4, 4 \rangle \dots (III)$$

$$\therefore CS = (I) \cap (II) \cap (III) = \langle -4, -\sqrt{6} \rangle \cup \langle \sqrt{6}, 4 \rangle$$

Rpta.: A

8. Halle la suma de los elementos enteros impares del conjunto solución de $\log_3 |2x - 3| \leq 2$.

A) 7

B) 8

C) 5

D) 6

Solución:

$$\log_3 |2x-3| \leq 2 \Leftrightarrow 2x-3 \neq 0 \wedge 0 < |2x-3| \leq 3^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2} \wedge |2x-3| \leq 9$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2} \wedge -9 \leq 2x-3 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2} \wedge -6 \leq 2x \leq 12$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2} \wedge -3 \leq x \leq 6$$

$$\text{C.S.} = [-3, 6] - \left\{ \frac{3}{2} \right\} \rightarrow \text{Soluciones enteras: } -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$\therefore$ La suma de las soluciones enteras impares es $-3-1+1+3+5=5$.

Rpta.: C

Álgebra

EJERCICIOS

1. A un paciente, internado en un hospital, se le suministró cada día p gramos de Azitromicina y $\frac{10^p}{4}$ gramos de Fluconazol. En la siguiente tabla se muestran dichas cantidades (en gramos) de ambos medicamentos, que recibió el paciente cada uno de los tres días en que estuvo hospitalizado.

	Día 1	Día 2	Día 3
Azitromicina (p gramos)	0,30	0,47	m
Fluconazol (gramos)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

¿Cuántos gramos de Azitromicina recibió dicho paciente el último día en que estuvo hospitalizado?

- A) 0,97 g B) 0,77 g C) 0,87 g D) 0,70 g

Solución:

Dosis de Fluconazol :

$$\text{Primer día : } \frac{10^p}{4} = \frac{10^{0,30}}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow 10^{0,30} = 2 \rightarrow \log 2 = 0,30$$

$$\text{Segundo día : } \frac{10^p}{4} = \frac{10^{0,47}}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow 10^{0,47} = 3 \rightarrow \log 3 = 0,47$$

$$\text{Tercer día : } \frac{10^m}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow 10^m = 6$$

$$\text{De } 10^m = 6 \rightarrow \log 10^m = \log 6$$

$$\rightarrow m \log 10 = \log 6$$

$$\therefore m = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0,77.$$

Rpta.: B

2. En una fábrica, inicialmente un total de 10 empleados han oído un cierto rumor, al cabo de una hora, cada uno de los 10 empleados han contado el mismo rumor a dos empleados más; y así sucesivamente, al cabo de cada siguiente hora, cada uno del total de empleados que han escuchado el rumor se lo cuentan a dos empleados más. Si el total de empleados en la fábrica es de 200, ¿dentro de cuantas horas (aproximadamente) el 60% del total de empleados que tiene la fábrica conocerá el rumor?

- A) $(1 + \log_3 4)$ horas B) $\log_3 2$ horas
C) $(1 + \log_4 3)$ horas D) $\log_3 4$ horas

Solución:

Sea $M(t)$ el número de empleados que conoce el rumor al cabo de t horas :
Inicialmente $M(0) = 10$

Al cabo de "t" horas	$M(t)$
1 hora	$10 + 2(10) = 30 = 3^1(10)$
2 horas	$30 + 2(30) = 90 = 3^2(10)$
$\vdots$	$\vdots$
t horas	$3^t(10)$

De la condición del problema : $3^t(10) = 60\%200 = 120$

Luego : $3^t = 12 \rightarrow t = \log_3 12 = \log_3 4 + \log_3 3 = 1 + \log_3 4$.

Rpta.: A

3. **Siembra de árboles:** Los habitantes de un pequeño poblado al interior del país plantan árboles a fin de aminorar los efectos del cambio climático. Para ello, el total de habitantes se agruparon exactamente en grupos de x habitantes por grupo, y cada grupo sembró $(6m)$ árboles, donde m es tal que,

$$m = \log_2 x + \log_4 x + \log_{64} x + \log_{4096} x + \log_{220} x + \log_{230} x.$$

Si cada grupo sembró 55 árboles y en total en el poblado sembraron 550 árboles, ¿cuántos habitantes hay en el pequeño poblado?

- A) 160 B) 200 C) 240 D) 320

Solución:

$$\begin{aligned}
 m &= \log_2 x + \log_4 x + \log_{64} x + \log_{4096} x + \log_{220} x + \log_{230} x \\
 \rightarrow m &= \log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^6} x + \log_{2^{12}} x + \log_{2^{20}} x + \log_{2^{30}} x \\
 &= \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{6} \log_2 x + \frac{1}{12} \log_2 x + \frac{1}{20} \log_2 x + \frac{1}{30} \log_2 x \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \right) \log_2 x \\
 &= \left(1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) \log_2 x \\
 \rightarrow m &= \left(1 + 1 - \frac{1}{6} \right) \log_2 x = \frac{11}{6} \log_2 x
 \end{aligned}$$

De la condición del problema: $6m = 11 \log_2 x = 55 \rightarrow \log_2 x = 5 \rightarrow x = 32$

Luego,

Nro. Hbts Nro. de árb.

32 $\rightarrow$ 55

z $\rightarrow$ 550

$\therefore$ El total de habitantes es $z = \frac{550 \times 32}{55} = 320$.

Rpta.: D

4. **Paseo en Bicicleta:** Los ciclistas Jaime y Enrique inician un paseo en bicicleta, partiendo ambos de un mismo punto M y tienen como meta llegar a un punto P. Jaime llegó primero a dicha meta, y en ese momento Enrique había recorrido una longitud de $(\log_5(x-5))$ millas y aún le faltaba $(-2 + \log_3 25)$ millas para llegar al punto P. Si el recorrido lo realizaron sin inconveniente alguno y, a lo largo de una carretera recta, cuya longitud es de $(\log_3(x-5))$ millas, halle esta longitud.

A) $\log_3 25$ millas B) $\log_3 20$ millas C) $\log_3 30$ millas D) $\log_3 15$ millas

Solución:

Recorrido de Jaime : millas, donde $x > 5$

Recorrido de Enrique: y le faltaba: millas

$$\text{Luego: } -(\log_5(x-5)) = (-2 + \log_3 25)$$

$$\therefore \frac{\log_5(x-5)}{\log_5 3} - (\log_5(x-5)) = (-2 + \log_3 25)$$

$$\rightarrow \log_5(x-5) \left(\frac{1}{\log_5 3} - 1 \right) = -2 + \log_3 25 = -2 + 2\log_3 5 = 2(-1 + \log_3 5)$$

$$\rightarrow \log_5(x-5)(-1 + \log_3 5) = 2(-1 + \log_3 5)$$

$$\rightarrow \log_5(x-5) = 2$$

$$\rightarrow 5^2 = x-5 \rightarrow x = 30$$

La longitud de la carretera es de $(\log_3(x-5)) = \log_3 25$ millas.

Rpta.: A

5. Si $x_0 = e^{me}$ es la solución que se obtiene al resolver la ecuación,

$$\log_x \left(\frac{-e + \ln x}{e + \ln x} \right)^{\log x} = \ln \left(\frac{1}{e} \right), \text{ halle el valor de } 9m.$$

A) 10

B) 11

C) 12

D) 14

Solución:

$$\log_x \left(\frac{-e + \ln x}{e + \ln x} \right)^{\log x} = \ln \left(\frac{1}{e} \right), \text{ condición: } x > 0$$

$$\rightarrow (\log x) \log_x \left(\frac{-e + \ln x}{e + \ln x} \right) = \ln \left(\frac{1}{e} \right) = -1$$

$$\rightarrow \log \left(\frac{-e + \ln x}{e + \ln x} \right) = -1$$

$$\rightarrow \left(\frac{-e + \ln x}{e + \ln x} \right) = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow \ln x = \frac{11e}{9}$$

$$\rightarrow x = e^{\frac{11e}{9}} = e^{me}, \text{ luego } m = \frac{11}{9}$$

$$\therefore 9m = 11.$$

Rpta.: B

6. La distancia (en millas) recorrida por un tren, medida desde su punto de partida, cuando está viajando a lo largo de una vía recta, está dada por el menor valor de x que verifica la inecuación,

$$\log_{x+1} \sqrt{2x+10} \leq 1,$$

halle la distancia recorrida por dicho tren.

- A) 5 millas B) 2 millas C) 3 millas D) 4 millas

Solución:

$$\log_{x+1} \sqrt{2x+10} \leq 1,$$

i) $2x+10 > 0$; $x+1 > 0$; $x+1 \neq 1$; $x > 0$
por representar distancia

$$\rightarrow x > -5 ; x > -1 ; x > 0 \rightarrow U = \langle 0, +\infty \rangle$$

ii) En la inecuación: $\log_{x+1} \sqrt{2x+10} \leq \log_{x+1} (x+1)$, la base $b = x+1 > 1$

$$\therefore \sqrt{2x+10} \leq x+1$$

$$\rightarrow 2x+10 \leq (x+1)^2$$

$$\rightarrow 2x+10 \leq x^2 + 2x + 1$$

$$\rightarrow 0 \leq x^2 - 9$$

$$\rightarrow x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup [3, +\infty) = J$$

De i) y ii): $x \in U \cap J = [3, +\infty)$, luego el menor valor de x es 3.

La distancia recorrida por el tren es de 3 millas.

Rpta.: C

7. **Concentración de medicamento en la sangre:** Cuando un determinado antibiótico es administrado a un adulto, la cantidad de la misma (en miligramos), que queda en el torrente sanguíneo del paciente después de t horas, aproximadamente, está dada por $5(3^{-t}) - 4(3^{-3t})$. Si después de t_1 horas de haber sido administrado el medicamento en el paciente, la cantidad que aún le queda en el torrente sanguíneo es $\left(3^{\frac{t}{1}}\right)$ miligramos, ¿cuántos miligramos de dicho medicamento hay aún en el torrente sanguíneo del paciente al cabo de las t_1 horas?

- A) 4 mg B) 3 mg C) 5 mg D) 2 mg

Solución:

$$5 \begin{pmatrix} -t \\ 3^t - 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -3t \\ 3^{3t} - 1 \end{pmatrix} = 3^t$$

$$\rightarrow 3^t - 5 \begin{pmatrix} -t \\ 3^t - 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -3t \\ 3^{3t} - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow 3^{4t} - 5 \begin{pmatrix} 2t \\ 3^{2t} - 1 \end{pmatrix} + 4 = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2t \\ 3^{2t} - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 3^{2t} - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow 3^{2t} = 4 \quad \vee \quad 3^{2t} = 1$$

$$\rightarrow 2t_1 = \log_3 4 \quad \vee \quad t_1 = 0$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{\log_3 4}{2} = \log_3 2 \rightarrow 3^{t_1} = 3^{\log_3 2} = 2$$

Al cabo de las t_1 horas, aún hay 2 mg de dicho medicamento.

Rpta.: D

8. Una compañía manufacturera elabora cajas de aluminio, en forma de un paralelepípedo rectangular, cuyas dimensiones (en metros) de cada caja son (e^{2x}) , $(2 - e^x)$ y 1, respectivamente. ¿En qué intervalo debe estar el valor de x , para que el volumen de cada caja sea de por lo menos $(2 - e^x)$ metros cúbicos?

- A) $[0, \ln 2]$ B) $[\ln 3, e]$ C) $[0, \ln 2)$ D) $[\ln 2, 1]$

Solución:

Volumen de cada caja: $(2 - e^x)(e^{2x})(1)$, donde $2 - e^x > 0$,

$$\rightarrow (2 - e^x)(e^{2x})(1) \geq (2 - e^x)$$

$$\rightarrow (2 - e^x)(e^{2x} - 1) \geq 0$$

$$\rightarrow (e^x - 2)(e^{2x} - 1) \leq 0$$

$$\rightarrow (e^x - 2)(e^x - 1)(e^x + 1) \leq 0$$

$$\rightarrow (e^x - 2)(e^x - 1) \leq 0$$

Luego, por el método de puntos críticos: $1 \leq e^x \leq 2$, pero $2 - e^x > 0$, es decir $2 \neq e^x$, por tanto: $1 \leq e^x < 2$

$$\rightarrow \ln 1 \leq \ln e^x < \ln 2 \rightarrow \ln 1 \leq x < \ln 2$$

$$\therefore x \in [0, \ln 2)$$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Crecimiento Logarítmico:** Cierta tipo de bacterias tiene un crecimiento logarítmico dado por $N(t) = \alpha \log_2(t + 2)$, donde α es una constante positiva, t es el tiempo (en días) que transcurre desde el momento en que se inicia el estudio y $N(t)$ representa el número de bacterias presentes al cabo de t días. ¿A los cuántos días se habrá quintuplicado el número de bacterias con respecto a lo que había al inicio del estudio?

A) 25 días B) 32 días C) 34 días D) 30 días

Solución:

Inicialmente : $t = 0$ y $N(0) = \alpha \log_2(2) = \alpha$

Luego, $N(t) = N_0 \log_2(t + 2)$, donde $N(0) = N_0$

Sea t_0 el tiempo que transcurre hasta que el número de bacterias se quintuplique, entonces:

$$N(t_0) = 5N_0$$

$$N(t_0) = N_0 \log_2(t + 2) = 5N_0$$

$$\rightarrow t + 2 = 2^5 = 32$$

$$\therefore t = 30.$$

Rpta.: D

2. En $\mathbb{R}^+$, se define el operador “*” como, $a * b = \log_2 a + \log_2 b$. Si se cumple que,

$$8 * \frac{2}{25} = [2 - \log_2(m + 3)](40 * 10^{-1}),$$

halle el valor de m .

A) 4 B) 2 C) 3 D) 6

Solución:

$$\text{De } 8 * \frac{2}{25} = [2 - \log_2(m + 3)](40 * 10^{-1})$$

$$\rightarrow \log_2 8 + \log_2 \frac{2}{25} = [2 - \log_2(m + 3)](\log_2 40 + \log_2 10^{-1})$$

$$\rightarrow 3 + (\log_2 2 - \log_2 25) = [2 - \log_2(m + 3)](\log_2 4 \times 10 - \log_2 10)$$

$$\rightarrow 3 + (1 - \log_2 5^2) = [2 - \log_2(m + 3)] \left(\underbrace{\log_2 4 + \log_2 10}_{2} - \log_2 10 \right)$$

$$\rightarrow 4 - 2\log_2 5 = 2[2 - \log_2(m + 3)]$$

$$\rightarrow 2(2 - \log_2 5) = 2[2 - \log_2(m + 3)]$$

$$\therefore m = 2.$$

Rpta.: B

3. **Tsunami:** El 11 de marzo del 2011 un violento Tsunami embistió a la costa este de Japón y causó daños en la Estación de Energía Nuclear de Fukushima Daiichi, de donde se liberaron grandes cantidades de material radioactivo en el ambiente.

Desde entonces, se han utilizado mas de un millón de toneladas de agua para enfriar los reactores derretidos, en consecuencia, cada día en Fukushima se bombean 10M toneladas de agua radioactiva que proviene de los reactores dañados. Siendo

$$M = \frac{p}{32} + 4\log_{0,5} p, \text{ donde se verifica que } \log_q p + 11\log_p q = 12 \text{ y}$$

$$\log_{\sqrt[3]{2}} q - 7\log_q \sqrt[3]{2} = 6, \text{ tal que } p \neq q; \log_{\sqrt[3]{2}} q > 0.$$

¿Cuántas toneladas de agua radioactiva, en promedio, se bombea cada día en Fukushima?

- A) 220 B) 200 C) 180 D) 210

Solución:

i) Sea $\log_q p = a$, reemplazando en

$$\log_q p + 11\log_p q = 12$$

$$\rightarrow a + 11 \cdot \frac{1}{a} = 12 \rightarrow a^2 - 12a + 11 = 0 \rightarrow a - 11 \quad a - 1 = 0$$

$$\rightarrow a = 1 \quad \vee \quad a = 11$$

$$\rightarrow \log_q p = 1 \quad \vee \quad \log_q p = 11$$

$$\rightarrow p = q \quad \vee \quad p = q^{11}$$

(no cumple)

ii) Sea $\log_{\sqrt[3]{2}} q = b > 0$, reemplazando en

$$\log_{\sqrt[3]{2}} q - 7\log_q \sqrt[3]{2} = 6$$

$$\rightarrow b - 7 \cdot \frac{1}{b} = 6 \rightarrow b^2 - 6b - 7 = 0 \rightarrow b - 7 \quad b + 1$$

$$\rightarrow b = 7 \quad \vee \quad b = -1$$

$$\text{(no cumple } \log_{\sqrt[3]{2}} q > 0)$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt[3]{2}} q = 7 \rightarrow q = 2 \wedge p = 2^{11}$$

$$\text{Luego } M = \frac{2^{11}}{32} + 4\log_{0,5} 2^{11} = 20.$$

∴ La cantidad de toneladas de agua en promedio que se bombea cada día en Fukushima es de $20(10) = 200$ toneladas.

Rpta.: B

4. Dulce va a comprar una casa en San Isidro, para ello necesita un préstamo en el banco de x_0 millones de soles, para completar el pago de la casa. Si x_0 es una solución de la ecuación, $(\log_x x^2)(\log_x 16x)(\log_5 3x)(\log_9 25) = 4(\log_9 9x^2)$; donde $x_0 \neq \frac{1}{3}$; además Dulce ya pagó una parte del precio de costo de la casa, siendo que dicho pago efectuado está representado por la mitad del valor del préstamo. Halle el valor (en millones de soles) de la casa.

A) 10 B) 20 C) 34 D) 24

Solución:

$$(\log_x x^2)(\log_x 16x)(\log_5 3x)(\log_9 25) = 4(\log_9 9x^2); \text{ Condición : } x > 0, x \neq 1$$

$$\rightarrow (2\log_x x)(\log_x 16x)(\log_5 3x)(\log_{3^2} 5^2) = 4(\log_{3^2} (3x)^2)$$

$$\rightarrow 2(\log_x 16 + \log_x x)(\log_5 3x)(\log_3 5) = 4(\log_3 (3x))$$

$$\rightarrow 2(\log_x 16 + 1)(\log_3 3x) = 4(\log_3 (3x))$$

$$\rightarrow 2(\log_x 16 + 1)(\log_3 3x) - 4(\log_3 (3x)) = 0$$

$$\rightarrow (\log_3 (3x))(2(\log_x 16 + 1) - 4) = 0$$

$$\rightarrow \log_3 (3x) = 0 \vee (\log_x 16 + 1) = 2$$

$$\rightarrow \underbrace{3x = 3^0 = 1} \vee \log_x 16 = 1$$

$$\text{No cumple } x_0 \neq \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow x = 16$$

Luego, el valor del préstamo fue de 16 millones de soles.

Pago de una parte del precio de costo de la casa: 8 millones de soles 8 (la mitad del valor del préstamo)

$\therefore$ El precio de la casa es: 24 millones de soles.

Rpta.: D

5. **Desintegración Radiactiva:** Los elementos radiactivos tienden a disminuir hasta agotarse completamente a medida que transcurre el tiempo. Se ha observado que cierto tipo de sustancia se desintegra en forma tal que la cantidad de masa (en gramos) restantes después de t días está representado por $N(t) = (6m)e^{-0.08t}$, donde m es el valor de x que verifica la ecuación, $\frac{(\log_a x)(\log_b x)}{\log_a x + \log_b x} = (\log_{ab} 6)$. ¿Cuánto tiempo, aproximadamente, demorará en reducirse la masa inicial a su tercera parte?

A) $\frac{25}{2} \ln 3$ B) $\ln 3$ C) $8 \ln 3$ D) $3 \ln 8$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{i) } (\log_{ab} 6) &= \frac{(\log_a x)(\log_b x)}{\log_a x + \log_b x} = \frac{1}{\frac{\log_a x}{(\log_a x)(\log_b x)} + \frac{\log_b x}{(\log_a x)(\log_b x)}} \\
 \rightarrow \log_{ab} 6 &= \frac{1}{\frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_a x}} = \frac{1}{\log_x b + \log_x a} = \frac{1}{\log_x ab} = \log_{ab} x \\
 \rightarrow \log_{ab} 6 &= \log_{ab} x \rightarrow m = x = 6.
 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } N(t) = 36e^{-0.08t}$$

Inicialmente : $t = 0$ y $N(0) = 36e^{-0.08(0)} = 36$ (masa inicial de la sustancia)

Sea t_0 el tiempo que transcurre hasta que la masa se reduzca a su tercera parte, es decir que se reduzca a 12 gramos

$$\begin{aligned}
 \rightarrow 12 &= N(t_0) = 36e^{-0.08(t_0)} \\
 \rightarrow \frac{1}{3} &= e^{-0.08(t_0)} \rightarrow \ln \frac{1}{3} = \ln e^{-0.08(t_0)} = -0.08(t_0) \\
 \therefore t_0 &= -\frac{1}{0.08} \ln \frac{1}{3} = \frac{25}{2} \ln 3.
 \end{aligned}$$

Rpta.: A

6. **Temperatura Ideal** : En el agua, las condiciones térmicas para llevar a cabo una vida óptima depende de cada especie de pez. Para algunas especies las temperaturas muy altas o muy bajas pueden conducir a una mortalidad elevada. En un estudio se observó que en un determinado momento la población de peces en una parte del océano fue de y (en miles de peces) cuando la temperatura $T = \log(x+1) + \log(x-1)$ (en grados Celsius) fue positiva. Si el valor de y es el menor entero positivo tal que verifica que, $(\log_a y)^a + 3\log_a y \geq a^{2a}$, siendo a el menor valor entero de x para el cual la temperatura es positiva. ¿Cuántos peces observaron en dicho estudio?

A) 5 mil

B) 4 mil

C) 3 mil

D) 6 mil

Solución:

$$\text{i) } T = \log(x+1) + \log(x-1) > 0, \text{ condición: } x+1 > 0 \wedge x-1 > 0$$

$$\rightarrow \log(x^2 - 1) > 0$$

$$\rightarrow \log(x^2 - 1) > \log 1 \rightarrow x^2 - 1 > 1 \rightarrow x^2 > 2$$

$$\rightarrow x < \sqrt{2} \vee x < -\sqrt{2}$$

$$\text{Interceptando con la condición: } (x > \sqrt{2} \vee x < -\sqrt{2}) \wedge (x > -1) \wedge (x > 1)$$

Entonces $x > \sqrt{2}$, luego $a = 2$.

$$\text{ii) } (\log_a y)^a + 3a \log_a y \geq a^{2a}$$

$$\rightarrow (\log_2 y)^2 + 6 \log_2 y - 16 \geq 0$$

$$\rightarrow (\log_2 y + 8)(\log_2 y - 2) \geq 0$$

$$\rightarrow \log_2 y \leq -8 \vee \log_2 y \geq 2$$

$$\rightarrow \log_2 y \leq \log_2 2^{-8} \vee \log_2 y \geq \log_2 4$$

$$\rightarrow y \leq 2^{-8} \vee y \geq 4$$

$\therefore$ En dicho estudio observaron 4 mil peces.

Rpta.: B

7. El valor de un auto se deprecia un 20% en el primer año que transcurre y en los siguientes años se deprecia el 10% (del valor anterior) por cada año que transcurre. ¿Cuánto tiempo, en años, aproximadamente, debe transcurrir para que el valor del auto sea de 6000 dólares, si su valor inicial es de 12 000 dólares? (Considere $\log 16 = 1.2$ y $\log 9 = 0.95$).

A) 5 años

B) 3 años

C) 4 años

D) 7 años

Solución:

Precio al cabo del 1er año : $80\%(12000) = 9600$

Precio al cabo del 2do año : $9600 - 10\%(9600) = 90\%(9600) = 0.9(9600)$

Precio al cabo del 3er año :

$$0.9(9600) - 10\%(0.9)(9600) = 90\%(0.9)(9600) = (0.9)^2 9600$$

Se deduce que el precio al cabo de t años es : $(0.9)^{t-1}(9600)$

$\therefore$

De la condición del problema : $(0.9)^{t-1}(9600) = 6000$

$$\rightarrow (0.9)^{t-1} = \frac{5}{8} = \frac{10}{16}$$

$$\rightarrow (t-1) \log \left(\frac{9}{10} \right) = \log \frac{10}{16} = 1 - \log 16$$

$$\rightarrow t-1 = \frac{1 - \log 16}{\log 9 - 1} = \frac{1 - 1.20}{0.95 - 1} = \frac{0.2}{0.05} = 4 \rightarrow t = 5$$

Deberá de transcurrir aproximadamente 5 años.

Rpta.: A

8. Un paracaidista que salta de un avión y que experimenta un amortiguamiento por el efecto del aire, tiene una velocidad dada por,

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right),$$

donde m es la masa del paracaidista, b es un factor positivo de resistencia a la caída, g es la gravedad y t es el tiempo en segundos transcurridos desde que salta el paracaidista. Para un tiempo suficientemente grande el paracaidista tendrá una velocidad final de aproximadamente $\frac{mg}{b}$. Halle el intervalo de tiempo (en segundos)

en el que la velocidad de caída está entre la tercera parte y la mitad de la velocidad final de la caída.

A) $\left[\frac{m}{b} \ln\left(\frac{2}{3}\right), \frac{m}{b} \ln 2 \right]$

B) $\left[\frac{m}{b} \ln 2, \frac{m}{b} \ln 3 \right]$

C) $\left[\frac{m}{b} \ln\left(\frac{3}{2}\right), \frac{m}{b} \ln 2 \right]$

D) $\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right), \ln 3 \right]$

Solución:

De la condición del problema : $\frac{1}{3} \frac{mg}{b} \leq \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right) \leq \frac{1}{2} \frac{mg}{b}$

$$\rightarrow \frac{1}{3} \leq \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow -\frac{2}{3} \leq -e^{-\frac{bt}{m}} \leq -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \leq e^{-\frac{bt}{m}} \leq \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow -\ln 2 \leq -\frac{bt}{m} \leq \ln \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \ln 2 \geq \frac{bt}{m} \geq -\ln \frac{2}{3} \rightarrow \frac{m}{b} \ln 2 \geq t \geq \frac{m}{b} \ln \frac{3}{2}.$$

Rpta.: C

Álgebra

EJERCICIOS

1. La ecuación de la demanda para las mochilas que vende un comerciante está dada por $50x_0 - p = q$, donde x_0 es la solución de $\log_3 \left[7 + \log_5 (23 + \log_x (6 - x)) \right] = 2$ y q es el número de mochilas demandadas al precio unitario de p soles.

Halle el ingreso que obtiene el comerciante si vende 60 mochilas.

- A) 1800 soles B) 3600 soles C) 2400 soles
D) 3000 soles E) 2500 soles

Solución:

$$1) \log_3 \left[7 + \log_5 (23 + \log_x (6 - x)) \right] = 2$$

$$7 + \log_5 (23 + \log_x (6 - x)) = 9$$

$$\log_5 (23 + \log_x (6 - x)) = 2$$

$$23 + \log_x (6 - x) = 25$$

$$\log_x (6 - x) = 2$$

$$6 - x = x^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x \quad + 3$$

$$x \quad - 2$$

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 2$$

solución

2) Reemplazando

$$50(2) - p = q$$

$$100 - p = q$$

$$\text{para } q = 60 \rightarrow p = 40$$

3) ingreso = $60(40) = 2400$ soles

Rpta.: C

2. Si el área de un cuadrado es

$$81^{\log_3 2} + 5^{\log_{25} 100} + 2 \left(\sqrt{3}^{\log_{\frac{1}{3}} 4} \right) - \log_3 12 - \log 5 - \log 2 + \log_3 4 \text{ cm}^2,$$

calcule la medida del lado de dicho cuadrado.

- A) 4cm B) 3cm C) 2cm D) 6cm E) 5cm

Solución:

$$\begin{aligned} 1) \text{área} &= (3^4)^{\log_3 2} + 5^{\log_{5^2} 10^2} + 2 \left(3^{\frac{1}{2}} \right)^{\log_{3^{-1}} 4} - 2 \text{ cm}^2 \\ &= 3^{\log_3 16} + 5^{\log_5 10} + 2 \left(3^{\log_{3^{-1}} 4^{\frac{1}{2}}} \right) - 2 \text{ cm}^2 \\ &= 16 + 10 + 2 \left(\frac{1}{2} \right) - 2 \text{ cm}^2 \\ &= 25 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

2) lado = a

área = 25 cm^2

$a^2 = 25$

$a = 5 \text{ cm}$

Rpta.: E

3. El Doctor Ruiz manifiesta que en nuestro organismo el nivel óptimo de pH se ha estimado entre 7.2 y 7.6. Maria , Juana , Lucia y Ana deciden realizarse el examen para determinar sus niveles de pH.

Los resultado fueron:

pH de Maria = $6 + \log_3 a$

pH de Juana = $11 \log_8 b$

pH de Lucia = $(b - a) \log_4 32$

pH de Ana = $\log_4 b$

Donde a es la menor solución y b es la mayor solución de la ecuación $2^{\log_7(x^2-5x+129)} = 5^{\log_7 8}$, determine quien o quienes tienen un nivel de pH óptimo.

A) Juana y Lucia

B) Ana

C) Maria y Ana

D) Lucia y Maria

E) Maria

Solución:

$$2^{\log_7(x^2-5x+129)} = 5^{\log_7 8}$$

$$2^{\log_7(x^2-5x+129)} = 8^{\log_7 5}$$

$$2^{\log_7(x^2-5x+129)} = 2^{3\log_7 5}$$

$$\log_7(x^2-5x+129) = \log_7 5^3$$

$$x^2 - 5x + 129 = 125$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = -1$$

$$x = -4$$

$$a = 1 \quad \vee \quad b = 4$$

$$\text{pH de Maria} = 6 + \log_3 a = 6$$

$$\text{pH de Juana} = 11 \log_8 b = \frac{22}{3}$$

$$\text{pH de Lucia} = (b - a) \log_4 32 = \frac{15}{2}$$

$$\text{pH de Ana} = \log_4 b = 1$$

Rpta.: A

4. La profesora Sofía está de cumpleaños, pero sus estudiantes no saben cuántos años cumple. Todo lo que ella dice es que su edad es igual al producto de las soluciones de la ecuación logarítmica:

$$\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$$

¿Cuántos años cumple Sofía?

A) 36

B) 32

C) 64

D) 26

E) 54

Solución:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 \frac{x}{16}} = \frac{1}{\log_2 \frac{x}{64}}$$

$$\Rightarrow \log_2 x \cdot (-4 + \log_2 x) = -6 + \log_2 x$$

Sea $a = \log_2 x$, entonces la ecuación se convierte en:

$$a^2 - 4a = a - 6$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \quad \vee \quad a = 3$$

$$\Rightarrow x = 4 \quad \vee \quad x = 8$$

Por lo tanto, Sofía cumple 32 años.

Rpta.: B

5. El número de bacterias (B) presentes en el cuerpo de Lucia a los d días de administrado un antibiótico esta dado $B = ba^{-0,1d} - \left(\frac{\log 22}{\log 2} - \log_2 11 \right)$, donde el conjunto solución de la inecuación $\log(2 - \log x) < 0$ es de la forma $\langle a, b \rangle$, en cuantos días no hay bacterias.

A) 18 B) 19 C) 15 D) 10 E) 20

Solución:

$$1) 2 - \log x > 0 \quad \wedge \quad x > 0$$

$$\log x - 2 < 0 \quad \wedge \quad x > 0$$

$$\log x < 2 \quad \wedge \quad x > 0$$

$$x < 100 \quad \wedge \quad x > 0$$

$$2) 2 - \log x < 10^0$$

$$2 - \log x < 1$$

$$1 - \log x < 0$$

$$-\log x < -1$$

$$\log x > 1$$

$$x > 10$$

$$3) \text{ de 1) y 2)}$$

$$C.S = \langle 10, 100 \rangle \rightarrow a = 10; b = 100$$

$$4) B = 100(10)^{-0,1d} - 1$$

$$0 + 1 = 100(10)^{-0,1d} \rightarrow 10^{-2} = (10)^{-0,1d} \rightarrow -2 = -0.1d$$

$$\therefore d = 20$$

Rpta.: E

6. Si $[m, n]$ es el conjunto solución de $0 \leq \log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} (x-1) \right) \leq 1$, determine el menor valor entero positivo de "a" en la inecuación $\left(\frac{m}{n} \right)^{a-3} > 1$

A) 3 B) 4 C) 2 D) 1 E) 5

Solución:

$$1) x-1 > 0 \wedge \log_{\frac{1}{2}} (x-1) > 0$$

$$x > 1 \wedge x-1 < \left(\frac{1}{2} \right)^0$$

$$x \in \langle 1, 2 \rangle$$

$$2) \log_2 1 \leq \log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} (x-1) \right) \leq \log_2 2$$

$$1 \leq \log_{\frac{1}{2}} (x-1) \leq 2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right) \leq \log_{\frac{1}{2}} (x-1) \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{1}{2} \geq x-1 \geq \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{2} \geq x \geq \frac{5}{4}$$

3) intersección 1) y 2)

$$C.S. = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right] \rightarrow m = \frac{5}{4}; n = \frac{3}{2}$$

$$4) \left(\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} \right)^{a-3} > 1 \rightarrow \left(\frac{10}{12} \right)^{a-3} > \left(\frac{10}{12} \right)^0$$

$$a-3 < 0$$

$$a < 3$$

el menor valor entero positivo de a es 1

Rpta.: D

7. Determine el conjunto solución de $\log_{(2x-1)}(1-x) > 2\log_{(5x-3)}(5x-3)$.

A) $\left\langle \frac{3}{4}, 1 \right\rangle$

B) $\left\langle 0, \frac{3}{2} \right\rangle$

C) $\left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle - \left\{ \frac{4}{5} \right\}$

D) $\left\langle \frac{3}{4}, 1 \right\rangle - \left\{ \frac{4}{5} \right\}$

E) $\left\langle \frac{3}{5}, 1 \right\rangle - \left\{ \frac{4}{5} \right\}$

Solución:

$$\log_{(2x-1)}(1-x) > 2\log_{(5x-3)}(5x-3)$$

$$1) 1-x > 0 \wedge 2x-1 > 0 \wedge 5x-3 > 0 \wedge 2x-1 \neq 1 \wedge 5x-3 \neq 1$$

$$x \in \left\langle \frac{3}{5}, 1 \right\rangle - \left\{ \frac{4}{5} \right\}$$

$$\underbrace{2x-1}_{\text{base}} \in \left\langle \frac{1}{5}, 1 \right\rangle - \left\{ \frac{3}{5} \right\}$$

$$2) \log_{(2x-1)}(1-x) > 2$$

$$1-x < (2x-1)^2$$

$$0 < x(4x-3)$$

3) intersecando 1) y 2)

$$\text{C.S.} = \left\langle \frac{3}{4}, 1 \right\rangle - \left\{ \frac{4}{5} \right\}$$

Rpta.: D

8. José es un atleta olímpico quien se ha suministrado 250 miligramos de un fármaco para el dolor muscular. La relación que existe entre el tiempo (t) transcurrido en horas desde que se aplicó el fármaco y la cantidad de miligramos (M) que aún se encuentran en su sangre esta expresada por: $M(t) = M_0 e^{-0,6t}$.

¿Después de cuantas horas de haberse suministrado el fármaco le queda solo 5 miligramos en la sangre? Considere $\ln\left(\frac{1}{50}\right) = -3,9$.

A) 4,8 h

B) 6 h

C) 7,2 h

D) 4,5 h

E) 6,5 h

Solución:

$$\text{Para } t = 0 : M(0) = 250 \Rightarrow M_0 e^{-0,6(0)} = 250 \Rightarrow \boxed{M_0 = 250}$$

$$\Rightarrow M(t) = 250 e^{-0,6t}$$

$$\text{Hacemos } M(t) = 5 \Rightarrow 250 e^{-0,6t} = 5 \Rightarrow e^{-0,6t} = \frac{1}{50} \Rightarrow -0,6t = \ln\left(\frac{1}{50}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{-3,9}{-0,6} \Rightarrow t = 6,5$$

$\therefore$ Despues de 6,5 horas.

Rpta.: E

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La relación entre el pH y la concentración de iones de hidrógeno en (mol/L) está dado por:

$$\text{pH} = -\log[H^+]$$

Si el jugo de un racimo de uvas tiene un

$$\text{pH} = \frac{\log_2 2 + \log\left(\frac{1}{3}\right) + 1 + (\log_7 99)(\log_5 7)(\log_3 5) - \log_3 11}{\sqrt{5}^{\log_5 9} + 2^{\frac{\log \sqrt{7}}{\log \sqrt{2}}} + \log_3 |-3|^2 - e^{\ln 2 + \ln 5} - 1}$$

¿Cuál será la concentración de iones de hidrógeno $[H^+]$ en el jugo de un racimo de uva?

- | | | |
|----------------|----------------|--------------|
| A) 0,002 mol/L | B) 0,01 mol/L | C) 0,1 mol/L |
| D) 0,001 mol/L | E) 0,015 mol/L | |

Solución:

$$\text{pH} = \frac{\log_2 2 + \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} 1 + (\log_7 99)(\log_5 7)(\log_3 5) - \log_3 11}{\sqrt{5}^{\log_5 9} + 2^{\log \sqrt{2}} + \log_3 3^2 - e^{\ln 2 + \ln 5} - 1}$$

$$\text{pH} = \frac{1 + 0 + \log_3 99 - \log_3 11}{\sqrt{5}^{\log \sqrt{5} \sqrt{9}} + 2^{\log \sqrt{2} \sqrt{7}} + \log_3 9 - e^{\ln 10} - 1}$$

$$= \frac{1 + 0 + \log_3 \left(\frac{99}{11}\right)}{3 + 7 + 2 - 10 - 1}$$

$$= \frac{1 + 0 + \log_3 9}{3 + 7 + 2 - 10 - 1}$$

$$= \frac{3}{1}$$

$$\text{pH} = -\log [H^+]$$

$$3 = -\log [H^+]$$

$$\log [H^+] = -3$$

$$H^+ = 10^{-3} = 0,001 \text{ mol/L}$$

Rpta.: D

2. Denisse informa sobre el número de casos de violencia contra la mujer.

$$\text{La solución de la ecuación } \ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right) = \ln \sqrt{x^2 - 9} - \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{5}\right)$$

multiplicado por 10 y dividido por 2 es el número de estos casos en el presente año
¿Cuántos casos de mujeres violentadas informó Denisse?

- A) 50 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

Solución:

$$\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right) = \ln\sqrt{x^2 - 9} - \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{5}\right)$$

$$\ln\left[3x(x-3)\left(\frac{1}{3x}\right)\right] = \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{5}}{\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{5}}\right)$$

$$\ln(x-3) = \ln 5$$

$$x-3=5$$

$$x=8$$

$$\therefore \text{casos de mujeres violentadas que informó Denisse: } \frac{8(10)}{2} = 40$$

Rpta.: D

3. Gabriela nació en el año $\overline{201a}$ donde a es la suma de cifras de b^2 tal que b es la solución de $\log_{(x-2)}(2x^3 - 5x^2 - 2x - 32) = 3$ ¿En que año Gabriela cumplirá sus 15 años?

- A) 2031 B) 2035 C) 2025 D) 2030 E) 2032

Solución:

$$\log_{(x-2)}(2x^3 - 5x^2 - 2x - 32) = 3$$

1) Existencia

$$2x^3 - 5x^2 - 2x - 32 > 0 \wedge x-2 > 0 \wedge x-2 \neq 1$$

2) Por definición de logaritmo

$$2x^3 - 5x^2 - 2x - 32 = (x-2)^3$$

$$2x^3 - 5x^2 - 2x - 32 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$$

3) Usando divisores binómicos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -14 & -24 \\ -2 & & -2 & 2 & 24 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array}$$

$$x = -2 \vee x^2 - x - 12 = 0$$

$$x = -2 \vee x = -3 \vee x = 4$$

Observemos solo $x=4$ cumple las condiciones de la existencia

$$b = 4 \rightarrow b^2 = 16$$

$$a = 1 + 6 = 7$$

Gabriela nació en el año 2017

∴ Celebrará sus quince años en el 2032

Rpta.: E

4. Calcule el menor valor de x de la ecuación $x^{\log_2(1024x^2)} = \frac{1}{256}$; x : positivo

- A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) 1

Solución:

$$x^{\log_2(1024x^2)} = \frac{1}{256}$$

aplicando logaritmo

$$\log_2 \left(x^{\log_2(1024x^2)} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{256} \right)$$

$$\log_2(1024x^2) \log_2 x = \log_2 2^{-8}$$

$$(\log_2 1024 + \log_2 x^2) \log_2 x = -8$$

$$(10 + 2\log_2 x) \log_2 x = -8$$

$$\text{sea } \log_2 x = a$$

$$(10 + 2a)a = -8$$

$$a^2 + 5a + 4 = 0$$

$$a + 4$$

$$a + 1$$

$$a = -4 \vee a = -1$$

$$\log_2 x = -4 \vee \log_2 x = -1$$

$$x = \frac{1}{16} \vee x = \frac{1}{2}$$

Rpta.: A

5. Si $\frac{1 + 2\log_{\left(\frac{a}{b}\right)} b}{1 - 2\log_{(ab)} b} = 4$, halle el menor valor de $\log_{\left(\frac{b}{a}\right)} (ba)$

- A) -1 B) $\frac{1}{3}$ C) -2 D) 2 E) 3

Solución:

$$\frac{1 + 2 \frac{1}{\log_b \left(\frac{a}{b}\right)}}{1 - 2 \frac{1}{\log_b (ab)}} = 4 \rightarrow \frac{1 + 2 \frac{1}{\log_b a - \log_b b}}{1 - 2 \frac{1}{\log_b a + \log_b b}} = 4 \rightarrow \frac{1 + 2 \frac{1}{-1 + \log_b a}}{1 - 2 \frac{1}{1 + \log_b a}} = 4$$

sea $\log_b a = x$

$$\frac{1 + 2 \frac{1}{-1 + x}}{1 - 2 \frac{1}{1 + x}} = 4$$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = 4$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 2 \quad \vee \quad \frac{x+1}{x-1} = -2$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\log_b a = 3 \quad \vee \quad \log_b a = \frac{1}{3}$$

$$a = b^3 \quad \vee \quad a = b^{\frac{1}{3}} \rightarrow \log\left(\frac{b}{a}\right)(ba) = -2 \quad \vee \quad \log\left(\frac{b}{a}\right)(ba) = 2$$

Rpta.: C

6. Juan Pérez va a comprar a una librería dos libros. El libro de Variable Compleja tiene un costo $200(\log_n m)(\log_{2m} n)$ soles mientras que el libro de Geometría Analítica

cuesta $n^{\frac{\log 70}{\log 3}}$ soles donde m es el menor elemento entero y n es el mayor elemento entero del conjunto solución de la inecuación $\log_x \left(\frac{x+3}{x-1}\right) \geq 1$ ¿Cuánto pagará por los 2 libros solicitados?

- A) 170 soles B) 171 soles C) 121 soles D) 181 soles E) 142 soles

Solución:

$$\log_x \left(\frac{x+3}{x-1} \right) \geq 1$$

$$1) \frac{x+3}{x-1} > 0 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1$$

$$x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle \wedge x > 0 \wedge x \neq 1$$

$$x \in \langle 1, +\infty \rangle$$

$$2) \frac{x+3}{x-1} \geq x$$

$$\frac{x+3}{x-1} - x \geq 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 3}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-1} \leq 0$$

3) intersecando 1) y 2)

$$C.S = \langle 1, 3 \rangle$$

$$4) m = 2$$

$$n = 3$$

$$\text{Costo del libro de variable compleja} = 200(\log_n m)(\log_{2n} n) = 200(\log_3 2)(\log_4 3) = 100 \text{ soles}$$

$$\text{Costo del libro de geometria analitica} = n^{\frac{\log 70}{\log 3}} = 3^{\frac{\log 70}{\log 3}} = 3^{\log_3 70} = 70 \text{ soles}$$

$$\therefore \text{Costo total} = 170 \text{ soles}$$

Rpta.: A

7. Determine el conjunto solución de $\frac{\log_5 |x|}{\log_5 (1-x)} < \log_{|x|} x$

A) $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$

B) $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \rangle$

C) $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$

D) $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

E) $\langle 0, 1 \rangle$

Solución:

$$1) |x| > 0 \wedge 1-x > 0 \wedge x > 0 \wedge |x| \neq 1$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge x < 1 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

$$0 < x < 1$$

$$2) \frac{\log_5 |x|}{\log_5 (1-x)} < 1$$

$$\log_{(1-x)} |x| < 1$$

$$3) \text{ como } 0 < x < 1$$

$$0 > -x > -1$$

$$1 > 1-x > 0$$

base

$$\text{de 2) } \log_{(1-x)} |x| < 1$$

$$|x| > 1-x$$

$$x > 1-x$$

$$x > \frac{1}{2}$$

$$4) \text{ inter sectando 1) y 3)}$$

$$\text{C.S} = \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$$

Rpta.: A

8. Una conversación humana tiene un nivel de intensidad de 60 decibeles y el rugido de un león tiene un nivel de intensidad de 80 decibeles ¿Qué se puede afirmar sobre la intensidad del sonido del rugido del león comparado con la intensidad del sonido de la conversación humana?

Observación

El nivel de intensidad dB de un sonido, expresado en decibeles se define por medio de:

$$dB = 10 \log \left(\frac{p}{p_0} \right)$$

dB : Nivel de intensidad

p : intensidad del sonido (variable)

p_0 : Sonido mas débil que el oído humano puede captar (constante)

- A) Intensidad del sonido del rugido del león es 10 veces la intensidad del sonido de la conversación humana.
 B) Intensidad del sonido del rugido del león es 1000 veces la intensidad del sonido de la conversación humana.
 C) Intensidad del sonido del rugido del león es igual a la intensidad del sonido de la conversación humana.
 D) Intensidad del sonido del rugido del león es 100 veces la intensidad del sonido de la conversación humana.
 E) Intensidad del sonido del rugido del león es 200 veces la intensidad del sonido de la conversación humana.

Solución:

Sea h = intensidad del sonido de la conversacion humana

L = intensidad del sonido del rugido del león

$$60 = 10 \log \left(\frac{h}{p_0} \right) ; 80 = 10 \log \left(\frac{L}{p_0} \right)$$

$$\rightarrow 6 = \log \left(\frac{h}{p_0} \right) ; 8 = \log \left(\frac{L}{p_0} \right)$$

$$\frac{h}{p_0} = 10^6 ; \frac{L}{p_0} = 10^8$$

$$h = 10^6 p_0 ; L = 10^8 p_0$$

$$\frac{L}{h} = \frac{10^8}{10^6} \rightarrow \frac{L}{h} = 100$$

La intensidad del sonido del rugido de un león es 100 veces la intensidad del sonido de la conversación humana.

Rpta.: D

Álgebra

EJERCICIOS

1. Calcule el área de un triángulo rectangular de catetos $\log_4 d^3$ y $\log_4 b^2$ metros donde d y b son la menor y mayor solución respectivamente de la ecuación.

$$(\log_4 4x)^2 + (\log_4 0,25x)^2 + \left(\log_4 \left(\frac{x}{16} \right) \right)^2 = 2^{\log_8 125}$$

- A) $\sqrt[3]{2^5} \text{ m}^2$ B) $\frac{1}{2} \text{ m}^2$ C) 1 m^2 D) 2 m^2 E) 4 m^2

Solución:

$$(\log_4 4 + \log_4 x)^2 + \left(\log_4 \frac{1}{4} + \log_4 x \right)^2 + (\log_4 x - \log_4 16)^2 = 5$$

$$(1 + \log_4 x)^2 + (-1 + \log_4 x)^2 + (-2 + \log_4 x)^2 = 5$$

$$\text{sea } \log_4 x = a$$

$$(1+a)^2 + (-1+a)^2 + (-2+a)^2 = 5$$

$$3a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$3a \quad -1$$

$$a \quad -1$$

$$a = 1 \vee a = \frac{1}{3}$$

$$\log_4 x = 1 \vee \log_4 x = \frac{1}{3}$$

$$x = 4 \vee x = 4^{\frac{1}{3}}$$

$$d = 4^{\frac{1}{3}}$$

$$b = 4$$

$$\text{área} = \frac{\log_4 d^3 (\log_4 b^2)}{2} \text{ m}^2$$

$$= \frac{1(2)}{2} \text{ m}^2$$

$$= 1 \text{ m}^2$$

Rpta.: C

2. Carla ahorró hace 3 años 1000 soles en un banco sujeto a un interés compuesto. La siguiente formula: $n = \frac{\log(M) - \log(C)}{\log(1+I)}$ permite calcular el número de años (n) que tiene que estar un capital (C) y obtener un monto final (M) con un interés anual (I) sujeto a un interés compuesto. Si Carla actualmente tiene en el banco 1728 soles, ¿cuál es la tasa de interés anual a la cual se mueve su capital?
- A) 18% B) 20% C) 30% D) 40% E) 24%

Solución:

Tenemos :

$$n = 3$$

$$C = S / 1000$$

$$M = S / 1728$$

Piden : I

Reemplazando los valores en la formula :

$$3 = \frac{\log(1728) - \log(1000)}{\log(1+I)} = \frac{\log\left(\frac{1728}{1000}\right)}{\log(1+I)} = \log_{(1+I)}\left(\frac{1728}{1000}\right)$$

$$\Rightarrow 3 = \log_{(1+I)}\left(\frac{1728}{1000}\right) \Leftrightarrow (1+I)^3 = \frac{1728}{1000} \Rightarrow 1+I = \frac{12}{10} \Rightarrow 1+I = 1,2$$

$$\Rightarrow I = 0,2 = 20 \%$$

∴ La tasa de interes es de "20 %.

Rpta.: B

3. Sean a y b números positivos tales que $a^2 + b^2 = 1$. Simplifique

$$S = \frac{\log(a+b+1) - \log(a-b+1)}{\log a - \log(b+1)}.$$

- A) 0 B) -1 C) 2 D) 1 E) -2

Solución:

Para utilizar la condición $a^2 + b^2 = 1$ vamos a multiplicar a S por 2:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\log(a+b+1) - 2\log(a-b+1)}{2\log a - 2\log(b+1)} = \frac{\log(a+b+1)^2 - \log(a-b+1)^2}{\log a^2 - \log(b+1)^2} \\ &= \frac{\log(a^2 + b^2 + 1 + 2ab + 2b + 2a) - \log(a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b)}{\log(1 - b^2) - \log(b+1)^2} \\ &= \frac{\log\left\{\frac{2(1+a)(1+b)}{2(1+a)(1-b)}\right\}}{\log\left\{\frac{(1+b)(1-b)}{(1+b)^2}\right\}} = \frac{\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right)}{\log\left(\frac{1-b}{1+b}\right)} = \frac{\log\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{-1}}{\log\left(\frac{1-b}{1+b}\right)} = -1 \end{aligned}$$

Rpta.: B

4. Sean a y b números enteros mayores que 2; ¿Qué valor debe tomar “ x ” para que

verifique: $\sqrt[b]{a^{x+\log_a x^x}} = \sqrt[a]{b}$.

- A) 0 B) $\frac{b+1}{a}$ C) $\frac{a+1}{b}$ D) $\frac{a}{b}$ E) $\frac{b}{a}$

Solución

Resolviendo:

$$\sqrt[b]{a^{\log_a^{a^x} + \log_a^{x^x}}} = \sqrt[a]{b} : \text{notar que } x = \log_a^{a^x}$$

$$\sqrt[b]{a^{\log_a^{(ax)^x}}} = \sqrt[a]{b} : \text{aplicando } \sqrt[b]{x^n} = \sqrt[b]{x^n}$$

Tendremos:

$$\sqrt[b]{a^{\log_a^{(ax)^x}}} = \sqrt[a]{b}$$

$$(\text{elevando al exponente } ab) : \sqrt[b]{(ax)^x}^{ab} = \sqrt[a]{b}^{ab}$$

$$(ax)^{(ax)} = b^b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

Rpta.: E

5. Sean $\{m, n, p, q\} \subset \mathbb{R}^+; x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $\log x^a = 4$, donde

$$a = \frac{1}{\log_m x} + \frac{1}{\log_n x} + \frac{1}{\log_p x} + \frac{1}{\log_q x}.$$

¿Cuál es el menor valor de $m+n+p+q$?

- A) 40 B) 160 C) 20 D) 400 E) 4

Solución:

$$a = \frac{1}{\log_m x} + \frac{1}{\log_n x} + \frac{1}{\log_p x} + \frac{1}{\log_q x}$$

$$a = \log_x (mnpq)$$

$$x^a = mnpq = 10^4$$

Sabemos que

$$\sqrt[4]{mnpq} \leq \frac{m+n+p+q}{4}$$

Rpta.: A

6. La potencia L , de un sonido (en decibeles) que percibe el oído humano depende del cociente de la intensidad I , de dicho sonido entre el umbral I_0 , de escucha del oído humano promedio. Es decir $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$.

¿Cuánto será la potencia de un sonido que posee una intensidad de $(k+8) \times 10^4$ veces el umbral del oído humano promedio? siendo:

$$k = \frac{\log_3 \log_9 (a+b)^{18}}{1 + \log_9 \log_3 (a+b)}, \text{ donde } a+b > 0.$$

A) 30 decibeles

B) 40 decibeles

C) 50 decibeles

D) 60 decibeles

E) 20 decibeles

Solución:

$$k = \frac{\log_{3^2} [\log_9 (a+b)^{18}]^2}{1 + \log_9 \log_{3^2} (a+b)^2} = \frac{2 \log_9 [\log_9 (a+b)^{9.2}]}{1 + \log_9 \log_9 (a+b)^2}$$

$$\rightarrow k = \frac{2 \log_9 [9 \cdot \log_9 (a+b)^2]}{1 + \log_9 \log_9 (a+b)^2} = \frac{2 \cdot [1 + \log_9 \log_9 (a+b)^2]}{1 + \log_9 \log_9 (a+b)^2}$$

$$\rightarrow k = 2$$

Luego $I = (2+8) \times 10^4 = 10^5$ veces el umbral del oído humano promedio

$$\therefore L = 10 \cdot \log \left(\frac{100\,000 \cdot I_0}{I_0} \right) = 50 \text{ decibeles.}$$

Rpta.: C

7. Dado el conjunto solución $\langle -\infty, b \rangle \cup \langle c, d \rangle$ de la inecuación $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x + 4) < \log_{\frac{1}{4}}(6 - x)$, determine el valor de $(\log_{2c}(4d + 3))(\log_3(b + 5))$.

A) 4 B) 6 C) 1 D) 9 E) 3

Solución:

$$I. x^2 - 2x + 4 > 0 \wedge 6 - x > 0$$

$$x \in \mathbb{R} \wedge x < 6$$

$$x \in \langle -\infty, 6 \rangle$$

II. Resolviendo

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x + 4) < \log_{\frac{1}{4}}(6 - x)$$

$$x^2 - 2x + 4 > 6 - x$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$(x - 2)(x + 1) > 0$$

$$x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

$$III. C.S = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 2, 6 \rangle$$

$$; b = -1; c = 2; d = 6$$

$$\therefore (\log_{2c}(4d + 3))(\log_3(b + 5)) = 3$$

Rpta.: E

8. Si $\langle a, b \rangle \cup \langle c, d \rangle$ con $a < d$ es el conjunto solución de la inecuación

$$\log_2 |x - 2| + 6 > \log_2(x^2 - 4x + 4)$$

¿Qué se puede afirmar de $\log_b(a + b + c + d)$?

- A) Es un número que tiene 3 divisores
 B) Es un número primo mayor a 3
 C) Es un número par
 D) Es un número irracional
 E) Es un número impar

Solución:

$$\log_2 |x-2| + 6 > \log_2 (x^2 - 4x + 4)$$

$$I. |x-2| + 6 > 0 \wedge (x^2 - 4x + 4) > 0$$

$$x \in \mathbb{R} \wedge (x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 2)$$

$$x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

II. Resolviendo

$$|x-2| + 6 > (x-2)^2$$

$$|x-2| + 6 > |x-2|^2$$

$$|x-2|^2 - |x-2| - 6 < 0$$

$$(|x-2| - 3)(|x-2| + 2) < 0$$

$$|x-2| - 3 < 0$$

$$|x-2| < 3$$

$$-1 < x < 5$$

$$III. C.S = (\mathbb{R} - \{2\}) \cap \langle -1, 5 \rangle$$

$$= \langle -1, 5 \rangle - \{2\}$$

$$= \langle -1, 2 \rangle \cup \langle 2, 5 \rangle$$

$$a = -1 ; b = 2 ; c = 2 ; d = 5$$

$$\therefore \log_b (a + b + c + d) = \log_2 8 = 3$$

Rpta.: E

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dada la ecuación $\frac{\log 12}{\log e} = \ln(x-2) + \ln(x-1)$, calcule el valor de $\log_{(x+4)}(x^2 + 2)$.

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{3}{2}$

C) 3

D) $\log_2 6$

E) $\log_5 3$

Solución:

$$\ln 12 = \ln(x-2) + \ln(x-1)$$

$$\ln 12 = \ln(x-2)(x-1)$$

$$12 = x^2 - 3x + 2$$

$$0 = x^2 - 3x - 10$$

$$(x-5)(x+2)=0$$

$$x = 5 \vee x = -2$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{5\}$$

$$\log_{(x+4)}(x^2 + 2) = \log_9(5^2 + 2) = \frac{3}{2}$$

Rpta.: B

2. Determine la menor solución de $9^{-1+\log_x 9} = 3x$.

A) $\frac{1}{243}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{1}{81}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

Solución:

Aplicando logaritmo en base "x"

$$\log_x (9^{-1+\log_x 9}) = \log_x (3x)$$

$$(-1 + \log_x 9) \log_x 9 = \log_x 3 + \log_x x$$

$$(-1 + 2 \log_x 3) 2 \log_x 3 = \log_x 3 + \log_x x$$

$$\text{sea } \log_x 3 = a$$

$$(-1 + 2a) 2a = a + 1$$

$$4a^2 - 3a - 1 = 0$$

$$a = -\frac{1}{4} \vee a = 1$$

$$x = \frac{1}{81} \vee x = 3$$

Rpta.: C

3. En una cierta ciudad de 100 mil habitantes, inicialmente un total de 10 mil personas han oído un rumor. Después de una semana el número $P(t)$, de los que han oído el mismo rumor se ha incrementado a 20 mil. Si $P(t)$, en miles, satisface la ecuación,

$$P(t) = \frac{a}{10 + 90e^{-100kt}}, \quad (t \text{ en semanas}); a \text{ es una constante.}$$

¿dentro de cuánto tiempo el 80% de la población conocerá el rumor?

A) $\log_3 \frac{6}{2}$ B) $\log_3 6$ C) $\log_6 \frac{3}{2}$ D) $2 \log_3 6$ E) $\log_6 3$

Solución:

$$P(t) = \frac{a}{10 + 90e^{-100kt}}$$

Para $t = 0$, inicialmente $P(0)$ es 10 mil

$$\text{Entonces en } P(0) = \frac{a}{10 + 90} = \frac{a}{100} = 10 \rightarrow a = 1000$$

$$\rightarrow P(t) = \frac{1000}{10 + 90e^{-100kt}}$$

Ahora para $t = 1$, entonces $P(1) = 20$

$$\rightarrow P(1) = \frac{1000}{10 + 90e^{-100k}} = 20$$

$$\rightarrow e^{-100k} = \frac{4}{9} \rightarrow k = \frac{1}{100} \ln \frac{9}{4}$$

Sea el tiempo t_1 para el cual $P(t_1) = 80\% \text{ } 100 \text{ mil}$

$$\rightarrow P(t_1) = \frac{1000}{10 + 90e^{-100kt_1}} = 80$$

$$\rightarrow t = \frac{\ln 36}{100k} = \frac{\ln 36}{\ln \frac{9}{4}} = \log_{\frac{3}{2}} 6$$

Rpta.: A

4. Luego de un estudio, un biólogo estableció que producto de una infección, la cantidad en miles de parásitos presentes en el intestino delgado se modela por $f(t) = 4 + te^{-kt}$, donde t es el tiempo en días. Después de una semana hay 5400 parásitos en el intestino delgado. Determine cuantos parásitos hay luego de $e^{\ln 7 + \ln 2}$ días.

- A) 4560 B) 4800 C) 4200 D) 5420 E) 7240

Solución:

$$f(t) = 4 + te^{-kt}$$

I.

$$f(7) = 4 + 7e^{-k(7)} = 5,4 \Rightarrow 7e^{-k(7)} = 1,4 \Rightarrow e^{-k(7)} = 0,2$$

$$f(14) = 4 + 14e^{-14k} = 4 + 14(e^{-7k})^2 = 4 + 14(0,04) = 4,56$$

II.

$\therefore$ Habrán 4560 parásitos

Rpta.: A

5. Los lados de un terreno rectangular, son $10a$ metros y $10b$ metros con $a < b$, donde a y b son las mayores soluciones enteras de $\log_5(25 + 5^{2-x} - 1) \geq x$, halle la suma del valor numérico del área con el semiperímetro de dicho terreno.

A) 360

B) 100

C) 640

D) 340

E) 230

Solución:

$$\text{Como } \log_5(25 + 5^{2-x} - 1) \geq x$$

$$\Rightarrow 25 + 5^{2-x} - 1 \geq 5^x$$

$$\Rightarrow 0 \geq 5^{2x} - 24 \cdot 5^x - 25$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; 2], \text{ luego } a = 1, b = 2$$

Luego la suma es 230

Rpta.: E

6. Halle el producto de soluciones enteras al resolver la inecuación $\frac{1 + \log_3 x^2}{1 + \log_9 x} < 2$.

A) 4

B) $\frac{1}{2}$

C) 3

D) 8

E) 2

Solución:

$$\frac{1 + \log_3 x^2}{1 + \log_9 x} < 2$$

$$\frac{1 + \log_9 x^4}{1 + \log_9 x} < 2$$

$$\frac{1 + 4 \log_9 x}{1 + \log_9 x} < 2$$

Sea $a = \log_9 x$ con $x > 0$

$$\Rightarrow \frac{1+4a}{1+a} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{2a-1}{1+a} < 0 \Rightarrow -1 < a < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -1 < \log_9 x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log_9 9^{-1} < \log_9 x < \log_9 9^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} < x < 3$$

$\therefore$ producto de soluciones enteras = (1)(2) = 2

Rpta.: E

7. Determine la suma de soluciones enteras del conjunto solución de la inecuación

$$\log_4 (x+2)^2 < 1.$$

- A) -4 B) 4 C) -3 D) 10 E) 5

Solución:

$$\left(\log_4 (x+2)^2 \right)^2 < 1$$

$$\text{Sea } \log_4 (x+2)^2 = a$$

Reemplazando

$$a^2 - 1 < 0$$

$$(a+1)(a-1) < 0$$

$$-1 < \log_4 (x+2)^2 < 1$$

$$\log_4 4^{-1} < \log_4 (x+2)^2 < \log_4 4$$

$$\frac{1}{4} < (x+2)^2 < 4$$

$$\frac{1}{2} < \sqrt{(x+2)^2} < 2$$

$$\frac{1}{2} < |x+2| < 2$$

$$|x+2| > \frac{1}{2} \wedge |x+2| < 2$$

$$C.S = \left\langle -4, -\frac{5}{2} \right\rangle \cup \left\langle -\frac{3}{2}, 0 \right\rangle$$

$$\therefore \text{suma de soluciones enteras} = -1 - 3 = -4$$

Rpta.: A

8. Halle el número de soluciones enteras de

$$\left(10^{-1}\right)^{\log_9 27^{\log_4 9^{\log_3 4}}} < 10\left(\frac{1}{10}\right)^{(x-1)^2}$$

A) 3

B) 6

C) 2

D) 1

E) 4

Solución:

$$i) \log_9 27^{\log_4 9^{\log_3 4}} = \log_9 27^{\log_3 4 \log_4 9} = \log_9 27^2 = \log_3 2 \cdot 3^6 = 3$$

ii) Reemplazando

$$\left(\frac{1}{10}\right)^3 < \left(\frac{1}{10}\right)^{(x-1)^2-1}$$

$$3 > x^2 - 2x + 1 - 1$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x-3)(x+1) < 0$$

$$-1 < x < 3$$

$$\text{número de soluciones enteras} = 3$$

Rpta.: A

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

17
semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

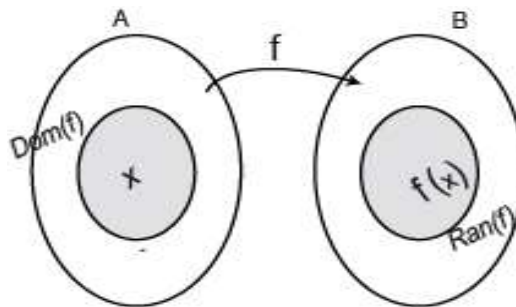
I. Definición

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y sea f una relación de A en B; diremos que f es una función de A en B si se cumple que:

$$(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z.$$

Al elemento y se le llama imagen de x bajo f y se denota por $y = f(x)$. Al elemento x se le llama preimagen de y.

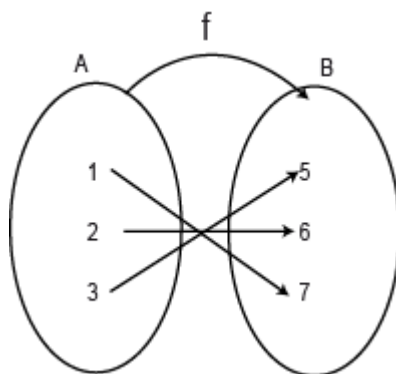
Gráficamente



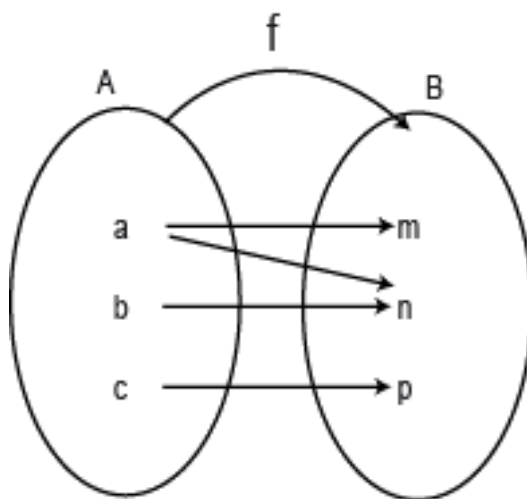
$$f: A \rightarrow B$$

$$\text{Dominio de } f: \text{Dom}(f) = \{x \in A / \exists! y \in B : (x, y) \in f\} \subseteq A$$

$$\text{Rango de } f: \text{Ran}(f) = \{y \in B / \exists x \in A : (x, y) \in f\} = \{f(x) / x \in \text{Dom}(f)\} \subseteq B$$

Ejemplo 1

$f = \{(1,7), (2,6), (3,5)\}$ es una función, donde $\text{Dom}(f) = \{1, 2, 3\}$
 $\text{Ran}(f) = \{5, 6, 7\}$

Ejemplo 2

No es función $f = \{(a,m), (a,n), (b,n), (c,p)\}$ pues "a" tiene dos imágenes "m" y "n".

II. Cálculo del Dominio y Rango de una función

Dominio: Está dado por el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x , salvo el caso en que dicho dominio esté previamente indicado.

Rango: A partir de los $x \in \text{Dom}(f)$, se construye los valores para $y = f(x)$.

Ejemplo 3

Si $f(x) = \sqrt{5-x}$, halle $\text{Dom}(f)$ y $\text{Ran}(f)$.

Solución:

- $5 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 5 \rightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, 5]$

- Como $x \leq 5 \rightarrow 5 - x \geq 0 \rightarrow \sqrt{5 - x} \geq 0 \rightarrow f(x) \geq 0$
 $\therefore \text{Ran}(f) = [0, +\infty)$.

Ejemplo 4

Si $f(x) = x^2 - 4$; $x < 1$, halle $\text{Ran}(f)$.

Solución:

- $\text{Dom}(f) = \langle -\infty, 1 \rangle$
- Como $x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 4 \geq -4 \rightarrow f(x) \geq -4$
 $\therefore \text{Ran}(f) = [-4, +\infty)$

Ejemplo 5

Si $y = f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$, halle $\text{Dom}(f)$ y $\text{Ran}(f)$.

Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Como $x \in \mathbb{R} \rightarrow 3x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{3x}{x^2 + 1} \in \mathbb{R} \rightarrow y \in \mathbb{R} \dots (I)$
- Despejando x :
 $yx^2 + y = 3x \rightarrow yx^2 - 3x + y = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4yy}}{2y}$
 Como $x \in \mathbb{R} \rightarrow 9 - 4y^2 \geq 0 \rightarrow \frac{9}{4} \geq y^2 \rightarrow -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2} \dots (II)$
- De (I) y (II): $y \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \rightarrow \text{Ran}(f) = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

OBSERVACIÓN 1:

Si la función f tiene por regla de correspondencia

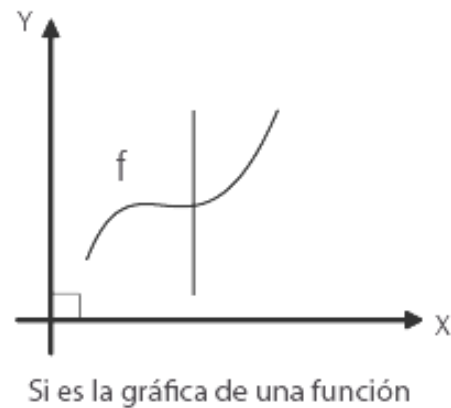
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ; x \in \text{Dom}(f_1) \\ f_2(x) & ; x \in \text{Dom}(f_2) \end{cases}$$

Entonces:

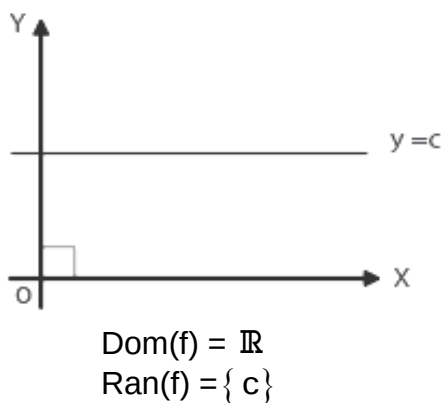
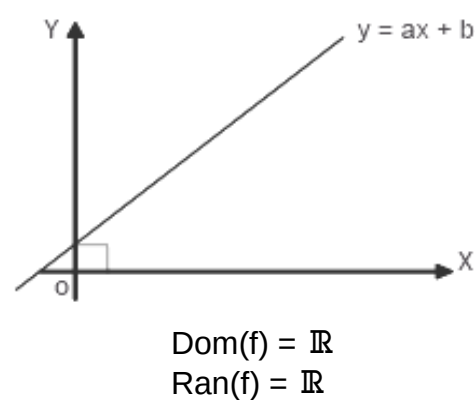
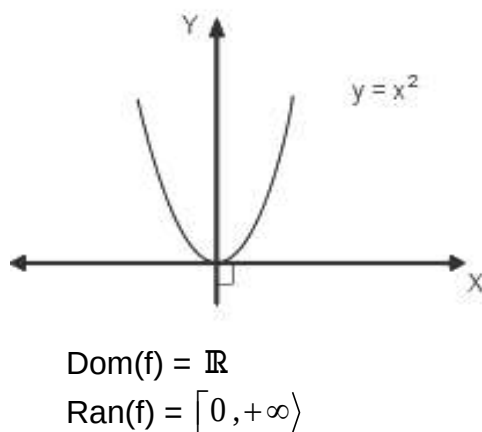
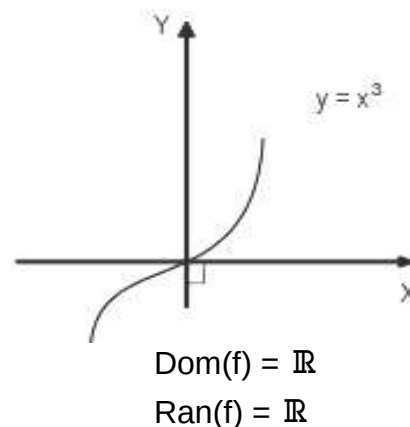
- I) $\text{Dom}(f_1) \cap \text{Dom}(f_2) = \emptyset$
- II) $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(f_1) \cup \text{Dom}(f_2)$
- III) $\text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2)$

III. Prueba de la Recta Vertical

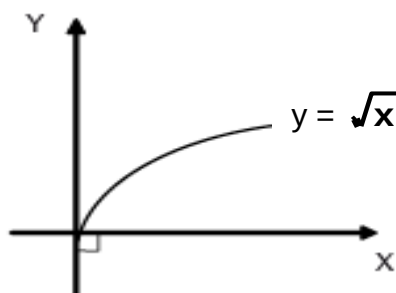
Una curva en el plano cartesiano es la gráfica de una función si y solo si toda recta vertical la intersecta solo una vez.

**IV. Funciones Elementales**

Son aquellas funciones que se usan con mucha frecuencia; aquí describiremos algunas de ellas, donde $y = f(x)$.

A) Función Constante**B) Función Lineal****C) Función Cuadrática****D) Función Cúbica**

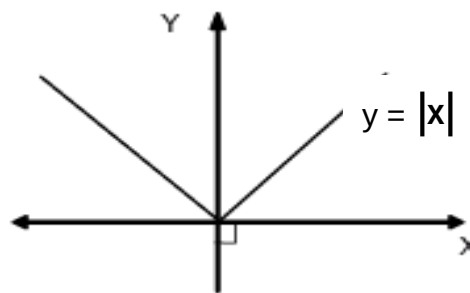
E) Función Raíz Cuadrada



$$\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$$

$$\text{Ran}(f) = [0, +\infty)$$

F) Función Valor Absoluto



$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}(f) = [0, +\infty)$$

OBSERVACIÓN 2:

La forma general de la función cuadrática es $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. La gráfica de una función cuadrática siempre es una parábola. Sus aplicaciones mayormente se encuentran en economía, donde por ejemplo se maximizan ganancias o minimizan pérdidas o gastos. Se debe tener presente:

- 1) El vértice de la parábola es $V(h,k)$ donde $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = f(h)$, es decir, el vértice

de la parábola es $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

- 2) Las funciones cuadráticas toman un máximo y/o mínimo valor en el vértice de la parábola. Tenemos que:

- Si $a > 0$ entonces la función cuadrática toma su mínimo valor. Además, la parábola se abre hacia arriba.
- Si $a < 0$ entonces la función cuadrática toma su máximo valor. Además, la parábola se abre hacia abajo.

Ejemplo 6

J&S es una empresa que se dedica a la elaboración de fundas para laptop y su departamento de marketing ha estimado que al precio de venta de S/ 60 cada una, la empresa tiene una venta diaria de 30 fundas, sin embargo, por cada S/ 1 que se disminuya al precio, las ventas aumentarán en 3 fundas por día. Determine la cantidad de fundas que deberá elaborar y vender la empresa para que obtenga el ingreso máximo.

Solución:

- 1) Incrementos: x

Cantidad: q

Precio: p

$$p = 60 - x \quad ; \quad q = 30 + 3x$$

$$2) I(x) = (60 - x)(30 + 3x)$$

$$I(x) = -3x^2 + 150x + 1800$$

$$h = -\frac{b}{2a} \rightarrow h = -\frac{150}{2(-3)} \rightarrow h = 25$$

$$3) q = 30 + 3(25) = 105.$$

$\therefore$ El número de fundas que deberá elaborar y vender es de 105.

V. Función Par e Impar

Definición

Una función f se denomina función par si cumple las siguientes condiciones:

- i) $x \in \text{Dom}(f) \rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$.
- ii) $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$.

Ejemplo 7

Sea $f(x) = 5x^6 + 3$, ¿es f una función par?

Solución:

- i) $x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \rightarrow -x \in \mathbb{R}$.
- ii) $f(-x) = 5(-x)^6 + 3 = 5x^6 + 3 = f(x) \rightarrow f(-x) = f(x)$
 $\therefore f$ es una función par.

Definición

Una función f se denomina función impar si cumple las siguientes condiciones:

- i) $x \in \text{Dom}(f) \rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$.
- ii) $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$.

Ejemplo 8

Sea $f(x) = \text{sen } x + x^5$; $x \in \mathbb{R}$, ¿es f una función impar?

Solución:

- i) $x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \rightarrow -x \in \mathbb{R}$
- ii) $f(-x) = \text{Sen}(-x) + (-x)^5 = -\text{sen } x - x^5 = -(\text{sen } x + x^5) = -f(x) \rightarrow f(-x) = -f(x)$
 $\therefore f$ es función impar.

VI. Operaciones con Funciones

i) Suma de funciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\text{Dom}(f + g)(x) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

ii) Diferencia de funciones

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\text{Dom}(f - g)(x) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

iii) Producto de funciones

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\text{Dom}(f \cdot g)(x) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

iv) División de funciones

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$$

Ejemplo 9

Dadas las funciones $f = \{(a, 3), (m, a), (a, m - 2a), (m, 2 + m), (4(a - m), r), (8, a)\}$
 y $g = \{(-5, 6), (-7, 2), (3, 1)\}$; determine $\text{Ran}(f + g)$.

Solución:1) f es una función:

$$\begin{cases} m - 2a = 3 \\ m - a = -2 \end{cases}$$

Resolviendo: $m = -7$; $a = -5$

$$\rightarrow f = \{(-5, 3), (-7, -5), (8, r), (8, -5)\}$$

Nuevamente por ser f función: $r = -5$

$$2) f = \{(-5, 3), (-7, -5), (8, -5)\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f) = \{-5, -7, 8\}; \text{Ran}(f) = \{3, -5\}$$

$$3) g = \{(-5, 6), (-7, 2), (3, 1)\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(g) = \{-5, -7, 3\}; \text{Ran}(g) = \{6, 2, 1\}$$

$$4) \text{ Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f + g) = \{-5, -7\}$$

$$5) (f + g)(x) = f(x) + g(x); x \in \text{Dom}(f + g)$$

Evaluando:

$$(f + g)(-5) = f(-5) + g(-5) = 3 + 6 = 9$$

$$(f + g)(-7) = f(-7) + g(-7) = -5 + 2 = -3$$

$$\therefore \text{Ran}(f + g) = \{9, -3\}.$$

Álgebra

EJERCICIOS

1. Francisco y Napoleón viven en un mismo pueblo de la selva, Francisco representa las temperaturas (en grados Celsius) de su pueblo, registradas a las 12:00 horas de cada uno de los días de la primera semana de agosto, (mediante una función f que depende del número de día) f se expresa en la siguiente tabla adjunta:

Día	1	2	3	4	5	6	7
Temperatura (en °C)	a	30	b	a + c	35	32	3c

en donde se considera que 1 representa el día lunes, 2 el día martes, 3 el día miércoles y así sucesivamente. Pero Napoleón le dice a Francisco que las temperaturas de los días lunes, miércoles y domingo fueron $(3a - 48)^\circ\text{C}$, $(105 - 4b)^\circ\text{C}$ y $(c + 18)^\circ\text{C}$ respectivamente, halle el promedio aritmético de las temperaturas registradas los días lunes, miércoles y jueves.

- A) 26°C B) 30°C C) 32°C D) 25°C

Solución:

Por dato :

- i) $(1, 3a - 48) \in f$ y de la tabla $(1, a) \in f$, por ser f función :

$$a = 3a - 48 \rightarrow a = 24$$

- ii) $(3, 105 - 4b) \in f$ y de la tabla $(3, b) \in f$, por ser f función :

$$\rightarrow b = 105 - 4b \rightarrow b = 21$$

- iii) $(7, c + 18) \in f$ y de la tabla $(7, 3c) \in f$, por ser f función :

$$\rightarrow 3c = c + 18 \rightarrow c = 9$$

Entonces, el promedio aritmético de las temperaturas registradas los días lunes, miércoles y jueves, es:

$$\frac{24^\circ\text{C} + 21^\circ\text{C} + 33^\circ\text{C}}{3} = \frac{78^\circ\text{C}}{3} = 26^\circ\text{C}$$

$\therefore$ El promedio pedido es 26°C .

Rpta.: A

2. Halle la suma de los tres mayores elementos enteros del dominio de la función real f , cuya regla correspondencia está dada por,

$$f(x) = \frac{x^3 - 3}{\sqrt[3]{x+4}} - \frac{x+2}{\log_2(2-x)} + \frac{1}{|x|-5}.$$

- A) -1 B) 0 C) -3 D) -2

Solución:

Hallando el $\text{Dom}(f)$:

f existe en $\mathbb{R}$, si:

$$x+4 \neq 0 \wedge 2-x > 0 \wedge \log_2(2-x) \neq 0 \wedge |x|-5 \neq 0$$

$$\rightarrow x \neq -4 \wedge x < 2 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq \pm 5$$

$$\rightarrow x \in \langle -\infty, 2 \rangle - \{-5; -4; 1\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty, 2 \rangle - \{-5; -4; 1\}$$

Los tres primeros mayores elementos enteros del $\text{Dom}(f)$, son: $-2; -1; 0$.

$$\therefore -2 - 1 + 0 = -3.$$

Rpta.: C

3. Si “ k ” es el número de elementos enteros del rango de la función real f , definida por,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 + 2x}; \text{Dom}(f) = [1, 4], \text{ evalúe } f \text{ en “} x = k + 1 \text{”}.$$

- A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{11}{15}$ D) $\frac{5}{6}$

Solución:

i). Observemos que: $f(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2 - 1}$

ii). Hallando $\text{Ran}(f)$:

$$\text{Como: } \text{Dom}(f) = [1, 4] \rightarrow 1 \leq x \leq 4$$

$$\rightarrow 2 \leq x+1 \leq 5 \rightarrow 4 \leq (x+1)^2 \leq 25$$

$$\rightarrow 3 \leq (x+1)^2 - 1 \leq 24 \rightarrow \frac{1}{24} \leq \frac{2}{(x+1)^2 - 1} \leq \frac{1}{3} \rightarrow -\frac{4}{3} \leq -\frac{4}{(x+1)^2 - 1} \leq -\frac{1}{6}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{4}{(x+1)^2 - 1} \leq \frac{5}{6}$$

$$\rightarrow f(x) \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right] \rightarrow \text{Ran}(f) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right]$$

$$\rightarrow x \in \text{Ran}(f) \cap \mathbb{Z} : 0$$

Luego, por dato $k = 1$

$$\Rightarrow f(k+1) = f(2) = \frac{2^2 + (2)(2) - 4}{2^2 + (2)(2)} = \frac{4 + 4 - 4}{4 + 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(2) = \frac{1}{2}.$$

Rpta.: B

4. Dadas las funciones $f : \text{Dom}(f) = [-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$; tal que $f(x) = x^2 - 2|x| - 6$ y $g : \text{Dom}(g) = [-4, -1] \rightarrow \mathbb{R}$; tal que $g(x) = \frac{|x|}{x}$, halle el rango de $(f + g)$.

- A) $[-3, 2]$ B) $[2, 4]$ C) $[-8, -7]$ D) $[-6, -2]$

Solución:

$$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [-2, 6] \cap [-4, -1] = [-2, -1]$$

$$\rightarrow \forall x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [-2, -1]:$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 2|x| - 6 + \frac{|x|}{x} = x^2 + 2x - 6 - 1$$

$$\rightarrow (f + g)(x) = x^2 + 2x - 7 = (x^2 + 2x + 1) - 7 - 1$$

$$\rightarrow (f + g)(x) = (x + 1)^2 - 8$$

Hallando $\text{Ran}(f + g)$:

$$\text{Como : } x \in [-2, -1] \rightarrow -2 \leq x \leq -1 \rightarrow -1 \leq x + 1 \leq 0$$

$$\rightarrow 0 \leq (x + 1)^2 \leq 1 \rightarrow -8 \leq (x + 1)^2 - 8 \leq -7$$

$$\rightarrow (f + g) \in [-8, -7]$$

$$\therefore \text{Ran}(f + g) = [-8, -7].$$

Rpta.: C

5. En el emporio comercial de Gamarra se conoce que el precio (en miles de dólares) del metro cuadrado de un terreno esta modelada por una función lineal dependiente del tiempo (en años). Si el precio actual del metro cuadrado es de 5 mil dólares y se proyecta que al cabo de 5 años será de b miles de dólares, ¿cuál es el valor de b , si un economista afirma que de acuerdo a dicho modelo lineal dentro de 10 años el precio del metro cuadrado será de 14 mil dólares?

- A) 7,5 B) 8 C) 9 D) 9,5

Solución:

Sea la función lineal $f(t) = at + c$, donde f precio en miles de dólares de un m^2 y t tiempo en años. Luego, por dato:

$$\bullet f(0) = 5 \rightarrow c = 5$$

$$\bullet f(10) = 14 \rightarrow 10a + 5 = 14 \rightarrow a = \frac{9}{10}$$

Reemplazando en $f(t)$:

$$\rightarrow f(t) = \frac{9}{10}t + 5$$

Como al cabo de 5 años el precio del m^2 es de 5 mil dolares:

$$\rightarrow b = f(5) = \frac{9}{10}(5) + 5 = \frac{19}{2} = 9.5$$

$$\therefore b = 9.5$$

Rpta.: D

6. Una pequeña compañía proveedora de servicio de cable provee a sus clientes varios tipos de planes, en el plan Premium cobra \$30 por mes y tiene una cartera de 126 clientes, si por cada incremento de \$1 en el precio la empresa pierde un cliente. Halle el máximo ingreso que percibe la empresa en el plan mencionado.

A) \$ 6084

B) \$ 4280

C) \$ 3726

D) \$ 5874

Solución:

Sea x el número de incrementos de un sol.

El ingreso viene dado por:

$$I(x) = (30 + x)(126 - x)$$

$$\rightarrow I(x) = -x^2 + 96x + 3780$$

El ingreso máximo se obtiene cuando:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{96}{(2)(-1)} = 48$$

$$\rightarrow I_{\max}(x) = I(48) = 6084$$

$\therefore$ El ingreso máximo es \$6084.

Rpta.: A

7. Un estudio matemático ha determinado que el porcentaje del cerebro que aún se mantiene intacto al cabo de t años de iniciado el Alzheimer está modelada por $f(t) = at^3 + bt + c$. Si de acuerdo a este modelo, al cabo del séptimo año el 65,7% del cerebro aún se mantiene intacto y al cabo del octavo año el 51,2% del cerebro se encuentra dañado, ¿dentro de cuánto tiempo de iniciada la enfermedad el cerebro queda totalmente deteriorado?

A) 12 años

B) 11 años

C) 10 años

D) 9 años

Solución:

Tenemos: $f(t) = at^3 + bt + c$

Luego, por dato:

$$1). f(0) = 100 \rightarrow c = 100$$

$$\rightarrow f(t) = at^3 + bt + 100 \dots (*)$$

$$2). f(7) = 65,7 \rightarrow 343a + 7b = -34,3 \dots (I)$$

$$3). f(8) = 48,8 \rightarrow 512a + 8b = -51,2 \dots (II)$$

$$\text{Resolviendo (I) y (II): } a = -\frac{1}{10} \wedge b = 0$$

$$\text{Remplazando en (*): } f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 100$$

$$\text{Hacemos: } f(t) = 0 \rightarrow -\frac{1}{10}t^3 + 100 \rightarrow t = 10$$

$\therefore$ Al cabo de 10 años, el cerebro queda totalmente deteriorado.

Rpta.: C

8. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones según el orden presentado:

I. f definida por, $f(x) = x|x| + \frac{1}{x}$, es una función par.

II. g definida por, $g(x) = \sin(x^2) - \cos(x)$, es una función par.

III. h definida por, $h(x) = |x^3 - 1| - x$; $x \in [-5, 5]$ es una función impar.

A) FVV

B) VVF

C) VFV

D) FVF

Solución:

$$I) \quad f(x) = x|x| + \frac{1}{x}$$

$$i) \quad x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$$

$$ii) \quad f(-x) = (-x)|-x| + \frac{1}{-x} = -x|x| - \frac{1}{x} = -\left(x|x| + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

De i) y ii) $f(x)$ es una función impar

$\therefore$ I) es (F)

$$II) \quad g(x) = \sin(x^2) - \cos(x)$$

$$i) \quad x \in \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \rightarrow -x \in \text{Dom}(g)$$

$$ii) \quad g(-x) = \sin(-x)^2 - \cos(-x) = \sin(x) - \cos(x) = g(x)$$

De i) y ii) $g(x)$ es una función par

$\therefore$ II) es (V)

$$\text{III)} \quad h(x) = |x^3 - 1| - x; x \in [-5, 5]$$

$$\text{i). } x \in \text{Dom}(f) = [-5, 5] \rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$$

$$\text{ii). } h(-x) = |(-x)^3 - 1| - (-x) = |x^3 + 1| + x \neq -h(x)$$

Como falla ii). $h(x)$ no es una función impar

$\therefore$ III) es (F)

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si la siguiente relación $f = \{(2, a+b-2); (-3, ab); (4, 5); (2, 10); (a, b); (-3, 32)\}$ es una función en $\mathbb{R}$, halle el valor de $f(a) - f(b) - n$; donde n es el mayor elemento del conjunto $(\text{Dom}(f) - \text{Ran}(f))$.

A) 5

B) -9

C) 1

D) -4

Solución:

Como f es una función:

$$\bullet a + b - 2 = 10 \rightarrow a + b = 12 \rightarrow b = 12 - a \dots (*)$$

$$\bullet ab = 32 \dots (**)$$

De (*) en (**):

$$a(12 - a) = 32 \rightarrow a^2 - 12a + 32 = 0 \rightarrow (a - 4)(a - 8) = 0 \rightarrow a = 4 \vee a = 8$$

Reemplazando en (*):

$$\bullet \text{ Si } a = 4 \rightarrow b = 8$$

$$\bullet \text{ Si } a = 8 \rightarrow b = 4$$

Reemplazando en f :

$$\bullet \text{ Si } (a = 4 \wedge b = 8) \rightarrow f = \{(2, 10); (-3, 32); (4, 5); (4, 8)\} \text{ no es función}$$

$$\bullet \text{ Si } (a = 8 \wedge b = 4) \rightarrow f = \{(2, 10); (-3, 32); (4, 5); (8, 4)\} \text{ no es función}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f) - \text{Ran}(f) = \{-3; 2; 4; 8\} - \{4; 5; 10; 32\} = \{-3; 2; 8\}$$

$\rightarrow$ El mayor elemento de $(\text{Dom}(f) - \text{Ran}(f))$, es: 8

Luego, por dato: $n = 8$

$$\therefore f(a) - f(b) - n = f(8) - f(4) - 8 = 4 - 5 - 8 = -9.$$

Rpta.: B

2. Dadas las funciones reales f y g definidas por $f(x) = \sqrt{42 - x - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 7x - 8}$. Si Joel nació el día "a" del mes "2a" del año 2019; siendo a el número de elementos enteros del $(\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g))$, determine el día y mes en que nació Joel.

A) 6 de diciembre

B) 1 de febrero

C) 2 de abril

D) 5 de octubre

Solución:i) Hallando $\text{Dom}(f)$:f existe en $\mathbb{R}$ si:

$$42 - x - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + x - 42 \leq 0$$

$$\rightarrow (x+7)(x-6) \leq 0 \rightarrow x \in [-6, 7]$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = [-6, 7].$$

ii) Hallando $\text{Dom}(g)$:g existe en $\mathbb{R}$ si:

$$x^2 + 7x - 8 \geq 0 \rightarrow (x-8)(x+1) \geq 0 \rightarrow x \leq -8 \vee x \geq 1$$

$$\rightarrow x \in \langle -\infty, -8 \rangle \cup [1, +\infty)$$

$$\rightarrow \text{Dom}(g) = \langle -\infty, -8 \rangle \cup [1, +\infty).$$

iii) Hallando $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$:

$$\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [-6, 7] \cap (\langle -\infty, -8 \rangle \cup [1, +\infty)) = [1, 6]$$

$$\rightarrow x \in (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)) \cap \mathbb{Z} : 1; 2; 3; 4; 5; 6.$$

$$\rightarrow a = 6$$

 $\therefore$ Joel nació el 6 de diciembre.
Rpta.: A

3. Pablo desea comprar un par de sandalias, y visita tres zapaterías, comparando precios, según como se especifica en la siguiente tabla,

Zapatería	Precio (S/)
M	ab
R	ac^2
T	$(a+b)c$

Si el valor numérico de a , b (primos entre sí) y c , se obtienen del $\text{Ran}(f) = \left[\frac{a}{b}, c \right]$ de

la función f definida por $f(x) = \frac{2x+3}{2x+1}$; $\text{Dom}(f) = [0, 4]$, ¿cuánto deberá pagar Pablo por el par de sandalias que observó en la zapatería R?

- A) 81 soles B) 85 soles C) 99 soles D) 60 soles

Solución:

i) Observemos que: $f(x) = 1 + \frac{2}{2x+1}$

ii) Hallando $\text{Ran}(f)$:

$$x \in [0, 4] = 0 \leq x \leq 4 \rightarrow 0 \leq 2x \leq 8 \rightarrow 1 \leq 2x + 1 \leq 9$$

$$\rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{2x+1} \leq 1 \rightarrow \frac{2}{9} \leq \frac{2}{2x+1} \leq 2 \rightarrow \frac{11}{9} \leq 1 + \frac{1}{2x+1} \leq 3$$

$$\rightarrow f(x) \in \left[\frac{11}{9}, 3 \right]$$

$$\rightarrow \text{Ran}(f) = \left[\frac{11}{9}, 3 \right]$$

Luego, por dato : $a = 11, b = 9, c = 3$.

$\therefore$ Pablo deberá pagar por su compra en la zapatería R, 99 soles.

Rpta.: C

4. La producción de 500 unidades de cierto artículo, le generan a una empresa un costo total de S/ 6400 y S/ 4400 de costo fijo. Considerando que todos los artículos producidos, fueron vendidos y que la función costo es lineal, determine el punto de equilibrio, sabiendo que cada artículo producido fue vendido a S/ 12,8.

A) (600,10200) B) (400,8500) C) (500,6400) D) (300,5200)

Solución:

Sea: x la cantidad de artículos producidos y vendidos.

Se sabe que:

Costo total = Costos fijos + Costos variables

Luego, por dato:

$$6400 = 4400 + 500p \rightarrow p = 4$$

$$\rightarrow C(x) = 4400 + 4x$$

$$\text{Además : } l(x) = 12,8x$$

Se sabe que el punto de equilibrio ocurre cuando : $l(x) = C(x)$

$$\rightarrow 12,8x = 4400 + 4x \rightarrow 8,8x = 4400 \rightarrow x = 500$$

$$\rightarrow C(500) = 4400 + (4)(500) = 6400$$

$\therefore$ El punto de equilibrio es (500,6400).

Rpta.: C

5. Un economista realiza un estudio sobre el comportamiento económico en la venta de un determinado producto y, concluye que los clientes demandaran 29 unidades del producto cuando el precio fue de 14 soles y 17 unidades cuando el precio fue de 22 soles. Si el economista establece que la cantidad de productos (demanda) depende de manera lineal con respecto al precio. Determine a qué precio los clientes demandaran 26 productos.

A) 16 soles B) 15 soles C) 21 soles D) 21 soles

Solución:

Sea $q(p) = ap + b$ donde q cantidad y p precio. Luego, por dato:

- $q(14) = 24 \rightarrow 14a + b = 24 \dots(I)$
- $q(22) = 17 \rightarrow 22a + b = 17 \dots(II)$

Resolviendo (I) y (II): $a = -\frac{3}{2} \wedge b = 50$

$$\rightarrow q(p) = -\frac{3}{2}p + 50$$

Para 26 productos, el precio de cada producto se obtiene de :

$$26 = -\frac{3}{2}p + 50 \rightarrow p = 16$$

$\therefore$ El precio de cada producto, es de 16 soles.

Rpta.: A

6. Lucio es un comerciante de las galerías Wilson y vende USB de la misma marca y capacidad. El ingreso en dólares depende del número de decenas de USB vendidos, y dicho ingreso está modelado por una función cuadrática. Si Lucio vende 50 USB su ingreso es de \$1500, y obtendrá el máximo ingreso cuando vende 100 USB. ¿Cuál sería el ingreso que obtendrá Lucio si vende 9 decenas de USB?

- A) \$1640 B) \$1980 C) \$1850 D) \$1760

Solución:

Sea $I(x) = ax^2 + bx + c$ donde x es el número de decenas de USB vendidos.

Por dato:

- $I(0) = 0 \rightarrow c = 0$
- $I(5) = 1500 \rightarrow 25a + 5b = 1500 \dots(*)$
- Como el ingreso máximo se obtiene cuando se vende 10 decenas de USB

$$\rightarrow 10 = -\frac{b}{2a} \rightarrow b = -2a \dots(**)$$

$$\text{De } (**) \text{ en } (*): -75a = 1500 \rightarrow a = -20$$

$$\text{En } (**) b = 400$$

$$\rightarrow I(x) = -20x^2 + 400x$$

$$\rightarrow I(9) = -20(9)^2 + (400)(9) = -1620 + 3600 = 1980.$$

$\therefore$ El ingreso que Lucio obtendrá por vender 9 decenas de USB, es de \$1980.

Rpta.: B

7. Agustín es un comerciante dedicado a la producción y venta de quesos por molde y desea conocer el comportamiento económico del queso tipo "suizo", para determinar el ingreso en equilibrio y cuántos moldes de quesos del tipo "suizo" debe producir y vender para que no le sobre ni falte productos para sus clientes el fin de semana próximo. El comportamiento de la oferta y la demanda de su producto están modelados respectivamente por las reglas $G(x) = -2x^2 + 70x + 1000$ y $F(x) = -50x + 2000$, donde x es la cantidad de decenas de moldes producidos y la unidad monetaria está en soles.

A) 100 y S/1250 B) 100 y S/1500 C) 10 y S/3000 D) 190 y S/2000

Solución:

Observemos que, dado que la función de oferta y demanda son equivalentes en el equilibrio, no sobre, ni falten equivale a equilibrio.

Entonces: $G(x) = F(x)$

$$\rightarrow -2x^2 + 70x + 1000 = -50x + 2000$$

$$\rightarrow 2x^2 - 120x + 1000 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 60x + 500 = 0$$

$$\rightarrow x = 50 \vee x = 10$$

$$\rightarrow x = 10 \text{ pues para } x = 50 \text{ tendríamos } F(50) < 0$$

Luego, debe producir 100 moldes de queso tipo "suizo", y el ingreso en el equilibrio de mercado es de 1500 soles.

Rpta.: B

8. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones según el orden presentado:

I. f definida por $f(x) = |x| - 3$; $x \in [-4, 4]$ es una función par.

II. g definida por $g(x) = \sqrt[5]{x(|x| - 3)}$ es una función impar.

III. h definida por $h(x) = \frac{2}{x^4 + 1} + x^2 - 3$; $x \in [-3, 3]$ es una función par.

A) VFV

B) FVV

C) VVF

D) FVF

Solución:

I) $f(x) = |x| - 3$; $x \in [-4, 4]$

i) $x \in \text{Dom}(f) = [-4, 4] \rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$

ii) $f(-x) = |-x| - 3 = |x| - 3 = f(x)$

De i) y ii) $f(x)$ es una función par

$\therefore$ I) es (V)

$$\text{II)} \quad g(x) = \sqrt[5]{x(|x| - 3)}$$

$$\text{i)} \quad x \in \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \rightarrow -x \in \text{Dom}(g)$$

$$\text{ii)} \quad g(-x) = \sqrt[5]{(-x)(|-x| - 3)} = -\sqrt[5]{x(|x| - 3)} = -g(x)$$

De i). y ii). $g(x)$ es una función impar

$\therefore$ II). es (V)

$$\text{III)} \quad h(x) = \frac{2}{x^4 + 1} + x^2 - 3; x \in [-3, 3]$$

$$\text{i)} \quad -3 \in \text{Dom}(h) = [-3, 3] \rightarrow -(-3) = 3 \notin \text{Dom}(h)$$

ii) Como falla i) $h(x)$ no es una función par

$\therefore$ III) es (F)

Rpta.: C

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si el conjunto $f = \{(a, c^2 - 1), (1, 3), (4, -1), (4, -a), (b, a - c), (c - 1, 5), (-3, |b| + 1)\}$ es una función, halle la suma de elementos del conjunto $\text{Dom}(f) - \text{Ran}(f)$.

A) - 5 B) 6 C) - 2 D) 4

Solución:

$$f = \{(a, c^2 - 1), (1, 3), (4, -1), (4, -a), (b, a - c), (c - 1, 5), (-3, |b| + 1)\}$$

Debe ocurrir $a = 1$

$$f = \{(1, c^2 - 1), (1, 3), (4, -1), (b, 1 - c), (c - 1, 5), (-3, |b| + 1)\}$$

$$c^2 - 1 = 3 \Rightarrow (c = 2 \text{ ó } c = -2)$$

Si $c = 2$: $f = \{(1, 3), (4, -1), (b, -1), (1, 5), (-3, |b| + 1)\}$... no es función

Si $c = -2$: $f = \{(1, 3), (4, -1), (b, 3), (-3, 5), (-3, |b| + 1)\}$

$$|b| + 1 = 5 \Rightarrow |b| = 4 \Rightarrow (b = 4 \text{ ó } b = -4)$$

Si $b = 4$: $f = \{(1, 3), (4, -1), (4, 3), (-3, 5)\}$... no es función

Si $b = -4$: $f = \{(1, 3), (4, -1), (-4, 3), (-3, 5)\}$

$$\text{Dom}(f) - \text{Ran}(f) = \{-4, -3, 1, 4\} - \{-1, 3, 5\} = \{-4, -3, 1, 4\}$$

$$\text{Piden } (-4) + (-3) + (1) + (4) = -2$$

Rpta.: C

2. Dadas las funciones $f = \{(1, b^2), (3, a + 20), (1, 16), (-2, -3), (3, a^2), (-2, b + 1)\}$ y $g = \{(b + 2, 1), (a - b, 2), (0, b)\}$, halle $\text{Ran}\left[a \frac{f^2}{g}\right]$.

A) $\{42\}$ B) $\{15\}$ C) $\{-9\}$ D) $\{45\}$

Solución:

$f = \{(1, b^2), (3, a+20), (1, 16), (-2, -3), (3, a^2), (-2, b+1)\}$ es una función entonces

$$* b+1 = -3 \Rightarrow b = -4$$

$$* a+20 = a^2 \Rightarrow a^2 - a - 20 = 0 \Rightarrow (a = -4 \text{ o } a = 5)$$

$g = \{(b+2, 1), (a-b, 2), (0, b)\}$ es función entonces

* Si $(a = -4 \text{ y } b = -4) \Rightarrow g = \{(-2, 1), (0, 2), (0, -4)\}$ no es función

* Si $(a = 5 \text{ y } b = -4) \Rightarrow g = \{(-2, 1), (9, 2), (0, -4)\}$

Las funciones son $f = \{(1, 16), (3, 25), (-2, -3)\}$ y $g = \{(-2, 1), (9, 2), (0, -4)\}$

$$\text{Dom}\left[a \frac{f^2}{g}\right] = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g = \{-2\}$$

$$\left(a \frac{f^2}{g}\right)(-2) = 5 \left(\frac{f^2}{g}\right)(-2) = 5 \frac{[f(-2)]^2}{g(-2)} = 5 \frac{(-3)^2}{1} = 45 \quad \therefore \text{Ran}\left[5 \frac{f^2}{g}\right] = \{45\}.$$

Rpta.: D

3. En el mercado, Rosana sabe que los precios de 1 kg de papa, 1 kg de zanahoria y 1 kg de tomate son a soles, c soles y b soles respectivamente. Si Rosana pagó con un billete de 20 soles el importe de comprar 5 kg de papa, 3 kg de zanahoria y 2 kg de tomate. Además el dominio de una función f definida por $f(x) = \frac{x^3+1}{\sqrt{12+x-x^2}} - \frac{x^5-x^3+1}{|x^2-4|} + \log(x-1)$ es el intervalo $\langle a, b \rangle - \{c\}$, ¿cuánto recibió Rosana de vuelto?

- A) 3 soles B) 1 sol C) 2 soles D) 4 soles

Solución:

$$f(x) = \frac{x^3+1}{\sqrt{12+x-x^2}} - \frac{x^5-x^3+1}{|x^2-4|} + \log(x-1)$$

$$\text{Dom}(f): 12+x-x^2 > 0 \text{ y } x^2-4 \neq 0 \text{ y } x-1 > 0$$

$$\text{Dom}(f): x^2-x-12 < 0 \text{ y } x^2 \neq 4 \text{ y } x > 1$$

$$\text{Dom}(f): -3 < x < 4 < 0 \text{ y } x \neq \pm 2 \text{ y } x > 1$$

$$\text{Dom}(f) = \langle 1, 4 \rangle - \{2\}$$

$$\text{Identificando: } a = 1, b = 4, c = 2$$

$$\text{Vuelto de Rosana} = 20 - [5(1) + 3(2) + 2(4)] = 20 - 19 = 1 \text{ sol}$$

Rpta.: B

4. En un examen de Estadística inferencial se presentaron m estudiantes y desaprobaron d estudiantes. Determine el número de estudiantes que aprobaron dicho examen si m representa la suma de los elementos enteros del $\text{Ran}(f)$ y d representa la suma de los dos mayores elementos enteros del $\text{Ran}(f)$ siendo la función f , definida por la regla $f(x) = \frac{9x^2 - 6}{x^2 + 4}$.

A) 18

B) 14

C) 20

D) 27

Solución:

$$\text{Sea } y = f(x) = \frac{9x^2 - 6}{x^2 + 4} \Rightarrow x^2 y + 4y = 9x^2 - 6 \Rightarrow (y - 9)x^2 = -4y - 6$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{4y+6}{y-9}} \Rightarrow -\frac{4y+6}{y-9} \geq 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq y < 9 \therefore \text{Ran}(f) = \left[-\frac{3}{2}, 9\right)$$

$$m = \text{Total de estudiantes} = (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35$$

$$d = \text{número de estudiantes desaprobados} = 8 + 7 = 15$$

$$\text{Por lo tanto, número de estudiantes aprobados} = 35 - 15 = 20$$

Rpta.: C

5. La edad de José es la suma de los elementos impares del conjunto $M = \text{Ran}(f) \cap \text{Ran}(g)$ y la edad de Junior es la suma de los elementos pares del conjunto M . Si las funciones f y g son definidas por $f(x) = 7 + 4x - x^2$ y $g(x) = 2 - 2x + x^2$ respectivamente, halle la diferencia positiva de las edades de José y Junior.

A) 9 años

B) 8 años

C) 7 años

D) 6 años

Solución:

$$f(x) = 7 + 4x - x^2 = 11 - (x - 2)^2$$

$$(x - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow -(x - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow 11 - (x - 2)^2 \leq 11$$

$$\text{Entonces } \text{Ran}(f) = \langle -\infty, 11]]$$

$$g(x) = 2 - 2x + x^2 = 1 + (x - 1)^2$$

$$(x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + (x - 1)^2 \geq 1 \text{ Entonces } \text{Ran}(g) = [1, +\infty)$$

$$\text{Por lo tanto } M = [1, 11]$$

$$\text{Edad de José : } 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 \text{ años}$$

$$\text{Edad de Junior : } 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 \text{ años}$$

$$\text{Diferencia positiva} = 6 \text{ años}$$

Rpta.: D

6. La ganancia (en cientos de soles) en función del precio p (en soles) de cierto producto que vende un comerciante está dado por $g(p) = \frac{1}{4}(-3p^2 + 60p - 236)$, $8 \leq p \leq 14$. Si p_0 es el precio donde obtiene la ganancia máxima y p_1 es el precio donde obtiene la ganancia mínima, halle el valor de $p_0 + g(p_1)$ en soles.

A) 170 soles B) 410 soles C) 1310 soles D) 230 soles

Solución:

La función $g(p) = -\frac{3}{4}p^2 + 15p - 59$, $8 \leq p \leq 14$ toma su máximo valor cuando el precio es $p_0 = -\frac{(15)}{2\left(-\frac{3}{4}\right)} = 10$ soles.

Como la función es creciente en $[8, 10]$ y decreciente en $[10, 14]$, los posibles puntos de mínimo son $p=8$ v $p=14$.

$$\text{Luego } \begin{cases} g(8) = \frac{(-3)(8-10)^2}{4} + 16 = 13 \\ g(14) = \frac{(-3)(14-10)^2}{4} + 16 = 4 \end{cases}$$

Así el mínimo valor de g se obtiene cuando $p=14$, es decir $p_1=14$, entonces $g(p_1) = 400$, por tanto $p_0 + g(p_1) = 10 + 400 = 410$ soles.

Rpta.: B

7. La agencia de viajes “Lunié travel S.A.” ofreció servicio de turismo durante algunos meses consecutivos del año 2019. Al finalizar dicho año, la utilidad promedio (en miles de dólares) fue modelada por la expresión $U(x) = -2x^2 + 28x - 2(x_0^2 - 4)$, donde x representa el número del mes en el que se brindó el servicio.

Si en el mes x_0 del año 2019 se obtuvo la utilidad máxima, determine:

- I. ¿Durante qué meses la agencia “Lunié travel S.A.” ofreció sus servicios y no tuvo pérdidas?
- II. ¿A cuántos miles de dólares ascendió la utilidad máxima?

A) De junio a octubre, 4500 dólares
 B) De enero a agosto, 14500 dólares
 C) De mayo a setiembre, 8 mil dólares
 D) De junio a setiembre, 9 mil dólares

Solución:

$$U(x) = -2x^2 + 28x - 2(x_0^2 - 4) \Rightarrow x_0 = -\frac{(28)}{2(-2)} = 7 \Rightarrow x_0 = 7$$

$$\text{Tenemos } U(x) = -2x^2 + 28x - 90 = -2(x-5)(x-9)$$

- I. Si $U(x) \geq 0 \Rightarrow -2(x-5)(x-9) \geq 0 \Rightarrow 5 \leq x \leq 9$, por lo tanto la agencia Lunié travel S.A. ofrece servicio desde mayo a setiembre del año 2019.
- II. La utilidad máxima de la agencia fue $U(7) = -2(2)(-2) = 8$ mil dólares

Rpta.: C

8. Sea f una función par definida en $I = [-a, a]$, g una función impar definida en $J = [-c, -b] \cup \langle b, c \rangle$ y $g(x) \neq 0$ en J además $0 < b < a < c$. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- i. $f \cdot g$ es impar en $I = [-a, a]$
- ii. $\text{Dom}(f/g) = [-a, -b] \cup \langle b, a \rangle$
- iii. $f + g^2$ es una función par
- iv. $f - g$ no tiene dominio igual a $[-a, a] - \langle -b, b \rangle$.

- A) FVVV B) FVFF C) FFVV D) VFVV

Solución:

$$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f/g) = I \cap J = [-a, -b] \cup \langle b, a \rangle$$

- i. $f \cdot g$ es impar en $[-a, -b] \cup \langle b, a \rangle \dots (F)$
- ii. Como $g(x) \neq 0$ en J entonces $\text{Dom}(f/g) = [-a, -b] \cup \langle b, a \rangle \dots (V)$
- iii. Si $f(x) = x^4$ y $g(x) = x$ entonces $(f + g^2)(x) = x^4 + x^2 \dots (V)$
- iv. $\text{Dom}(f - g) = [-a, -b] \cup \langle b, a \rangle \dots (V)$

Rpta.: A**EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. Halle la suma de elementos de $\text{Ran}(f+g)$, sabiendo que los conjuntos $f = \{(-3, a+b), (4, -c), (-2, -1), (-3, 6)\}$ y $g = \{(a+b, c^2-3), (6, 6), (4, -1), (-3, c), (c, -2)\}$ son funciones.

- A) 1 B) 5 C) 3 D) -4

Solución:

$f = \{(-3, a+b), (4, -c), (-2, -1), (-3, 6)\}$ es función $\Rightarrow a+b=6$

entonces $f = \{(4, -c), (-2, -1), (-3, 6)\}$

$g = \{(6, c^2 - 3), (6, 6), (4, -1), (-3, c), (c, -2)\}$ es función

$$\Rightarrow c^2 - 3 = 6 \Rightarrow (c = -3 \text{ ó } c = 3)$$

Si $c = -3$: $g = \{(6, 6), (4, -1), (-3, -3), (-3, -2)\}$ no es función

Si $c = 3$: $g = \{(6, 6), (4, -1), (-3, 3), (3, -2)\}$ y $f = \{(4, -3), (-2, -1), (-3, 6)\}$

luego $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{-3, 4\}$

$$\text{entonces } \begin{cases} (f+g)(-3) = f(-3) + g(-3) = 6 + 3 = 9 \\ (f+g)(4) = f(4) + g(4) = (-3) + (-1) = -4 \end{cases}$$

$$\therefore \text{Ran}(f+g) = \{-4, 9\} \Rightarrow (-4) + 9 = 5$$

Rpta.: B

2. Durante la hora de práctica, se juntan los estudiantes Nicolás y Fabrizio, y le piden al profesor Luis que les califique con V (verdadero) o F (falso) las siguientes afirmaciones respecto a las funciones $f = \{(0, 2), (4, 5), (-2, -1), (-3, 1), (0, a^2 - 2)\}$ y $g = \{(a, 2), (4, -3), (-2, 0), (-3, 3a)\}$:

I. El dominio de $(f - g)$ es $\{-3, -2, 0, 2, 4\}$.

II. $31 \in \text{Ran}(f^2 - 2g)$

III. El dominio de (f/g) es $\{-3, 4\}$.

¿Cómo calificó las afirmaciones de estos estudiantes, el profesor Luis?

A) FVF

B) FVV

C) VVF

D) VVV

Solución:

$f = \{(0, 2), (4, 5), (-2, -1), (-3, 1), (0, a^2 - 2)\}$ es función

$$\Rightarrow a^2 - 2 = 2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow (a = 2 \text{ o } a = -2)$$

Si $a = -2 \Rightarrow g = \{(-2, 2), (4, -3), (-2, 0), (-3, -6)\}$ no es función

Si $a = 2 \Rightarrow g = \{(2, 2), (4, -3), (-2, 0), (-3, 6)\}$

$$\text{Tenemos } \begin{cases} f = \{(0, 2), (4, 5), (-2, -1), (-3, 1)\} \\ g = \{(2, 2), (4, -3), (-2, 0), (-3, 6)\} \end{cases}$$

I. $\text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cup \text{Dom}(g) = \{-3, -2, 4\} \dots$ (F)

II. $(f^2 - 2g)(4) = (f^2)(4) - 2.g(4) = [f(4)]^2 - 2.g(4) = 25 - 2(-3) = 31 \dots$ (V)

III. $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \{-3, -2, 4\} - \{x / g(x) = 0\} = \{-3, -2, 4\} - \{-2\} = \{-3, 4\} \dots$ (V)

Rpta.: B

3. Una empresa fabrica equipos de sonido y los vende a 80 dólares cada uno. Si el costo total de x equipos de sonido está representado por la función $C(x) = 43x + 1850$, ¿cuál es la menor cantidad de equipos de sonido que deben venderse para obtener ganancia?

A) 69 B) 78 C) 51 D) 46

Solución:

$$U(x) = (80)x - (43x + 1850)$$

$$U(x) = 37x - 1850$$

$$\text{Hay ganancia} \Leftrightarrow U(x) > 0 \Leftrightarrow 37x - 1850 > 0 \Leftrightarrow x > 50$$

Por lo tanto, como mínimo se deben vender 51 equipos de sonido para obtener ganancia.

Rpta.: C

4. Una compañía compró una pala mecánica excavadora a 40 000 dólares, después de 4 años de uso la pala mecánica tiene un valor de 28 000 dólares. Si la depreciación monetaria de la pala mecánica se modela por una función lineal, ¿cuántos miles de dólares sería el precio de la pala mecánica al cabo de 10 años de uso?

A) 15 B) 12 C) 8,5 D) 10

Solución:

Número de años de uso de la pala mecánica: t

Precio de la pala mecánica a los t años: $P(t) = mt + b$

$$\text{Para } t = 0: P(0) = m(0) + b \Rightarrow 40000 = b \Rightarrow P(t) = mt + 40000$$

$$\text{Para } t = 4: P(4) = m(4) + 40000 \Rightarrow 4m + 40000 = 28000 \Rightarrow m = -3000$$

$$\therefore P(t) = -3000t + 40000$$

$$\text{Si } t = 10: P(10) = -3000(10) + 40000 = 10000$$

Después de 10 años de uso, la pala mecánica costará 10 mil dólares.

Rpta.: D

5. Sea f una función cuadrática tal que $f(2) = -3$; $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
- I. La función f es impar.
 - II. El máximo valor de la función es 1.
 - III. Los ceros de la función son 1 y -1 .
- en el orden dado.

A) FVV B) FFV C) FFF D) FVF

Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(2) = 4a + 2b + c = -3 \\ f(0) = c = 1 \\ f(1) = a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ 2a + 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow (a = -1, b = 0)$$

$$f(x) = -x^2 + 1$$

I. $f(-x) = -(-x)^2 + 1 = -x^2 + 1 = f(x)$ entonces f es par ... (F)

II. $h = -\frac{f(0)}{2(-1)} = 0$ entonces $f(0) = 1 =$ máximo valor de la función ... (V)

III. $f(x) = -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x = 1, x = -1)$... ceros de la función f ... (V)

Rpta.: A

6. Dadas las funciones: $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = (x - 2)^2 - 1$, halle el conjunto de valores de x , para el cual $f(x)$ no es menor que $g(x)$.

A) $\langle 1, 2 \rangle$

B) $\langle 1, 2]$

C) $[-1, 2]$

D) $[1, 2]$

Solución:

Por dato : $f(x)$ no es menor que $g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x)$

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1 \geq g(x) = (x - 2)^2 - 1$$

$$0 \geq 2x^2 - 6x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Por lo tanto $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [1, 2]$.

Rpta.: D

7. La tarifa de un estacionamiento ubicado en San Isidro es de S/ A por hora y por cada minuto adicional pasada la hora cobra $\overline{B0}$ céntimos, donde A es el mayor elemento entero del dominio de la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & 1 < x \leq 2 \\ x^2 + 1, & 2 < x < 7 \end{cases}$ y B es el menor elemento entero del rango de f . Si el ticket de ingreso de un auto a dicho estacionamiento marca 8 a.m., ¿cuánto fue el pago total que hizo esa persona cuyo ticket de salida marca 11:10 a.m.?

A) S/ 20

B) S/ 22

C) S/ 24

D) S/ 19

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & 1 < x \leq 2 \\ x^2 + 1, & 2 < x < 7 \end{cases}$$

El dominio de f está dado por $\langle 1, 2 \rangle \cup \langle 2, 7 \rangle$.

luego el mayor elemento entero del dominio es $A = 6$,

Así la tarifa por hora es 6 soles.

Hallando el rango de f :

$$\text{*como } 1 < x \leq 2 \Rightarrow 2 < 2x \leq 4 \Rightarrow 1 < 2x - 1 \leq 3 \therefore \text{Ran}(f_1) = \langle 1, 3 \rangle$$

$$\text{*como } 2 < x < 7 \Rightarrow 4 < x^2 \leq 49 \Rightarrow 5 < x^2 + 1 \leq 50 \therefore \text{Ran}(f_2) = \langle 5, 50 \rangle$$

$$\text{Por tanto } \text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2) = \langle 1, 3 \rangle \cup \langle 5, 50 \rangle$$

luego el menor elemento entero del $\text{Ran} f$ es $B = 2$.

Así por cada minuto adicional a la hora pagará 20 céntimos.

Como el auto se quedó 3 horas y 10 minutos,

pagó $3(6) + 10(0,20) = 20$ soles.

Rpta: A

8. La demanda en el mercado de cierto producto es de q unidades cuando el precio fijado al consumidor es de p soles, están relacionados por $12p = 680 - 2q$. Se sabe que el costo en soles de producir q unidades está dada por $C(q) = 300 + 6q$. ¿Qué precio p por unidad deberá fijarse al consumidor de tal manera que la utilidad sea máxima?

A) S/ 31,33

B) S/ 33,31

C) S/ 30,60

D) S/ 35,85

Solución:

$$\text{De la relación } 12p = 680 - 2q \Rightarrow p = \frac{680 - 2q}{12}$$

$$U(q) = I(q) - C(q) = qp - (300 + 6q) = q\left(\frac{680 - 2q}{12}\right) - 300 - 6q$$

$$U(q) = \frac{680q - 2q^2 - 3600 - 72q}{12} = \frac{-2}{12}q^2 + \frac{608}{12}q - \frac{3600}{12}$$

$$\text{Luego U es máximo cuando } q = \frac{-\left(\frac{608}{12}\right)}{2\left(\frac{-2}{12}\right)} = \frac{608}{4} = 152$$

$$\text{Así el precio debe ser } p = \frac{680 - 2q}{12} = \frac{680 - 2(152)}{12} = 31,33\ldots$$

Por lo tanto, la utilidad es máxima cuando el precio es S/31.

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si la siguiente relación $f = \{(3;0), (0;2), (0;b-1), (3;a), (2;a+b), (b-4;6), (-b;a)\}$ es una función en $\mathbb{R}$, halle el valor de $L = f(f(-3) + f(2)) - f(-1)$.

A) - 3 B) - 4 C) - 6 D) - 2 E) - 8

Solución:

$$a = 0 \rightarrow f = \{(3;0), (0;2), (0;b-1), (2;b), (b-4;6), (-b;0)\}$$

$$2 = b - 1 \rightarrow b = 3 \rightarrow f = \{(3;0), (0;2), (2;3), (-1;6), (-3;0)\}$$

$$f(-3) = 0, f(2) = 3 \rightarrow f(f(-3) + f(2)) = f(0 + 3) = f(3) = 0$$

$$f(-1) = 6$$

$$\therefore L = f(f(-3) + f(2)) - f(-1) = 0 - 6 = -6.$$

Rpta.: C

2. Marco desea fabricar una caja sin tapa de forma paralelepípedo rectangular de 120 m^3 , como se muestra en la figura. El costo de los materiales usados para hacer la base y los lados de dicha caja son S/ 130 y S/ 50, por metro cuadrado, respectivamente. Determine la regla de correspondencia del costo de los materiales "C" en función del ancho de la base.

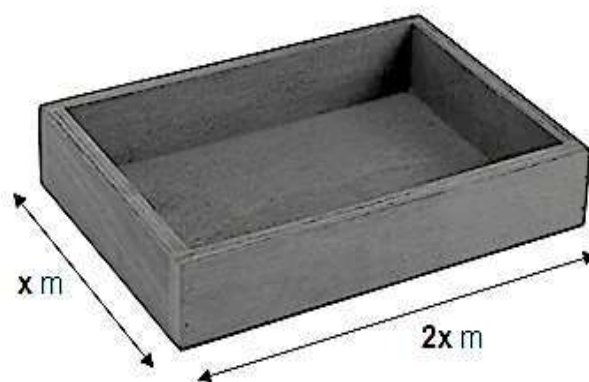
A) $C(x) = 200x^2 + \frac{12000}{x}$, con $x > 0$

B) $C(x) = 260x^2 + \frac{18000}{x}$, con $x > 0$

C) $C(x) = 250x^2 + \frac{10000}{x}$, con $x > 0$

D) $C(x) = 300x^2 + \frac{14000}{x}$, con $x > 0$

E) $C(x) = 260x^2 + \frac{18000}{x}$, con $x > 0$



Solución:

Sea h la altura de la caja en metros.

Costo, en soles, de los materiales para la base: $130(x)(2x) = 260x^2$

Costo, en soles, de los materiales para los lados: $50[2(xh) + 2(2x)(h)]$

→ Costo total: $C(x) = 260x^2 + 50[2(xh) + 2(2x)(h)]$

→ Costo total: $C(x) = 260x^2 + 300xh \quad \dots(1)$

Pero

$$V_{\text{CAJA}} = 120 \text{ m}^3 \rightarrow (x)(2x)(h) = 120$$

$$\rightarrow x^2 h = 60 \rightarrow h = \frac{60}{x^2} \quad \dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1), se tiene

$$\rightarrow C(x) = 260x^2 + 300x \left(\frac{60}{x^2} \right) = 260x^2 + \frac{18000}{x}$$

$$\therefore C(x) = 260x^2 + \frac{18\,000}{x}, \text{ con } x > 0.$$

Rpta.: E

3. En un valle de la región Arequipa, se ha utilizado por primera vez los drones para mejorar los procesos productivos de ciertos cultivos. En un determinado momento, uno de esos drones se desplaza en un plano determinado por los ejes coordenados (cada unidad en dichos ejes representa 1 m) siguiendo un trayecto como se indica en la gráfica de la función $f(x) = y$, halle la longitud del trayecto que recorre dicho dron.

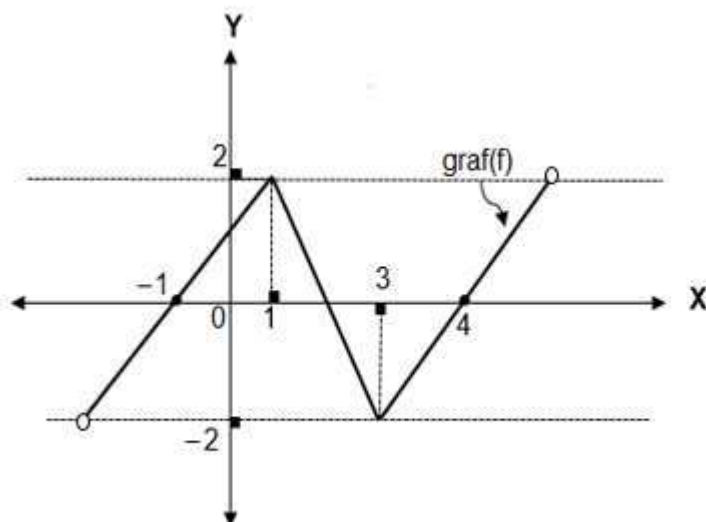
A) $4(2\sqrt{2} + \sqrt{5}) \text{ m}$

B) $2(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) \text{ m}$

C) $4(3\sqrt{2} + \sqrt{5}) \text{ m}$

D) $3(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \text{ m}$

E) $4(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \text{ m}$



Solución:

* Determinando $f_1(x) = y = px + q$:

Como $(-1; 0) \in \text{graf}(f_1)$ y $(1; 2) \in \text{graf}(f_1)$ entonces la pendiente es

$$m_1 = \frac{2-0}{1-(-1)} = 1$$

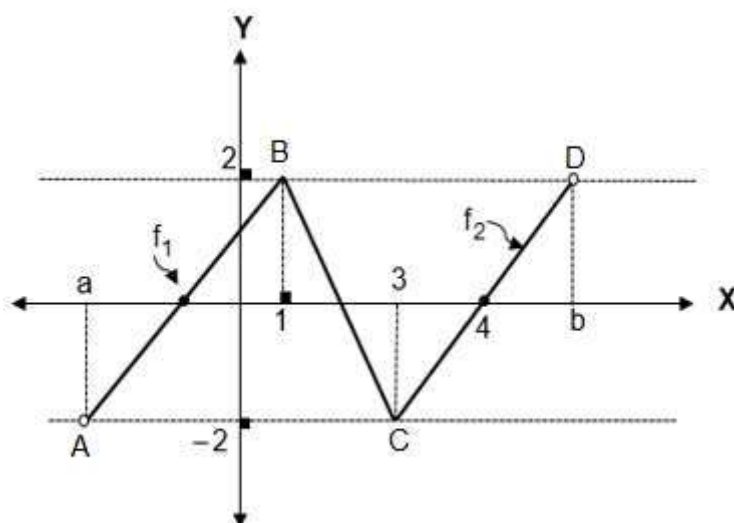
$$\rightarrow y - 2 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$\rightarrow y = x + 1 \rightarrow f_1(x) = x + 1$$

Luego

$$f_1(a) = -2 \rightarrow a + 1 = -2$$

$$\rightarrow a = -3 \text{ pero } (a; -2) \notin \text{graf}(f)$$



** Determinando $f_2(x) = y = rx + s$:

Como $(3; -2) \in \text{graf}(f_2)$ y $(4; 0) \in \text{graf}(f_2)$ entonces la pendiente es $m_2 = \frac{0 - (-2)}{4 - 3} = 2$

$$\rightarrow y - (-2) = 2 \cdot (x - 3) \rightarrow y = 2x - 8 \rightarrow f_2(x) = 2x - 8$$

Luego $f_2(b) = 2 \rightarrow 2b - 8 = 2 \rightarrow b = 5$ pero $(b; 2) \notin \text{graf}(f)$

$$\rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -3; 5 \rangle$$

$$AB = 4\sqrt{2} \text{ m}, BC = 2\sqrt{5} \text{ m}, CD = 2\sqrt{5} \text{ m}$$

$$\therefore \text{Longitud del trayecto} = AB + BC + CD = 4(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \text{ m.}$$

Rpta.: E

4. Con respecto a la función real f definida por $f(x) = x^2 - 6x - 14$, con $x \geq 4$, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

- I. La ecuación $f(x) = 0$ no tiene soluciones reales.
- II. La gráfica de la función f interseca al eje Y en el punto $(0, 14)$
- III. La suma de los tres mayores elementos enteros del complemento del $\text{Ran}(f)$ es -60 .
- IV. El valor mínimo de la función f es -22 .

- A) I y II B) II y III C) III y IV D) I y III E) I, II y III

Solución:

I. Es falsa.

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x - 14 = 0 \rightarrow x = 3 - \sqrt{23} \vee x = 3 + \sqrt{23} \text{ (ceros reales)}$$

II. Es falsa.

Como $x \geq 4$, la gráfica de f no interseca al eje Y .

III. Es verdadera.

$$f(x) = x^2 - 6x - 14 = (x - 3)^2 - 23$$

$$\text{De } x \geq 4 \rightarrow x - 3 \geq 1 \rightarrow (x - 3)^2 \geq 1$$

$$\rightarrow (x - 3)^2 - 23 \geq -22$$

$$\rightarrow f(x) \geq -22 \rightarrow \text{Ran}(f) = [-22; +\infty)$$

$$\rightarrow (\text{Ran}(f))^C = \langle -\infty; 22 \rangle \cap \mathbb{Z}^+ = \{-21; -20; -19; \dots\}$$

IV. Es verdadera.

Rpta.: C

5. Kittzay tiene una empresa dedicada a fabricar chompas. Si su ingreso semanal, en soles, está determinado por la función $I(x) = mx^2 + nx$, donde x representa el número de chompas vendidas en una semana. Si vende 200 chompas en una semana, su ingreso es de S/ 60 000 ; además, la venta de 400 chompas semanales le genera a Kittzay un ingreso máximo. Determine el ingreso, en soles, que obtendrá Kittzay en una semana en la que se venden 300 chompas.

A) 75 100 B) 75 300 C) 75 000 D) 75 400 E) 77 200

Solución:

$$I(x) = mx^2 + nx$$

De los datos, se tiene

$$I(200) = m(200)^2 + n(200) = 60\,000 \quad \dots(1)$$

$$\rightarrow \text{El valor de "x" que genera el ingreso máximo es } x = -\frac{n}{2m} = 400$$

$$\rightarrow -\frac{n}{2m} = 400 \rightarrow n = -800m \quad \dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1), se tiene

$$m(200)^2 + (-800m)(200) = 60\,000$$

$$40\,000m - 160\,000m = 60\,000 \rightarrow m = -\frac{1}{2} \rightarrow n = 400$$

$$\rightarrow I(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + 400x$$

$$\rightarrow I(300) = \left(-\frac{1}{2}\right)(300)^2 + 400(300) = 75\,000$$

$\therefore$ El ingreso que obtendrá Kittzay en la venta de 300 chompas es de S/ 75 000.

Rpta.: C

6. En la figura, se muestra el diseño de una ventana. Si el perímetro de dicha ventana es de 2 metros, ¿ cuánto deberá medir el ancho de dicha ventana para que deje pasar la máxima cantidad de luz?

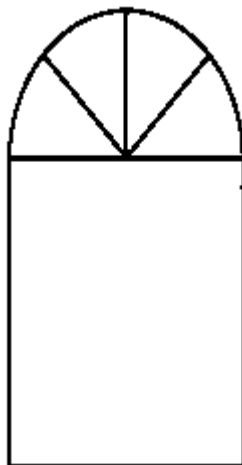
A) $\left(\frac{4}{\pi + 4}\right) \text{ m}$

B) $\left(\frac{4}{2\pi + 1}\right) \text{ m}$

C) $\left(\frac{2}{\pi + 4}\right) \text{ m}$

D) $\left(\frac{10}{\pi + 4}\right) \text{ m}$

E) $\left(\frac{6}{\pi - 2}\right) \text{ m}$



Solución:

$$\begin{aligned} \text{i) Perímetro} &= 2 \text{ m} \rightarrow 2y + x + \frac{\pi x}{2} = 2 \\ &\rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} \quad \dots(1) \end{aligned}$$

$$\text{ii) Área}_{\text{VENTANA}} = xy + \frac{\pi}{8}x^2 \quad \dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\text{Área}_{\text{VENTANA}} = A(x) = x \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\pi}{8}x^2 = x - \frac{1}{8}(\pi + 4)x^2$$

$A(x)$ debe ser máximo para que la ventana deje pasar la máxima cantidad de luz.

$$\rightarrow x = \frac{-(1)}{2 \left[-\frac{1(\pi + 4)}{8} \right]} = \frac{4}{\pi + 4}.$$

$$\therefore \text{El ancho mide } \left(\frac{4}{\pi + 4} \right) \text{ m.}$$

Rpta.: A

7. Calcule la suma de los elementos enteros del rango de la siguiente función real $f(x) = \left| \left| 5 - |x - 3| \right| - 2 \right| + 1$, con $x \in [-2; 1]$.

A) 3 B) 7 C) 4 D) 5 E) 6

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Como } -2 \leq x \leq 1 &\rightarrow -5 \leq x - 3 \leq -2 \\ \rightarrow 2 \leq |x - 3| \leq 5 &\rightarrow -5 \leq -|x - 3| \leq -2 \\ &\rightarrow 0 \leq 5 - |x - 3| \leq 3 \\ &\rightarrow 0 \leq \left| 5 - |x - 3| \right| \leq 3 \\ &\rightarrow -2 \leq \left| 5 - |x - 3| \right| - 2 \leq 1 \\ &\rightarrow 0 \leq \left| \left| 5 - |x - 3| \right| - 2 \right| \leq 2 \\ &\rightarrow 1 \leq \underbrace{\left| \left| 5 - |x - 3| \right| - 2 \right| + 1}_{f(x)} \leq 3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{Ran}(f) = [1; 3] \cap \mathbb{Z} = \{1; 2; 3\}$$

$\therefore$ La suma de los elementos enteros del rango de f es 6.

Rpta.: E

8. ¿Cuáles de las siguientes funciones reales son pares?

I. $f(x) = 3x|x| - 5x^7 \sin x$.

II. $g(x) = x^2|x| + x^8 \cos x$.

III. $h(x) = \frac{5}{x^6 + 3} + x^{12} + x^2 - 5$, $x \in [-2; 2]$.

IV. $t(x) = x^2 + x^4$, $x \in [-2; 5]$.

A) h y t B) f y h C) f y g D) g y h E) g y t

Solución:

I. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f(x) = 3x|x| - 5x^7 \sin x$$

$$f(-x) = 3(-x)|-x| - 5(-x)^7 \sin(-x) = -3x|x| - 5x^7 \sin x \neq f(x)$$

$\rightarrow f$ no es una función par.

II. $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$

$$g(x) = x^2 |x| + x^8 \cos x$$

$$g(-x) = (-x)^2 |-x| + (-x)^8 \cos(-x) = x^2 |x| + x^8 \cos x = g(x)$$

→ g es una función par.

III. $\text{Dom}(h) = [-2; 2]$

$$h(-x) = \frac{5}{(-x)^6 + 3} + (-x)^{12} + (-x)^2 - 5 = \frac{5}{x^6 + 3} + x^{12} + x^2 - 5 = h(x)$$

→ h es una función par.

IV. $\text{Dom}(t) = [-2; 5] \rightarrow -5 \notin \text{Dom}(t) \rightarrow t$ no es una función par.

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dado el conjunto $T = \{1; 2; 4; 6; 7; 8; 12; 19\}$ y las funciones

$$f = \{(8; 5); (6; 19); (8; m+3); (7; n); (12; p+5); (12; 6)\} \text{ y } g = \{(x, y) \in T \times T / y = px^2 + kx + n\},$$

de modo que $f(8) = g(1)$, $f(6) = g(2)$, calcule el valor de $L = -m - n + p + k$.

A) 12

B) 14

C) 13

D) 17

E) 15

Solución:

- i) Como f es una función

$$m+3=5 \rightarrow m=2 \text{ y } p+5=6 \rightarrow p=1$$

ii) $g(x) = y = x^2 + kx + n$

$$f(8) = g(1) \rightarrow 5 = 1 + k + n \quad \dots(1)$$

$$f(6) = g(2) \rightarrow 19 = 4 + 2k + n \quad \dots(2)$$

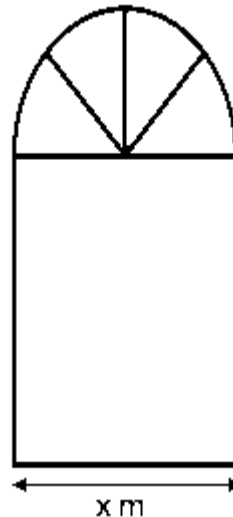
De (1) y (2), resulta $k=11$, $n=-7$

∴ El valor de L es 17.

Rpta.: D

2. En la figura, se muestra un diseño de una ventana de 8m^2 de área. Si $p(x)$ modela el perímetro, en metros, de dicha ventana en función de su ancho " x ", ¿cuánto medirá el perímetro de dicha ventana si su ancho mide 4 metros?

- A) $(8 + \pi)\text{ m}$
 B) $(10 + \pi)\text{ m}$
 C) $(12 + 3\pi)\text{ m}$
 D) $(6 + 3\pi)\text{ m}$
 E) $(7 + 3\pi)\text{ m}$



Solución:

$$A_{\text{VENTANA}} = A_{\text{Rectángulo}} + A_{\text{semicírculo}}$$

$$8 = xy + \frac{\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} \rightarrow 64 = 8xy + \pi x^2$$

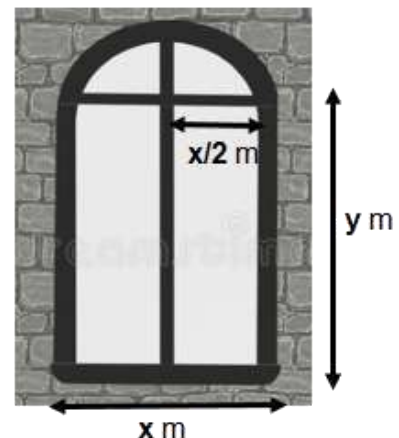
$$64 = 8xy + \pi x^2 \rightarrow y = \frac{64 - \pi x^2}{8x}$$

$$\text{Perímetro: } p(x) = x + 2\left(\frac{64 - \pi x^2}{8x}\right) + \frac{\pi x}{2}$$

$$\rightarrow p(x) = \frac{(\pi + 4)x}{4} + \frac{16}{x}$$

$$x = 4 \rightarrow p(4) = \frac{(\pi + 4)4}{4} + \frac{16}{4} = \pi + 8$$

$\therefore$ El perímetro es $(\pi + 8)\text{ m}$ cuando el ancho mide 4m.



Rpta.: A

3. El administrador de un centro de entretenimiento para niños, ha notado que la asistencia disminuye en forma lineal con el precio. Además, sabe que si cobra 40 soles la entrada, asistirían 20 niños; pero si cobra 45 soles, asistirían 15 niños. Si $f(x)$ representa la regla de correspondencia que determina el número de asistentes en función del precio x , en soles, determine el dominio de la función g , definida por $g(x) = \sqrt{f(x) + 30}$.

A) $\langle 0, 90 \rangle$ B) $\langle 0, 60]$ C) $\langle 0, 120 \rangle$ D) $\langle 0, 60 \rangle$ E) $\langle 0, 90]$

Solución:

El número de asistentes está modelado por la siguiente función

i) $f(x) = ax + b, x > 0$

$$x = 40 : f(40) = 40a + b = 20$$

$$x = 45 : f(45) = 45a + b = 15$$

$$\rightarrow a = -1, b = 60 \rightarrow f(x) = -x + 60$$

ii) $g(x) = \sqrt{f(x) + 30} = \sqrt{-x + 60 + 30} = \sqrt{-x + 90}$

$$x \in \text{Dom}(g) \leftrightarrow -x + 90 > 0 \rightarrow x < 90, x > 0,$$

$$\therefore \text{Dom}(g) = \langle 0; 90 \rangle$$

Rpta.: E

4. La función demanda para la producción de chalinas está representada por $p = 1000 - 2q$, donde q es el precio, en soles, por unidad cuando p unidades son demandadas por los consumidores mensualmente. Si se vende todo lo producido, determine el nivel de producción que maximiza el ingreso total y determine este ingreso, respectivamente.

A) 250 chalinas y 125 000 soles

B) 240 chalinas y 160 000 soles

C) 200 chalinas y 128 000 soles

D) 230 chalinas y 140 000 soles

E) 260 chalinas y 130 000 soles

Solución:

Ingreso = (Nº de unidades vendidas) · (Precio unitario)

$$I(q) = (1000 - 2q)q$$

$$I(q) = 1000q - 2q^2 \rightarrow I(q) \text{ es máximo en el vértice } (q; I(q))$$

donde

$$q = \frac{-b}{2a} = \frac{-1000}{2(-2)} = 250$$

$$I(250) = 1000 \cdot (250) - 10(250)^2 = 125\,000.$$

∴ El ingreso máximo es de S/ 125 000 con un nivel de producción de 250 chalinas.

Rpta.: A

5. Determine el rango de la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{1 - \left| \frac{x}{4} \right|}{1 + \left| \frac{x}{4} \right|}.$$

- A) $\langle -1; 1]$ B) $\langle -1; 2]$ C) $\langle -1; 1 \rangle$ D) $[-1; 1]$ E) $[-1; 1 \rangle$

Solución:

$$f(x) = \frac{1 - \left| \frac{x}{4} \right|}{1 + \left| \frac{x}{4} \right|} = \begin{cases} \frac{4-x}{4+x}, & x \geq 0 \\ \frac{4+x}{4-x}, & x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{8}{4+x} - 1, & x \geq 0 \\ f_2(x) = \frac{-8}{4-x} - 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } x \geq 0 &\rightarrow x+4 \geq 4 \rightarrow 0 < \frac{1}{x+4} \leq \frac{1}{4} \rightarrow 0 < \frac{8}{x+4} \leq 2 \rightarrow -1 < \frac{8}{x+4} - 1 \leq 1 \rightarrow f_1(x) \in \langle -1; 1] \\ \text{ii) } x < 0 &\rightarrow x-4 < -4 \rightarrow 0 > \frac{1}{x-4} > \frac{-1}{4} \rightarrow 0 < \frac{-8}{x-4} < 2 \rightarrow -1 < \frac{-8}{x-4} - 1 \leq 1 \rightarrow f_2(x) \in \langle -1; 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2) = \langle -1; 1]$$

Rpta.: A

6. En la figura, se muestra la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = a + \sqrt{x+b}; \{a, b\} \subseteq \mathbb{Z}^+.$$

Calcule el valor de $L = \frac{a+2b+3k}{f(5) \cdot (1-\sqrt{6})}$.

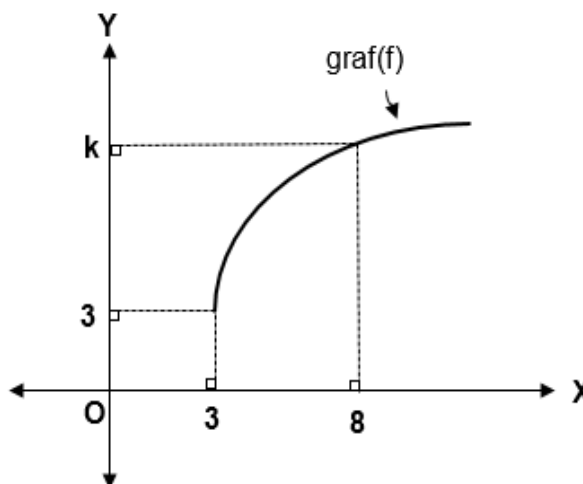
A) 1

B) -3

C) -2

D) 3

E) 4



Solución:

De la gráfica de “ f ”, se tiene

$$\text{Dom}(f) = [3; +\infty) \rightarrow x \geq 3$$

$$\text{Ran}(f) = [3; +\infty) \rightarrow f(x) = y \geq 3$$

El menor valor de $f(x)$ ocurre para $x = 3$.

$$\rightarrow f(3) = a + \sqrt{3+b} = 3 \wedge (a \in \mathbb{Z}^+, b \in \mathbb{Z}^+)$$

$$\rightarrow a = 1 \wedge b = 1 \rightarrow f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$$

$$\rightarrow f(5) = \sqrt{6} + 1$$

$$\rightarrow f(8) = 4 \rightarrow k = 4$$

$$\rightarrow L = \frac{a+2b+3k}{f(5) \cdot (1-\sqrt{6})} = \frac{1+2+12}{-(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)} = -3$$

$\therefore$ El valor de L es -3 .

Rpta.: B

7. Halle el mayor elemento del rango de la función f definida por

$$f(x) = \frac{5x+1}{25x^2+1}, \text{ con } x \in \left\langle -\frac{1}{5}; +\infty \right\rangle.$$

A) $2\sqrt{2}+2$ B) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ C) $3\sqrt{2}+4$ D) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}+4}{2}$

Solución:

Sea $a = 5x+1$. Como $x > -\frac{1}{5} \rightarrow a > 0$.

Reemplazando en la función, se tiene lo siguiente:

$$f(x) = \frac{a}{a^2 - 2a + 2} = \frac{1}{a - 2 + \frac{2}{a}}$$

Pero

$$a + \frac{2}{a} = \sqrt{2} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{a} \right) \geq 2\sqrt{2}$$

Entonces,

$$f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$\therefore$ El mayor elemento del rango de f es $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Rpta.: B

8. ¿Cuáles de las siguientes funciones reales son impares?

I. $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

II. $g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

III. $h(x) = \left(x|x| - \frac{4}{x} \right) \operatorname{sen}(x^2)$

IV. $t(x) = |x+4| - |x-4|, x \in \langle -2; 8 \rangle$

A) g y t B) g y h C) f y g D) h y t E) f y t

Solución:

I. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f(x) = \cos x - \text{sen} x$$

$$f(-x) = \cos(-x) - \text{sen}(-x) = \cos x + \text{sen} x \neq f(x)$$

→ f no es una función impar.

II. $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$g(-x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} = -g(x)$$

→ g es una función impar.

III. $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$

$$h(x) = \left(x|x| - \frac{4}{x} \right) \text{sen}(x^2)$$

$$h(-x) = \left((-x)|-x| - \frac{4}{-x} \right) \text{sen}((-x)^2) = \left(-x|x| + \frac{4}{x} \right) \text{sen} x^2 = -\left(x|x| - \frac{4}{x} \right) \text{sen} x^2 = -h(x)$$

→ h es una función impar.

IV. $\text{Dom}(t) = \langle -2; 8 \rangle \rightarrow -7 \notin \text{Dom}(t) \rightarrow t$ no es una función impar.

Rpta.: B

Álgebra

EJERCICIOS

1. Determine los valores de a y b para que las siguientes relaciones $f = \{(a, b^2 - 6), (-1, 5), (b + 2, 1), (a, 3)\}$ y $g = \{(4, a^2 + 2), (b + 1, 3), (a, -2), (0, -5)\}$ sean funciones. Calcule el valor numérico de $a^3 + b$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Solución:

$f = \{(a, b^2 - 6), (-1, 5), (b + 2, 1), (a, 3)\}$ es función

$$b^2 - 6 = 3 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow (b = 3 \text{ ó } b = -3)$$

Si $b = -3$: $f = \{(a, 3), (-1, 5), (-1, 1)\}$ no es función

Si $b = 3$: $f = \{(a, 3), (-1, 5), (5, 1)\}$ si es función

Para $b = 3$: $g = \{(4, a^2 + 2), (b + 1, 3), (a, -2), (0, -5)\}$ debe ser función

entonces $g = \{(4, a^2 + 2), (4, 3), (a, -2), (0, -5)\}$

$$a^2 + 2 = 3 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow (a = 1 \text{ ó } a = -1)$$

Si $a = -1$: $g = \{(4, 3), (-1, -2), (0, -5)\}$ es función pero $f = \{(a, 3), (-1, 5), (5, 1)\}$ no es función

Si $a = 1$: $g = \{(4, 3), (1, -2), (0, -5)\}$ y $f = \{(1, 3), (-1, 5), (5, 1)\}$ son funciones

$$\text{Piden } a^3 + b = 1 + 3 = 4$$

Rpta.: C

2. Dadas las funciones reales f y g definidas por $f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2} + \frac{2}{x-1}$ y $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^2 - 3} - 1} - \sqrt{x}$, determine la cantidad de elementos enteros de $W = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

A) 3 B) 5 C) 6 D) 9 E) 10

Solución:

$$f(x) = \sqrt{8+2x-x^2} + \frac{2}{x-1}$$

$$((x+2)(4-x) \geq 0 \text{ y } x-1 \neq 0) \Rightarrow ((x+2)(x-4) \leq 0 \text{ y } x \neq 1)$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = [-2, 4] - \{1\}$$

$$g(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt[3]{x^2-3}-1} - \sqrt{x}$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2-3} \neq 1 \wedge x \geq 0\right) \Leftrightarrow (x^2-3 \neq 1 \wedge x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 \neq 4 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow (x \neq \pm 2 \wedge x \geq 0) \therefore \text{Dom}(g) = [0, +\infty) - \{2\}$$

$$W = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [0, 4] - \{1, 2\}$$

$$\text{entonces } W \cap \mathbb{Z} = \{0, 3, 4\}$$

Rpta.: A

3. Determine el rango de la función real f definida por $f(x) = 4 - (x-3)^2$ con $x < 5$.

A) $[1, 9]$ B) $\langle -4, 0]$ C) $\langle -\infty, 4]$ D) $\langle -4, 4\rangle$ E) $[0, 4\rangle$

Solución:

$$x < 5 \Rightarrow x-3 < 2 \Rightarrow (x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow -(x-3)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 4 - (x-3)^2 \leq 4 \Rightarrow f(x) \leq 4, \forall x < 5$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \langle -\infty, 4]$$

Rpta.: C

4. Una familia decide ir al cine donde la entrada general tiene un costo de 8 soles. El número de integrantes de dicha familia coincide con el número de elementos enteros del rango de la función $f(x) = 6 - |x-3|$ con $x \in [-2, 5]$, ¿cuánto pagó dicha familia para entrar al cine?

A) 28 soles B) 24 soles C) 55 soles D) 48 soles E) 45 soles

Solución:

$$-2 \leq x \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq |x-3| \leq 5$$

$$\Rightarrow -5 \leq -|x-3| \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 6 - |x-3| \leq 6$$

$$\text{Ran}(f) \cap \mathbb{Z} = [1, 6] \cap \mathbb{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{La familia pagó } 6 \times 8 = 48 \text{ soles.}$$

Rpta.: D

5. El azúcar tiene un costo de 3 soles para cantidades hasta 50 kg y de 2 soles el kg en el caso que las cantidades excedan los 50 kg. Determine la función $C(x)$ que representa la cantidad de soles que se paga por x kg de azúcar y halle el costo de comprar 100 kg de azúcar.

A) 230 soles B) 200 soles C) 150 soles D) 180 soles E) 250 soles

Solución:

$$C(x) = \begin{cases} 3x & , x \leq 50 \\ 3(50) + 2(x - 50) & , x > 50 \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} 3x & , x \leq 50 \\ 2x + 50 & , x > 50 \end{cases}$$

$$C(100) = 2(100) + 50 = 250 \text{ soles}$$

Rpta.: E

6. Gladys es una empresaria textil del emporio comercial de Gamarra, dedicada a la producción y venta de polos deportivos del cual se sabe lo siguiente: la utilidad y el ingreso en miles de soles está dado por el menor y mayor coeficiente respectivamente de la función lineal f tal que $f\left(f\left(\frac{7}{x}\right)\right) = \frac{30x + 567}{x}$, $x \neq 0$. Determine el costo total de producción de tal artículo.

A) 7000 soles B) 6000 soles C) 9000 soles D) 12000 soles E) 3000 soles

Solución:

$$f\left(f\left(\frac{7}{x}\right)\right) = \frac{567 + 30x}{x}, x \neq 0 \Rightarrow f\left(f\left(\frac{7}{x}\right)\right) = 81 \cdot \frac{7}{x} + 30, x \neq 0$$

$$\Rightarrow f(f(x)) = 81x + 30, x \neq 0$$

$$\text{Si } f(x) = ax + b \Rightarrow f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + b(a + 1)$$

$$\Rightarrow (a^2 = 81 \wedge b(a + 1) = 30)$$

$$\Rightarrow \left((a = 9 \wedge b = 3) \text{ ó } (a = -9 \wedge b = \frac{-15}{4}) \right) \therefore f(x) = 9x + 3$$

Entonces la Utilidad es de 3000 soles.

El ingreso es de 9000 soles.

El costo es de 6000 soles

Rpta.: B

7. Una sociedad mundial de profesionales que se constituyó originalmente con 10 miembros tiene un reglamento que establece que al principio de cada año cada miembro puede invitar a 2 personas para que se afilien. Si $N(t)$ es la expresión que representa la cantidad de miembros que tendría la sociedad al cabo de t años suponiendo que cada miembro utilizó ese reglamento, ¿en cuántos años $N(t)$ será igual a 196830 miembros?

A) 9 B) 7 C) 10 D) 8 E) 5

Solución:

tiempo	$N(t)$
0	10
1	$10 + 10(2) = 30 = 3^1(10)$
2	$30 + 30(2) = 90 = 3^2(10)$
3	$90 + 90(2) = 270 = 3^3(10)$

$$t \quad 3^t(10)$$
$$N(t) = 10(3^t) = 196830 \Rightarrow t = 9$$

Rpta.: A

8. Determine el valor de verdadero (V) o falso (F) de las siguientes afirmaciones según el orden dado:

- I. La función $f(x) = |x| + 2$, $x \in [-2, 2]$ es par.
II. La función $g(x) = -x^3 + 3x$, $x \in [-4, 4]$ es impar.
III. La función $h(x) = -x^4 + 5x^2 + 2$, $x \in [-3, 3]$ es par.

A) VFF B) FVV C) FFV D) VVV E) FVF

Solución:

I. $\text{Dom}(f) = [-2, 2]$

$$f(-x) = |(-x)| + 2 = |x| + 2 = f(x)$$

 $\therefore f$ es función par (V)

II. $\text{Dom}(g) = [-4, 4]$

$$g(-x) = -(-x)^3 + 3(-x) = x^3 - 3x = -(-x^3 + 3x) = -g(x)$$

 $\therefore g$ es función impar (V)

III. $\text{Dom}(h) = [-3, 3]$

$$h(-x) = -(-x)^4 + 5(-x)^2 + 2 = -x^4 + 5x^2 + 2 = h(x)$$

 $\therefore h$ es función par (V)**Rpta.: D****EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. De las funciones $f = \{(-1, -6), (1, a-2), (2, 1), (a, 3)\}$ y $g = \{(-1, 4), (-6, 5), (2, -3), (5, -2)\}$ se sabe que $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{-1, 2, 5\}$. Los estudiantes de álgebra, Alexandra, Nicole y Lunié después de analizar la información se manifiestan así:

I. Lunié: "a" debe ser 5.

II. Alexandra: la suma de los elementos del rango de $f \cdot g$ es -33 .III. Nicole: hallé que $f^2 - g$ evaluado en 2 es 4.

Determine el valor de verdad (V) o de falsedad (F) de cada una de las afirmaciones respectivamente.

A) VVF

B) FFV

C) VFV

D) VVV

E) FVV

Solución:

$$f = \{(-1, -6), (1, a-2), (2, 1), (a, 3)\}$$

$$g = \{(-1, 4), (-6, 5), (2, -3), (5, -2)\}$$

$$\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{-1, 2, 5\} \Rightarrow a = 5$$

$$\text{luego } f = \{(-1, -6), (1, 3), (2, 1), (5, 3)\} \text{ y } g = \{(-1, 4), (-6, 5), (2, -3), (5, -2)\}$$

$$\text{Tenemos } (f^2 - g)(2) = [f(2)]^2 - g(2) = (1)^2 - (-3) = 4$$

$$\text{tambi\u00e9n } \begin{cases} (f.g)(-1) = f(-1).g(-1) = (-6).(4) = -24 \\ (f.g)(2) = f(2).g(2) = (1).(-3) = -3 \\ (f.g)(5) = f(5).g(5) = (3).(-2) = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f.g) = \{-24, -6, -3\} \Rightarrow (-24) + (-6) + (-3) = -33$$

Rpta.: D

2. Jes\u00fas es un atleta de alta competencia y corre 100 metros planos en 15 segundos en l\u00ednea recta. Si en una competencia la distancia que recorre en cientos de metros, est\u00e1 dada por la diferencia del mayor y menor elemento entero del rango de la funci\u00f3n f definida por $f(x) = |x-2| + |x-1| + 1$, $x \in [1, 3]$, \u00bfcu\u00e1nto tiempo emple\u00f3 Jes\u00fas en recorrer 200 metros planos?

A) 12 s B) 28 s C) 24 s D) 61 s E) 30 s

Soluci\u00f3n:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2, & 1 < x < 2 \Rightarrow \text{Ran}(f_1) = \{2\} \\ f_2(x) = 2x - 2, & 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow \text{Ran}(f_2) = [2, 4] \end{cases}$$

$$\text{entonces } \text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2) = [2, 4]$$

Jes\u00fas recorre $4 - 2 = 2$ cientos de metros = 200 m

Jes\u00fas emple\u00f3 en recorrer 200 m: $2 \times 15 = 30$ s

Rpta.: E

3. Juan Carlos est\u00e1 de cumplea\u00f1os y sus amigos quieren regalarle tantos libros de matem\u00e1ticas como la edad que cumple. \u00c9l les dice a sus amigos que su edad es igual al n\u00famero de elementos enteros del complemento del rango de la funci\u00f3n $f = \left\{ \left(x, \frac{x+5}{x-4} \right) / 3 < x < 6 \wedge x \neq 4 \right\}$. \u00bfcu\u00e1ntos libros recibir\u00e1 Juan Carlos por su cumplea\u00f1os?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 10 E) 14

Soluci\u00f3n:

$$\text{Sea } \frac{x+5}{x-4} = y \Rightarrow x = \frac{4y+5}{y-1}$$

$$\text{pero } 3 < \frac{4y+5}{y-1} < 6 \Rightarrow 3 < 4 + \frac{9}{y-1} < 6$$

$$-1 < \frac{9}{y-1} < 2 \Rightarrow \left(-1 < \frac{9}{y-1} < 0 \vee 0 < \frac{9}{y-1} < 2 \right)$$

$$\therefore \left(y < -8 \vee y > \frac{11}{2} \right)$$

El complemento es $\left[-8, \frac{11}{2} \right]$ y su número de elementos enteros es 14, entonces Juan Carlos recibirá 14 libros.

Rpta.: E

4. Determine el valor de verdad (V) o de falsedad (F) para las siguientes proposiciones en el orden dado.

I. La función $f(x) = |x-1| + 2$, $x \in [-2, 2]$ es par.

II. La función $g(x) = 4x^3 - 2x$, $x \in [-4, 4]$ es impar.

III. La función $h(x) = \frac{4}{|x|+1} + x^6 - 7x^2 + 5$, $x \in [-3, 3]$ es par.

A) VFF

B) FVV

C) FFV

D) VVV

E) FVF

Solución:

$$\text{I. Dom}(f) = [-2, 2]$$

$$f(-x) = |(-x)-1| + 2 = |x+1| + 2 \neq f(x)$$

$\therefore f$ no es función par (F)

$$\text{II. Dom}(g) = [-4, 4]$$

$$g(-x) = 4(-x)^3 - 2(-x) = -4x^3 + 2x = -(4x^3 - 2x) = g(x)$$

$\therefore g$ es función impar (V)

$$\text{III. Dom}(h) = [-3, 3]$$

$$h(-x) = \frac{4}{|-x|+1} + (-x)^6 - 7(-x)^2 + 5 = \frac{4}{|x|+1} + x^6 - 7x^2 + 5 = h(x)$$

$\therefore h$ es función par (V)

Rpta.: B

5. La electricidad se cobra a los consumidores de la siguiente manera, una tarifa de 10 soles por unidad para las primeras 50 unidades y a 5 soles por unidad para cantidades que exceden las 50 unidades. Determine el costo por consumo de 80 unidades de electricidad.

A) S/ 680 B) S/ 750 C) S/ 780 D) S/ 700 E) S/ 670

Solución:

$$C(x) = \begin{cases} 10x & , x \leq 50 \\ 10(50) + 5(x - 50) & , x > 50 \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} 10x & , x \leq 50 \\ 5x + 250 & , x > 50 \end{cases}$$

$$C(80) = 5(80) + 250 = 750 \text{ soles}$$

Rpta.: B

6. En un triángulo isósceles la longitud de sus lados congruentes es $20\sqrt{3}$ cm y dichos lados forman con el lado desigual un ángulo de 30° . Se inscribe un rectángulo de base x cm que se encuentra sobre el lado desigual del triángulo. Determine el área A del rectángulo en función de x .

A) $A(x) = x \cdot \left(\frac{60 - x}{2\sqrt{3}} \right) \text{ cm}^2$ con $0 < x < 60$

B) $A(x) = 2x \cdot \left(\frac{60 - 2x}{2\sqrt{3}} \right) \text{ cm}^2$ con $0 < x < 60$

C) $A(x) = x \cdot \left(\frac{60 - x}{2} \right) \text{ cm}^2$ con $0 < x < 20\sqrt{3}$

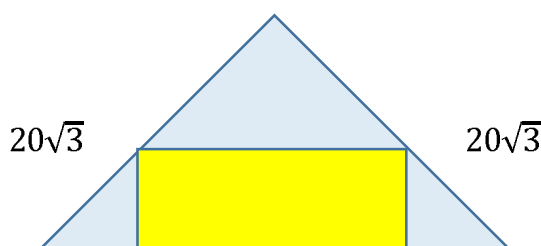
D) $A(x) = x \cdot \left(\frac{30 - x}{2\sqrt{3}} \right) \text{ cm}^2$ con $0 < x < 20\sqrt{3}$

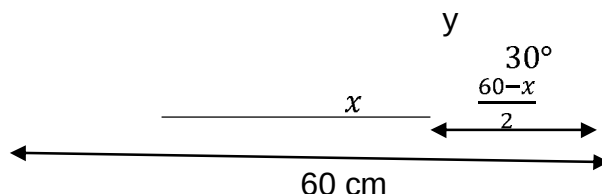
E) $A(x) = x \cdot \left(\frac{30 - x}{\sqrt{3}} \right) \text{ cm}^2$ con $0 < x < 60$

Solución:

x : longitud de la base del rectángulo en cm (dato)

y : longitud de la altura del rectángulo en cm





$$\cot(30^\circ) = \frac{\frac{60-x}{2}}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{60-x}{2y} \Rightarrow y = \frac{60-x}{2\sqrt{3}}$$

entonces $A = x \cdot y$

es decir $A(x) = x \cdot \left(\frac{60-x}{2\sqrt{3}} \right) \text{ cm}^2$ con $0 < x < 60$.

Rpta.: A

7. El cardiólogo Marco Almerí sugiere: “los jóvenes menores de 18 años deben realizar actividad física como mínimo $(8^{(b-a)} - 4)$ minutos diarios, los adultos entre 18 y 65 años de edad deben ejercitarse como mínimo $10 \cdot (b-a)$ minutos diarios y las personas mayores de 65 años deben efectuar como mínimo $(3^{|a-b|} + 1)$ minutos por día”, aconsejó.

Siendo $[a, b]$ el rango de la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, halle la suma de las mínimas cantidad de minutos que deben realizar actividad física los menores de 18 años, los adultos entre 18 y 65 años y los mayores de 65 años.

- A) 40 min B) 100 min C) 90 min D) 70 min E) 120 min

Solución:

$$\text{Sea } y = \frac{2x}{x^2 + 1} \rightarrow yx^2 - 2x + y = 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow 4 - 4y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow y \in [-1, 1] = \text{Ran}(f), \text{ entonces } a = -1, b = 1$$

Luego el mínimo número de minutos que deben realizar actividad física los:

- menores de 18 años es $(8^{1-(-1)} - 4) = 60$ minutos
 - los adultos ente 18 y 65 años es $10(1 - (-1)) = 20$ minutos
 - los mayores de 65 años es $(3^{|1-1|} + 1) = 10$ minutos
- $\therefore 60 + 20 + 10 = 90$ minutos.

Rpta.: C

8. La cantidad de números enteros no nulos de $W = \text{Ran}(f) \cap \text{Ran}(g)$ representan los años que Luis Enrique trabaja como docente en la institución Educativa "Fun School", donde las funciones f y g están definidas por $f(x) = 4 - |x + 4|$ con $x \in \langle -7, 5 \rangle$ y $g(x) = 4x^2 - 16x + 13$ con $x \in \langle -2, 3 \rangle$ respectivamente. Para postular al cargo de Director, como mínimo se requiere tener 10 años de trabajo docente, ¿cuántos años le falta a Luis Enrique para postular al cargo de Director?

A) 4 B) 6 C) 3 D) 5 E) 7

Solución:

$$-7 < x < 5 \Rightarrow -3 < x + 4 < 9 \Rightarrow 0 \leq |x + 4| < 9 \Rightarrow -9 < -|x + 4| \leq 0$$

$$-5 < 4 - |x + 4| \leq 4 \therefore \text{Ran}(f) = \langle -5, 4 \rangle$$

$$-2 < x < 3 \Rightarrow -4 < 2x < 6 \Rightarrow -8 < 2x - 4 < 2 \Rightarrow 0 \leq (2x - 4)^2 < 64$$

$$0 \leq 4x^2 - 16x + 16 < 64 \Rightarrow -3 \leq g(x) < 61 \therefore \text{Ran}(g) = [-3, 61)$$

$$W = \text{Ran}(f) \cap \text{Ran}(g) = [-3, 4] \Rightarrow A \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$$

Luis Enrique trabaja en Fun School 7 años, le falta 3 años para cumplir 10 años de labor docente.

Rpta.: C

ÁLGEBRA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

18
semana



pre
SAN MARCOS



Manhattan
Editores

Álgebra

FUNCIONES (CONTINUACIÓN)

1. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

Se dice que f es **creciente** sobre $A \subset \text{Dom}(f)$, si dados $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Se dice que f es **decreciente** sobre $A \subset \text{Dom}(f)$, si dados $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Ejemplo 1

¿Es la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2 + 3$, creciente o decreciente sobre el conjunto $A = [4, +\infty)$?

Solución:

Se tiene que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \Rightarrow A \subset \text{Dom}(f)$.

Sea $x_1, x_2 \in [4, +\infty)$ tal que $x_1 < x_2 \Rightarrow 4 \leq x_1 < x_2$

$$\Rightarrow 0 \leq x_1 - 4 < x_2 - 4$$

$$\Rightarrow (x_1 - 4)^2 < (x_2 - 4)^2$$

$$\Rightarrow (x_1 - 5)^2 + 3 < (x_2 - 5)^2 + 3$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

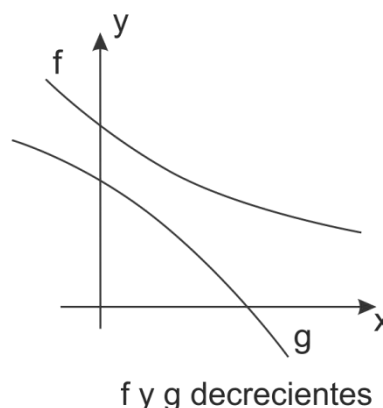
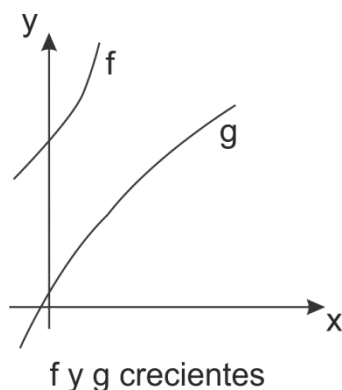
Así, se obtiene que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, con lo cual se concluye que f es creciente en $A = [4, +\infty)$

Propiedades

a) Si $f : \text{Dom}(f) = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente, entonces $\text{Ran}(f) = [f(a), f(b)]$.

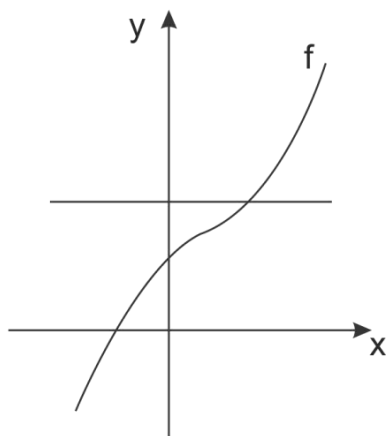
b) Si $f : \text{Dom}(f) = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es decreciente, entonces $\text{Ran}(f) = [f(b), f(a)]$.

En el gráfico, podemos reconocer cuándo una función es creciente o decreciente. En la figura se indica este hecho.

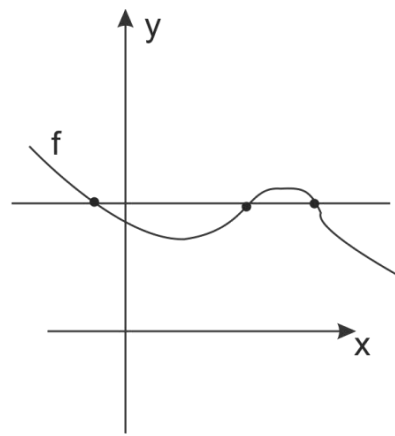
**2. FUNCIÓN INYECTIVA, SURYECTIVA Y BIYECTIVA**

Sea $f : A \rightarrow B$ una función.

- Se dice que f es **inyectiva** sobre $X \subset \text{Dom}(f)$, si y solo si se cumple que dados $x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Se dice que f es **suryectiva** (o sobreyectiva) si $\text{Ran}(f) = B$, esto es, para cada $y \in B$ existe $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y$.
- Se dice que f es **biyectiva** si es inyectiva y suryectiva.
Existe una forma gráfica de reconocer si f es inyectiva, esto es, si toda recta horizontal corta la gráfica de f en un solo punto entonces f es inyectiva. Pero si hay una recta que la corta en dos o más puntos, f ya no es inyectiva.



f es inyectiva



f no es inyectiva

Propiedad

Si una función f es inyectiva, entonces f es creciente o decreciente.

3. FUNCIÓN INVERSA

Sea $f : \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva. La función $f^* : \text{Ran}(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama la función inversa de f y es definida por

$$f^*(y) = x \text{ si y solo si } f(x) = y, \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$$

Donde se cumplen:

- i. $f^*(f(x)) = x, \quad \forall x \in \text{Dom}(f).$
- ii. $f(f^*(y)) = y, \quad \forall y \in \text{Ran}(f).$

Observación: Si f no es inyectiva, no existe la función inversa de f .

- I. Dada la función $y = f(x)$, para hallar la función inversa f^* , debe despejarse de $y = f(x)$ la variable x , para luego ponerlo en función de la variable y teniendo cuidado de las condiciones que deben cumplir tanto la variable x como la variable y ; luego se cambia la variable x por y , e y por x , obteniéndose así la función inversa.

- II. $\text{Dom}(f^*) = \text{Ran}(f)$
 $\text{Ran}(f^*) = \text{Dom}(f)$

Ejemplo 2

Halle la función inversa de f definida por $f(x) = x^2 + 4x + 3$ con $x \geq 3$.

Solución:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 \text{ con } x \geq 3,$$

Completando el cuadrado, se tiene

$$y = f(x) = (x+2)^2 - 1$$

$$\text{Como } x \geq 3 \rightarrow x+2 \geq 5 \rightarrow (x+2)^2 \geq 25 \rightarrow (x+2)^2 - 1 \geq 24 \rightarrow y \geq 24$$

Despejamos x en función de y :

$$\Rightarrow y+1 = (x+2)^2; \quad y \geq 24$$

$$\Rightarrow \pm\sqrt{y+1} = x+2, \quad y \geq 24$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1} - 2, \quad y \geq 24 \quad \text{como } x \geq 3, x = \sqrt{y+1} - 2$$

Ahora cambiamos x por y e y por x

$$y = \sqrt{x+1} - 2, \quad x \geq 24$$

$$\text{entonces } f^*(x) = \sqrt{x+1} - 2, \quad \text{Dom}(f^*) = [24, +\infty)$$

es la función inversa de f definida por $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

4. FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARITMO

Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$. La **función exponencial** en base a es una función que asocia a cada número real x un único real y tal que $y = a^x$, esto es,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = f(x) = a^x$$

El dominio de definición de $f(x) = a^x$ es todo los reales.

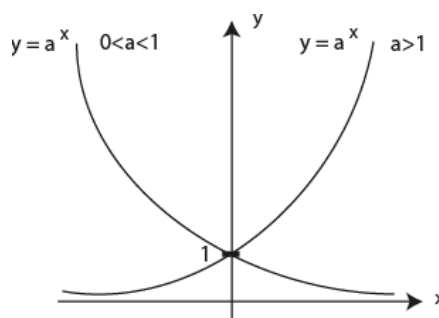
El rango de $f(x) = a^x$ es todo los reales positivos.

Si $a > 1$

- f es creciente
- f es inyectiva

Si $0 < a < 1$

- f es decreciente
- f es inyectiva



función exponencial

Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ y $x \in \mathbb{R}^+$. La función que asocia a cada número x el número $y = \log_a x$ es llamada la función logaritmo, esto es,

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = g(x) = \log_a x$$

El dominio de g es $\mathbb{R}^+$

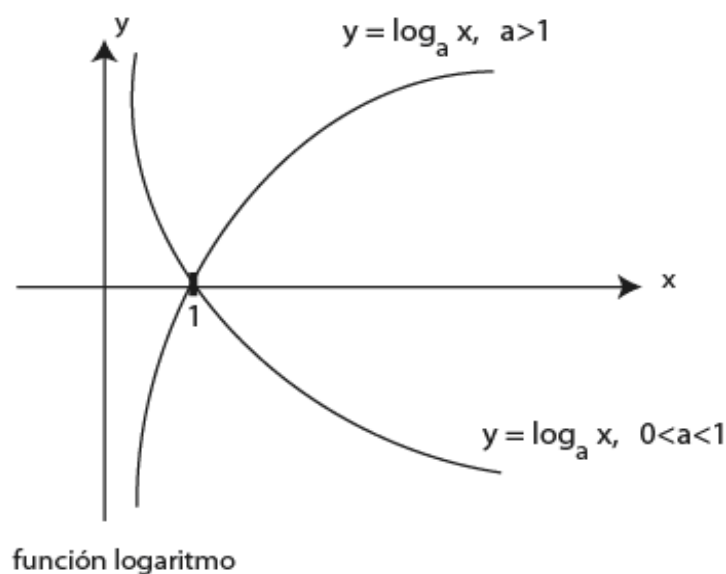
El rango de g es $\mathbb{R}$

Si $a > 1$, g es creciente, pero si $0 < a < 1$ la función g es decreciente.

No es difícil verificar que la función exponencial es la función inversa de la función logaritmo y recíprocamente la función logaritmo es la función inversa de la función exponencial.

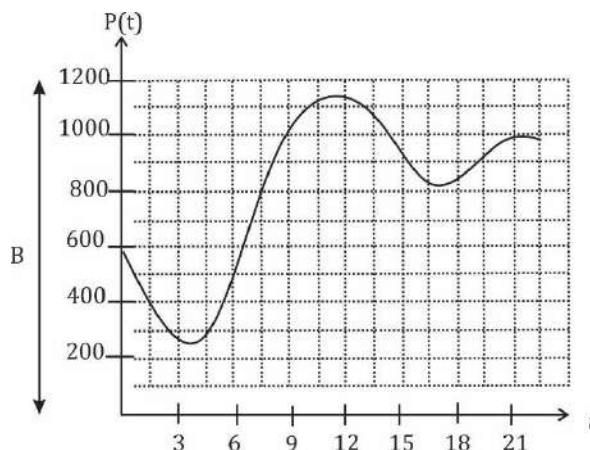
Así como el número irracional $\pi = 3,1415926535897932\dots$, otro número irracional es el número $e = 2,7182818284590452\dots$

Cuando la base del logaritmo sea $a=10$, denotaremos $\log_{10} x = \log x$ (logaritmo decimal) mientras que si la base es $a = e$, escribiremos $\log_e x = \ln x$ (logaritmo natural o neperiano)



EJERCICIOS

1. El consumo de energía eléctrica en cierta ciudad de Lima para el 19 de marzo del 2020 en función del tiempo, está representado en la figura mostrada. Si P es la función que relaciona estas dos magnitudes, donde P se mide en megawatts y t se mide en horas empezando la medianoche, indique el valor de verdad (V o F) de las siguientes proposiciones:



- I. P es una función creciente en el intervalo $[6; 9]$.
 II. P es una función decreciente en todo su dominio.
 III. P es una función inyectiva.
 IV. $P: \mathbb{R}^+ \rightarrow B$ es una función suryectiva.
- A) VFFF B) VVFF C) VFFV D) VFVF
2. Sea f es una función inyectiva, de modo que $f(m^2 + n^2 - 6n + 2) = f(6n - 50 + 8m)$.
 ¿Cuál es el rango de la función $g(x) = \log_{0,5}(x^2 - 8)$, si $m \leq x < n$?
- A) $\langle \log_{0,5} 7; -0,5 \rangle$ B) $\langle -2 - \log_2 7; -3 \rangle$
 C) $\langle \log_{0,5} 7; -1 \rangle$ D) $\langle -\log_2 7; -1 \rangle$
3. Sea $f: \text{Dom}(f) = [a; b] \rightarrow [1; 5]$ una función real biyectiva y creciente, definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Halle el rango de su función inversa.
- A) $[-1; 0]$ B) $[2; 3]$ C) $[1; 3]$ D) $[-1; 1]$
4. Sea $f: \text{Dom}(f) = [-2; 9] \rightarrow B$ una función suryectiva, definida por $f(x) = x^2 - 8x$.
 Determine la cantidad de elementos enteros de $L = \langle -2, 10 \rangle \cap B$.
- A) 8 B) 11 C) 9 D) 10

5. El gerente del departamento de ventas de una tienda electrónica, estima que la demanda semanal de cierto artículo está dada por

$$x = f(p) = 90\,000 - 500p$$

donde “x” es el número de pares de dicho artículo electrónico, que los minoristas comprarán semanalmente a “p” soles por par. Si el ingreso semanal de los minoristas está en función de la demanda “x”, ¿cuántos pares deberán comprar los minoristas para que tal ingreso sea máximo?

- A) 45 000 B) 42 400 C) 42 500 D) 45 200
6. El peso promedio “P” de un grano de maíz durante sus primeras 12 semanas de crecimiento está estimado por $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$, donde el tiempo “t” está dado en días y el peso P en miligramos. A los 30 días, se pesa un grano de maíz y en promedio se tiene un peso de e^7 mg. A los 60 días, se pesa el mismo grano de maíz y ahora en promedio tiene un peso de e^{10} mg. ¿Cuánto pesa, en promedio, un grano de maíz cuando brota?

- A) e^3 mg B) e^4 mg C) e^5 mg D) e^6 mg
7. En un estudio económico de cierto país, se determinó que si dicho país tiene una población de “x” habitantes (en unidades de 100 000), entonces el porcentaje del producto nacional bruto es “y”.

$$\log y = \log 50 - \frac{1}{10} \log \left(\frac{1}{100} \right) \log x - \frac{1}{10} (\log x)^2$$

¿Cuál será el porcentaje del producto nacional bruto de un país con 1 millón de habitantes?

- A) 52% B) 48% C) 50% D) 45%

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$. Determine el intervalo máximo donde la función es creciente.

- A) $\left\langle -\frac{b}{2a}; +\infty \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{b}{2a}; +\infty \right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{b}{a}; +\infty \right\rangle$ D) $\left\langle \frac{b}{a}; +\infty \right\rangle$

2. Sea f es una función inyectiva, de modo que $f(m^2 + n^2 - 4p + 17) = f(8n - 2m - p^2 - 4)$. ¿Cuál es el rango de la función

$$g(x) = \left(\frac{p}{n}\right)^{6p-px} \quad \text{si } -mp < x \leq n?$$

- A) $[(0,5)^7; (0,5)^3]$ B) $\langle (0,5)^8; (0,5)^4 \rangle$.
 C) $[(0,5)^8; (0,5)^4]$ D) $\langle (0,5)^6; (0,5)^4 \rangle$.
3. Con respecto a la función lineal $f: \text{Dom}(f) = [1;3] \rightarrow [5;9]$, se sabe que es biyectiva y decreciente, ¿cuál es el valor de $f^*(7,5)$?

- A) 2,5 B) 1,9 C) 1,75 D) 2,8

4. Adrián tiene una fábrica de artículos de limpieza, donde el costo de fabricar cada artículo está representado por $\left(\sqrt[3]{n-m-\frac{8}{3}\log_{\frac{m}{2}} m}-1\right)$ soles y además sus costos fijos ascienden a 5000 soles y el precio de venta de cada artículo está dado por $(\sqrt{n+12m-\log_2 m})$ soles. Si m y n son los valores que se obtienen de la función biyectiva $f: \text{Dom}(f) = [2,m] \rightarrow [16,n]$, tal que $f(x) = x^2 - 20x + 112$, con $m < 9$, ¿cuál es el número mínimo de artículos que debe fabricar y vender la fábrica de Adrián, para que no genere pérdida.

- A) 560 artículos B) 520 artículos
 C) 550 artículos D) 500 artículos

5. Sea $f: \text{Dom}(f) = (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$. Si g es la función inversa de f , ¿cuál es el valor de $K = (15 + 4g(-3))(20 + 6g(-5))$?

- A) 180 B) 175 C) 178 D) S/ 182

6. En un experimento sobre reproducción de la ameba, un investigador observa que el número de amebas se duplica cada hora. Si inicialmente había 3000 amebas, ¿después de cuántas horas, aproximadamente, la población de amebas será de 300 millones? Considere $\log 2 = 0,3$.

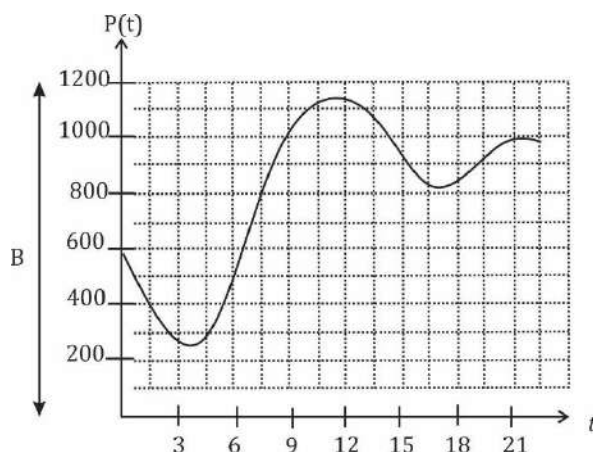
- A) 15 horas B) 19 horas C) 17 horas D) 18 horas

7. Un modelo para describir el crecimiento de una población es $P(t) = P_0 e^{-kt}$; donde t se mide en años, P_0 es la población inicial y k es una constante. Si la población de una ciudad era de 4000 personas en el año 2010 ($t = 0$) y en el año 2018 era de 60 000 habitantes. ¿Cuántos habitantes tendrá dicha población en el año 2026?
- A) 880 000 B) 920 000 C) 900 000 D) 850 000
8. Sea $f : \text{Dom}(f) = \langle 1; +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x + 4 \log_x \sqrt{3} + 2$. Calcule la suma de los cuatro menores elementos enteros del $\text{Ran}(f)$.
- A) 32 B) 31 C) 28 D) 30
9. Dada la función $f(x) = \log_5 x + \log_5 (10 - x)$, calcule la suma de los elementos enteros del conjunto $T = \text{Dom}(f) - \text{Ran}(f)$.
- A) 44 B) 41 C) 40 D) 42

Álgebra

EJERCICIOS

1. El consumo de energía eléctrica en cierta ciudad de Lima para el 19 de marzo del 2020 en función del tiempo, está representado en la figura mostrada. Si P es la función que relaciona estas dos magnitudes, donde P se mide en megawatts y t se mide en horas empezando la medianoche, indique el valor de verdad (V o F) de las siguientes proposiciones:



- I. P es una función creciente en el intervalo $[6; 9]$.
- II. P es una función decreciente en todo su dominio.
- III. P es una función inyectiva.
- IV. $P: \mathbb{R}^+ \rightarrow B$ es una función suryectiva.

A) VFFF

B) VVFF

C) VFFV

D) VFVF

Solución:

- I. De la figura mostrada $P(t)$ es creciente en el intervalo de $[6; 9]$.
(V)
- II. $P(t)$ es decreciente en partes de su dominio.
(F)
- III. Al trazar la gráfica con una recta horizontal se observa que la corta en más de un punto, entonces $P(t)$ no es inyectiva.
(F)
- IV. De la figura, se observa $\text{Ran}(P(t)) \neq B$, entonces $P(t)$ no es suryectiva.
(F)

Rpta.: A

2. Sea f es una función inyectiva, de modo que $f(m^2 + n^2 - 6n + 2) = f(6n - 50 + 8m)$.
¿Cuál es el rango de la función $g(x) = \log_{0,5}(x^2 - 8)$, si $m \leq x < n$?

A) $\langle \log_{0,5} 7; -0,5] \rangle$

B) $\langle -2 - \log_2 7; -3] \rangle$

C) $\langle \log_{0,5} 7; -1] \rangle$

D) $\langle -\log_2 7; -1] \rangle$

Solución:

i) Como " f " una función inyectiva, entonces $m^2 + n^2 - 6n + 2 = 6n - 50 + 8m$

$$\rightarrow m^2 - 8m + 16 + n^2 - 12n + 36 = 0$$

$$\rightarrow (m-4)^2 + (n-6)^2 = 0 \rightarrow m = 4 \wedge n = 6$$

ii) Calculando el $\text{Ran}(g)$

$$g(x) = \log_{0,5}(x^2 - 8), \text{ si } 4 \leq x < 6$$

Partimos de $4 \leq x < 6$

$$\rightarrow 16 \leq x^2 < 36 \rightarrow 8 \leq x^2 - 8 < 28$$

$$\rightarrow \log_{(0,5)}(8) \geq \log_{(0,5)}(x^2 - 8) > \log_{(0,5)}(28)$$

$$\rightarrow -3 \geq \log_{(0,5)}(x^2 - 8) > -2 - \log_2 7$$

$$\therefore \text{Ran}(g) = \langle -2 - \log_2 7; -3] \rangle$$

Rpta.: B

3. Sea $f : \text{Dom}(f) = [a, b] \rightarrow [1; 5]$ una función real biyectiva y creciente, definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Halle el rango de su función inversa.

A) $[-1; 0]$

B) $[2; 3]$

C) $[1; 3]$

D) $[-1; 1]$

Solución:

$$f : \text{Dom}(f) = [a; b] \rightarrow [1; 5]$$

$$\text{Completando el cuadrado: } f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} * \text{ } f \text{ es biyectiva} \rightarrow [1; 5] = \text{Ran}(f) \\ ** \text{ } f \text{ es decreciente} \rightarrow \text{Ran}(f) = [f(a); f(b)] \end{array} \right\} \rightarrow [f(a); f(b)] = [1; 5] \rightarrow f(a) = 1 \wedge f(b) = 5$$

$$*** \rightarrow f(x) = (x-1)^2 + 1 \rightarrow \begin{cases} f(a) = (a-1)^2 + 1 = 1 \\ f(b) = (b-1)^2 + 1 = 5 \end{cases} \rightarrow a = 1, b = 3$$

Luego,

$$\text{Dom}(f) = [1; 3]$$

*** f es biyectiva $\rightarrow f^*$ existe

$$\therefore \text{Ran}(f^*) = \text{Dom}(f) = [1; 3]$$

Rpta.:C

4. Sea $f : \text{Dom}(f) = [-2; 9] \rightarrow B$ una función suryectiva, definida por $f(x) = x^2 - 8x$. Determine la cantidad de elementos enteros de $L = \langle -2, 10 \rangle \cap B$.

A) 8

B) 11

C) 9

D) 10

Solución:

$$\text{Completando el cuadrado se tiene } f(x) = x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$$

Calculando el rango de f ,

$$f : \text{Dom}(f) = [-2; 9] \rightarrow B$$

Partimos de

$$\rightarrow -2 \leq x \leq 9$$

$$\rightarrow -6 \leq x-4 \leq 5$$

$$\rightarrow 0 \leq (x-4)^2 \leq 36$$

$$\rightarrow \text{Ran}(f) = [0; 36]$$

Como f es una función suryectiva $\rightarrow \text{Ran}(f) = [0; 36] = B$.

$$\rightarrow L = \langle -2, 10 \rangle \cap B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$\therefore$ El conjunto L tiene 10 elementos enteros.

Rpta.: D

5. El gerente del departamento de ventas de una tienda electrónica, estima que la demanda semanal de cierto artículo está dada por

$$x = f(p) = 90\,000 - 500p$$

donde “x” es el número de pares de dicho artículo electrónico, que los minoristas comprarán semanalmente a “p” soles por par. Si el ingreso semanal de los minoristas está en función de la demanda “x”, ¿cuántos pares deberán comprar los minoristas para que tal ingreso sea máximo?

- A) 45 000 B) 42 400 C) 42 500 D) 45 200

Solución:

i) Calculando la inversa de la función demanda

$$\begin{aligned} p \geq 0 \wedge x = 90\,000 - 500p = 500(180 - p) \geq 0 &\rightarrow 180 - p \geq 0 \rightarrow p \leq 180 \\ \rightarrow \text{Dom}(f) = [0; 180] \wedge \text{Ran}(f) = [0; 90\,000] \end{aligned}$$

$$\text{De } x = 90\,000 - 500p \rightarrow 500p = 90\,000 - x \rightarrow p = 180 - 0,002x$$

La inversa de la función demanda

$$\rightarrow p = f^*(x) = 180 - 0,002x \text{ con } 0 \leq x \leq 90\,000$$

Luego, el ingreso $I(x)$ está dado por

$$I(x) = xp = x(180 - 0,002x) = 180x - 0,002x^2$$

Para que el ingreso sea máximo, la cantidad de pares será igual a

$$-\frac{180}{2(-0,002)} = 45\,000$$

Rpta.: A

6. El peso promedio "P" de un grano de maíz durante sus primeras 12 semanas de crecimiento está estimado por $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$, donde el tiempo "t" está dado en días y el peso P en miligramos. A los 30 días, se pesa un grano de maíz y en promedio se tiene un peso de e^7 mg. A los 60 días, se pesa el mismo grano de maíz y ahora en promedio tiene un peso de e^{10} mg. ¿Cuánto pesa, en promedio, un grano de maíz cuando brota?

A) e^3 mg B) e^4 mg C) e^5 mg D) e^6 mg

Solución:

$$P(t) = P_0 e^{\lambda t}$$

Donde P_0 es lo que pesa, en promedio, un grano de maíz cuando brota.

De $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$, se tiene al evaluar en $t = 30$ y $t = 60$

$$\begin{cases} e^7 = P(30) = P_0 e^{\lambda(30)} = P_0 e^{30\lambda} & \dots(1) \\ e^{10} = P(60) = P_0 e^{\lambda(60)} = P_0 e^{60\lambda} & \dots(2) \end{cases}$$

Luego, si dividimos la ecuación (2) entre la ecuación (1) miembro a miembro se tiene:

$$\frac{e^{10}}{e^7} = e^{30\lambda}$$

Al aplicar $\ln$ de cada lado se obtiene

$$\ln(e^3) = \ln(e^{30\lambda}) \rightarrow 3 = 30\lambda \rightarrow \frac{1}{10} = \lambda$$

Finalmente, sustituyendo el valor de λ se tiene

$$e^7 = P_0 e^{\left(\frac{1}{10}\right)(30)} = P_0 e^3 \rightarrow e^4 = P_0$$

$\therefore$ Un grano de maíz cuando brota pesa, en promedio, e^4 mg.

Rpta.: B

7. En un estudio económico de cierto país, se determinó que si dicho país tiene una población de “x” habitantes (en unidades de 100 000), entonces el porcentaje del producto nacional bruto es “y”.

$$\log y = \log 50 - \frac{1}{10} \log \left(\frac{1}{100} \right) \log x - \frac{1}{10} (\log x)^2$$

¿Cuál será el porcentaje del producto nacional bruto de un país con 1 millón de habitantes?

- A) 52% B) 48% C) 50% D) 45%

Solución:

$$\log y = \log 50 - \frac{1}{10} \log \left(\frac{1}{100} \right) \log x - \frac{1}{10} (\log x)^2$$

$$\rightarrow \log y = \log 50 - \frac{1}{10} \log(10)^{-2} \log x - \frac{1}{10} (\log x)^2$$

$$\rightarrow \log y = \log 50 + (0,2) \log x - (0,1) (\log x)^2$$

$$\rightarrow \log y = \log 50 + (\log x) [(0,2) - (0,1) (\log x)]$$

$$\rightarrow \log y = \log 50 + \log x^{(0,2)-(0,1)(\log x)} = \log \left[(50)(x)^{(0,2)-(0,1)(\log x)} \right]$$

$$\rightarrow y = (50)(x)^{(0,2)-(0,1)(\log x)}$$

* Calculando el producto nacional bruto para un país de 1 millón de habitantes

$$\rightarrow x = 100$$

$$\text{Luego, } y = (50)(100)^{(0,2)-(0,2)} = 50$$

∴ El porcentaje del producto interno bruto de dicho país es el 50%.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$. Determine el intervalo máximo donde la función es creciente.

- A) $\left\langle -\frac{b}{2a}; +\infty \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{b}{2a}; +\infty \right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{b}{a}; +\infty \right\rangle$ D) $\left\langle \frac{b}{a}; +\infty \right\rangle$

Solución:

$$\text{De } f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Considerando $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$, se tiene que

$$f(x_2) - f(x_1) = \left[a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \right] - \left[a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \right]$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right)$$

$$\text{Luego, si } a > 0, \text{ entonces } f \text{ es creciente} \leftrightarrow x_1 + x_2 + \frac{b}{a} > 0 \leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} > -\frac{b}{2a}$$

$\therefore$ El intervalo máximo donde la función es creciente es $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Rpta.: A

2. Sea f es una función inyectiva, de modo que $f(m^2 + n^2 - 4p + 17) = f(8n - 2m - p^2 - 4)$. ¿Cuál es el rango de la función

$$g(x) = \left(\frac{p}{n}\right)^{6p - px} \quad \text{si } -mp < x \leq n?$$

A) $\left[(0,5)^7; (0,5)^3\right]$

B) $\left\langle (0,5)^8; (0,5)^4 \right\rangle$.

C) $\left[(0,5)^8; (0,5)^4\right]$

D) $\left\langle (0,5)^6; (0,5)^4 \right\rangle$.

Solución:

i) Como " f " una función inyectiva, entonces $m^2 + n^2 - 4p + 17 = 8n - 2m - p^2 - 4$

$$\rightarrow m^2 + 2m + 1 + n^2 - 8n + 16 + p^2 - 4p + 4 = 0$$

$$\rightarrow (m+1)^2 + (n-4)^2 + (p-2)^2 = 0 \rightarrow m = -1 \wedge n = 4 \wedge p = 2$$

ii) Calculando el $\text{Ran}(g)$

$$g(x) = (0,5)^{12-2x}, \text{ si } 2 < x \leq 4$$

Partimos de $2 < x \leq 4$

$$\rightarrow -4 > -2x \geq -8 \rightarrow 8 > 12 - 2x \geq 4 \rightarrow (0,5)^8 < \underbrace{(0,5)^{1-2x}}_{g(x)} \leq (0,5)^4$$

$$\therefore \text{Ran}(g) = \left[(0,5)^8; (0,5)^4 \right].$$

Rpta.: B

3. Con respecto a la función lineal $f : \text{Dom}(f) = [1;3] \rightarrow [5;9]$, se sabe que es biyectiva y decreciente, ¿cuál es el valor de $f^*(7,5)$?

A) 2,5

B) 1,9

C) 1,75

D) 2,8

Solución:

$$f : \text{Dom}(f) = [1;3] \rightarrow [5;9]$$

$$\left. \begin{array}{l} * \text{ f es biyectiva} \rightarrow [5;9] = \text{Ran}(f) \\ ** \text{ f es decreciente} \rightarrow \text{Ran}(f) = [f(3);f(1)] \end{array} \right\} \rightarrow [f(3);f(1)] = [5;9] \rightarrow f(3) = 5 \wedge f(1) = 9$$

$$*** \text{ f es lineal} \rightarrow f(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} f(3) = 3a + b = 5 \\ f(1) = a + b = 9 \end{cases} \rightarrow a = -2, b = 11$$

Luego,

$$f(x) = -2x + 11 \rightarrow \boxed{x = f^*(-2x + 11)}$$

Evaluando para $x = 1,75$ se tiene $1,75 = f^*(7,5)$.

Rpta.: C

4. Adrián tiene una fábrica de artículos de limpieza, donde el costo de fabricar cada artículo está representado por $\left(\sqrt[3]{n - m - \frac{8}{3} \log_{\frac{m}{2}} m} - 1 \right)$ soles y además sus costos fijos ascienden a 5000 soles y el precio de venta de cada artículo está dado por $\left(\sqrt{n + 12m - \log_2 m} \right)$ soles. Si m y n son los valores que se obtienen de la función biyectiva $f : \text{Dom}(f) = [2; m] \rightarrow [16; n]$, tal que $f(x) = x^2 - 20x + 112$, con $m < 9$, ¿cuál es el número mínimo de artículos que debe fabricar y vender la fábrica de Adrián, para que no genere pérdida.

A) 560 artículos

B) 520 artículos

C) 550 artículos

D) 500 artículos

Solución:

* f es biyectiva, entonces f es suryectiva $\rightarrow \text{Ran}(f) = [16, n]$

** f es inyectiva entonces $f(x) = (x-10)^2 + 12$ con vértice $V(10, 12)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 10]$ y como f está definido en $[2, m]$ con $m < 9$

$$\text{Luego, } \text{Ran}(f) = [f(m), f(2)] = [(m-10)^2 + 12, (2-10)^2 + 12] = [(m-10)^2 + 12, 76] \\ \rightarrow \text{Ran}(f) = [(m-10)^2 + 12, 76] = [16, n]$$

$$n = 76 \wedge (m-10)^2 + 12 = 16$$

$n = 76 \wedge (m = 12 \vee m = 8)$, pero m no puede ser 12, dado que $m < 9$.

$$n = 76 \wedge m = 8$$

$$\text{* Precio de costo unitario} = \sqrt[3]{76 - 8 - \frac{8}{3} \log_4 8} - 1 = 3 \text{ soles,}$$

$$\text{* Precio de venta unitario} = \sqrt{76 + 12(8) - \log_2 8} = 13 \text{ soles;}$$

* Costo total = 5000 soles

Luego para que el número de artículos que se fabrica y se vende no genere pérdida, se tiene: $U = 13q - (3q + 5000) \geq 0 \rightarrow q \geq 500$

$\therefore$ El mínimo número de artículos que se debe fabricar y vender para que no haya pérdidas es de 500 artículos.

Rpta.:D

5. Sea $f : \text{Dom}(f) = \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1 - |x|}$. Si g es la función inversa de f , ¿cuál es el valor de $K = (15 + 4g(-3))(20 + 6g(-5))$?

A) 180

B) 175

C) 178

D) S/ 182

Solución:

$$f : \text{Dom}(f) = \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = f(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

Caso 1: $-1 < x < 0$

$$y = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

como $-1 < x < 0$, entonces:

$$0 < x+1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x} < 0 \Rightarrow y \in \langle -\infty, 0 \rangle$$

Despejando x , se tiene : $x = \frac{y}{1-y}$; $y \in \langle -\infty, 0 \rangle$

Caso 2: $0 \leq x < 1$

$$y = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

como $0 \leq x < 1$, entonces:

$$0 < 1-x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x} \geq 1 \Rightarrow -1 + \frac{1}{1-x} \geq 0 \Rightarrow y \in [0, \infty)$$

Despejando x , se tiene $x = \frac{y}{y+1}$; $y \in [0, \infty)$

De los casos 1 y 2 se concluye que:

$$x = \frac{y}{1+|y|}; \quad y \in \mathbb{R}$$

Entonces la función inversa f^* es:

$$f^*(x) = \frac{x}{1+|x|}; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Luego, } 15 + 4f^*(-3) = 12 \text{ y } 20 + 6f^*(-5) = 15$$

$\therefore$ El valor de K es 180.

Rpta.: A

6. En un experimento sobre reproducción de la ameba, un investigador observa que el número de amebas se duplica cada hora. Si inicialmente había 3000 amebas, ¿después de cuántas horas, aproximadamente, la población de amebas será de 300 millones? Considere $\log 2 = 0,3$.

A) 15 horas B) 19 horas C) 17 horas D) 18 horas

Solución:

Sea $N(t)$ el número de amebas que hay en el cultivo después de t horas de haberse iniciado el experimento.

t(horas)	N(t) número de amebas
0	3000
1	$2(3000)$
2	$2^2(3000)$
3	$2^3(3000)$
$\vdots$	$\vdots$
t	$2^t(3000)$

El número de amebas después de t horas es $N(t) = 3000 \cdot (2)^t$

* Se desea conocer un $t = k$ de modo que $N(k) = 300\,000\,000$

$$300\,000\,000 = 3000 \cdot (2)^t \rightarrow 100\,000 = 2^t$$

Aplicando logaritmo decimal, se tiene

$$\log(100\,000) = \log(2^t)$$

$$\rightarrow \log(10)^5 = \log 2 \cdot t$$

$$\rightarrow t = \frac{5}{\log 2} = \frac{5}{0,3} = 16,66$$

$\therefore$ Luego de 17 horas la población de amebas será de 300 millones.

Rpta.: C

7. Un modelo para describir el crecimiento de una población es $P(t) = P_0 e^{-kt}$; donde t se mide en años, P_0 es la población inicial y k es una constante. Si la población de una ciudad era de 4000 personas en el año 2010 ($t = 0$) y en el año 2018 era de 60 000 habitantes. ¿Cuántos habitantes tendrá dicha población en el año 2026?

A) 880 000 B) 920 000 C) 900 000 D) 850 000

Solución:

Para $t = 0 \rightarrow P_0 = 4000$

Para $t = 8$ (año 2018) $\rightarrow P(8) = 4000 e^{-8k} = 60\,000 \rightarrow e^{-8k} = 15 \dots (1)$

Para $t = 16$ (año 2016) $\rightarrow P(16) = 4000 e^{-16k} = 4000 (e^{-8k})^2$

$\therefore$ En el año 2016 la población de dicha ciudad fue de 900 000 habitantes

Rpta.: C

8. Sea $f : \text{Dom}(f) = \langle 1; +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x + 4 \log_x \sqrt{3} + 2$. Calcule la suma de los cuatro menores elementos enteros del $\text{Ran}(f)$.

A) 32 B) 31 C) 28 D) 30

Solución:

$$f : \text{Dom}(f) = \langle 1; +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \log_{\sqrt{3}} x + 4 \log_x \sqrt{3}$$

Como

$$x > 1 \rightarrow \log_{\sqrt{3}} x > 0$$

$$\text{Luego, } \frac{\log_{\sqrt{3}} x + \frac{4}{\log_{\sqrt{3}} x}}{2} \geq \sqrt{\log_{\sqrt{3}} x \cdot \left(\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} x} \right)} = 2$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt{3}} x + 4 \log_x \sqrt{3} \geq 4$$

$$\rightarrow \underbrace{\log_{\sqrt{3}} x + 4 \log_x \sqrt{3} + 2}_{f(x)} \geq 6 \rightarrow f(x) \geq 6 \rightarrow \text{Ran}(f) = [6; +\infty)$$

Cuatro menores elementos enteros del $\text{Ran}(f)$: 6; 7; 8 y 9.

$\therefore$ La suma es 30.

Rpta.: D

9. Dada la función $f(x) = \log_5 x + \log_5 (10 - x)$, calcule la suma de los elementos enteros del conjunto $T = \text{Dom}(f) - \text{Ran}(f)$.

A) 44

B) 41

C) 40

D) 42

Solución:

* Calculando $\text{Dom}(f)$

$$f(x) = \log_5 x + \log_5 (10 - x)$$

$$x \in \text{Dom}(f) \leftrightarrow x > 0 \wedge 10 - x > 0$$

$$x \in \text{Dom}(f) \leftrightarrow 0 < x < 10$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f) = \langle 0; 10 \rangle$$

** Calculando $\text{Ran}(f)$

$$f(x) = \log_5 x + \log_5 (10 - x) = \log_5 (10x - x^2) = \log_5 \left[-(x^2 - 10x + 25) + 25 \right]$$

$$f(x) = \log_5 \left[-(x - 5)^2 + 25 \right]$$

$$\text{Partimos de } 0 < x < 10 \rightarrow -5 < x - 5 < 5 \rightarrow 0 \leq (x - 5)^2 < 25$$

$$\rightarrow 0 \geq -(x - 5)^2 > -25$$

$$\rightarrow 25 \geq -(x-5)^2 + 25 > 0$$

$$\rightarrow \log_5(25) \geq \log_5 \left[-(x-5)^2 + 25 \right]$$

$$\rightarrow 2 \geq f(x)$$

$$\rightarrow \text{Ran}(f) = \langle -\infty; 2 \rangle$$

$$\text{Luego, } T = \text{Dom}(f) - \text{Ran}(f) = \langle 2; 10 \rangle$$

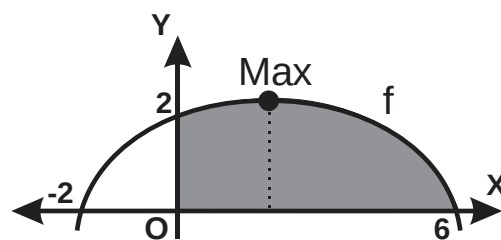
Elementos enteros: 3; 4; 5; 6; 7; 8 y 9

$\therefore$ La suma de los elementos enteros de T es 42.

Rpta.: D

Álgebra - EJERCICIOS

1. A un estudiante de ingeniería se le pide hallar el área sombreada bajo la curva f tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ (ver gráfico); pero solo encontró el área bajo la curva donde f es decreciente. Si las unidades están dadas en metros, ¿cuál fue el máximo valor de la función en la región que encontró el estudiante?



- A) $\frac{10}{3}$ m B) $\frac{8}{3}$ m C) $\frac{14}{3}$ m D) $\frac{7}{3}$ m

Solución:

- 1) Del gráfico se observa que $f(-2) = 0$, $f(0) = 2$ y $f(6) = 0$

$$f(-2) = 4a - 2b + c = 0$$

$$f(0) = c = 2$$

$$f(6) = 36a + 6b + c = 0$$

$$\begin{cases} 2a - b = -1 \\ 18a + 3b = -1 \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}$$

$$2) \quad f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + 2 = -\frac{1}{6}(x-2)^2 + \frac{8}{3}$$

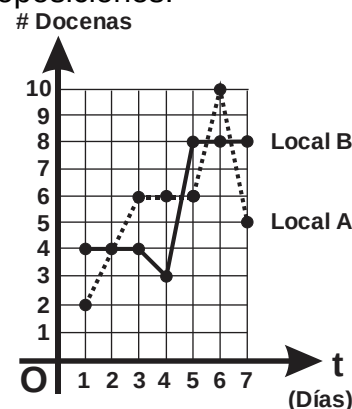
La parte de la región sombreada en la que f es decreciente el intervalo $[2, 6]$

- 3) el máximo valor de la función en la región que encontró el estudiante $\frac{8}{3}$ m

Rpta.: B

2. Una empresa mayorista en la venta de libros tiene dos locales. Por aniversario ofrecen una colección de clásicos peruanos en la compra por docena. La promoción dura una semana y las ventas (por docena) se indican en el gráfico adjunto. Entonces, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- El local A vendió más libros que el local B
- En el local B hubo dos periodos de ventas constantes
- En el local A las ventas no decrecen hasta el penúltimo día
- La mayor cantidad de docenas de libros que se vendió un día en el local A no es mayor que la mayor cantidad de docenas de libros que se vendió un día en el local B



- A) FVVF B) FVVV C) VVVF D) FVFV

Solución:

1) Del gráfico se puede observar:

- Número de libros vendido en el local A: $2 + 4 + 6 + 6 + 6 + 10 + 5 = 39$ docenas
- Número de libros vendido en el local B: $4 + 4 + 4 + 3 + 8 + 8 + 8 = 39$ docenas
- En el local B: los días 1, 2 y 3 se vendieron 4 docenas de libros y los días 5, 6 y 7 se vendieron 8 docenas de libros, es decir, en dos periodos se mantuvo constante
- En A se vendieron como máximo en un día 10 docenas de libros y en B como máximo 8 docenas de libros.

2) Luego:

- Es falsa.
- Es verdad.
- Es verdad.
- Es falsa.

Rpta.: A

3. En el año 2019 el cinturón de seguridad cumplió 60 años y ha salvado la vida de más de medio millón de personas a nivel mundial. Según la Organización Mundial de la Salud, el uso del cinturón de seguridad disminuye en un $\left[(k+2)\log_k(10^{k+1} + k^3 + k^4)\right]\%$ el riesgo de muerte de los ocupantes de un vehículo. Halle en que porcentaje disminuye el riesgo de muerte de los ocupantes de un vehículo, al usar del cinturón de seguridad, sabiendo que k es el mayor valor en el cual $f(x) = x^2 - 4x + 7$ es decreciente e inyectiva en $\langle -\infty, k \rangle$.

- A) 20% B) 40% C) 45% D) 30%

Solución:

- Como $f(x) = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$, f es decreciente e inyectiva en $\langle -\infty, 2 \rangle$, luego $k = 2$
- $\left[(k+2)\log_k(10^{k+1} + k^3 + k^4)\right]\% = \left[(2+2)\log_2(10^{2+1} + 2^3 + 2^4)\right]\%$
 $= \left[4\log_2(1024)\right]\% = 4(10)\% = 40\%$
- Usar del cinturón de seguridad disminuye en un 40% el riesgo de muerte de los ocupantes de un vehículo.

Rpta.: B

4. Pedro, alumno del CEPREUNMSM, ocupó el puesto “a” del ciclo ordinario 2019-I en la carrera de Ingeniería de Sistemas. Si $f: \text{Dom}(f) = [4, 7] \rightarrow M$ es una función biyectiva definida por $f(x) = \frac{x+2}{x-1} + 3$ y “a” es el número de elementos enteros de M, ¿qué puesto ocupó Pedro el ciclo ordinario 2019-I?
- A) octavo puesto B) quinto puesto C) tercer puesto D) primer puesto

Solución:

- Como f es biyectiva, entonces f es suryectiva
 $\text{Ran}(f) = M$
- f es inyectiva entonces $f(x) = \frac{x+2}{x-1} + 3$ es creciente o decreciente, hallando el $\text{Ran}(f)$

$$f(4) = \frac{4+2}{4-1} + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$f(7) = \frac{7+2}{7-1} + 3 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

$$\text{Ran}(f) = \left[\frac{9}{2}, 5 \right]$$
- Luego $M = \left[\frac{9}{2}, 5 \right]$ que tiene 1 elemento entero, Pedro obtuvo el primer puesto

Rpta.: D

5. Carlos visitó al dermatólogo en la clínica SP. La consulta le costó $3|a|$ soles y por la compra de las medicinas que le recetó el dermatólogo pagó $4(|a| + 4b + 2)$ soles; siendo a y b los valores que se obtienen de la función biyectiva $f: \text{Dom}(f) = [7, b] \rightarrow [a, 9]$, tal que $f(x) = x^2 - 10x + 9$. Determine el gasto total de Carlos en su visita al dermatólogo.
- A) 220 soles B) 236 soles C) 252 soles D) 273 soles

Solución:

- f es biyectiva, entonces f es suryectiva
 Luego $\text{Ran}(f) = [a, 9]$
- f es inyectiva entonces $f(x) = (x-5)^2 - 16$ con vértice $V(5, -16)$ es creciente en el intervalo $[5, +\infty)$

$$\text{Entonces } \text{Ran}(f) = [f(7), f(b)] = [(7-5)^2 - 16, (b-5)^2 - 16] = [-12, (b-5)^2 - 16]$$

$$\text{Luego } \text{Ran}(f) = [-12, (b-5)^2 - 16] = [a, 9]$$

$$a = -12 \wedge (b-5)^2 - 16 = 9$$

$$a = -12 \wedge (b-5)^2 = 25$$

$$a = -12 \wedge (b-5 = 5 \vee b-5 = -5)$$

$$a = -12 \wedge (b = 10 \vee b = 0), \text{ pero } b \text{ no puede ser cero}$$

$$a = -12 \wedge b = 10$$

- 3) La consulta le costó $3|a| = 3|-12| = 36$ soles,
 por las medicinas pagó $4(|a| + 4b + 2) = 4(|-12| + 4(10) + 2) = 216$ soles;
 por su visita al dermatólogo pagó en total 252 soles.

Rpta.: C

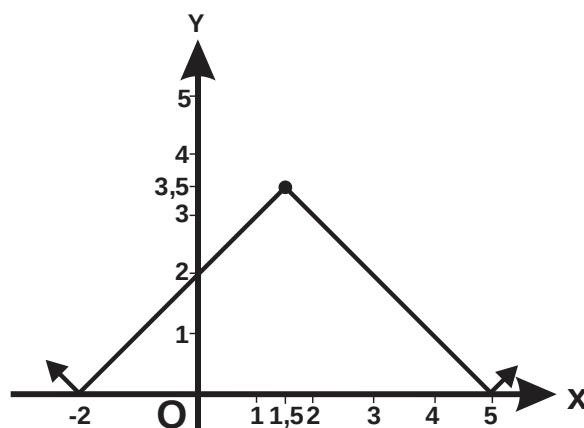
6. Dada la función f definida por $f(x) = \begin{cases} |x-5|, & x \geq \frac{3}{2} \\ |x+2|, & 2x < 3 \end{cases}$ y los conjuntos $M = \mathbb{Z} \cap \text{Ran}(f)$ y

$T = \{x \in \mathbb{Z}^+ / f \text{ es decreciente e inyectiva}\}$. Si Grace ingresó a la universidad cuando tenía " $P + 2$ " años siendo P la suma de los elementos de $M \cap T$, ¿a qué edad ingresó Grace a la universidad?

- A) 15 años B) 16 años C) 17 años D) 18 años

Solución:

- 1) Graficando f definida por $f(x) = \begin{cases} |x-5|, & x \geq \frac{3}{2} \\ |x+2|, & 2x < 3 \end{cases}$



- 2) $T = \{x \in \mathbb{Z}^+ / f \text{ es decreciente e inyectiva}\} = \{2, 3, 4, 5\}$
- 3) Tenemos: $M = \mathbb{Z} \cap \text{Ran}(f) = \mathbb{Z} \cap [0, +\infty) = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- 4) $M \cap T = \{2, 3, 4, 5\} \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{2, 3, 4, 5\}$
- 5) Sumando los elementos de $M \cap T$: $P = 2+3+4+5=14$
- 6) Grace ingresó a la Universidad a los $P + 2 = 14 + 2 = 16$ años.

Rpta.: B

7. Se sabe que cierto modelo Z de automóvil disminuye su valor en un 25% cada año con respecto al año anterior. Si un auto nuevo del modelo Z cuesta 20 000 dólares, ¿cuántos años deben transcurrir aproximadamente para que el valor del automóvil sea de 267 dólares?

Considere $\ln\left(\frac{267}{20000}\right) = -4,3162$ y $\ln\left(\frac{3}{4}\right) = -0,2876$

- A) 10 años B) 12 años C) 13 años D) 15 años

Solución:

- 1) De los datos se tiene que el valor en dólares del automóvil al cabo de x años desde que se compró es $V(x) = 20000(100\% - 25\%)^x = 20000\left(\frac{3}{4}\right)^x$
- 2) Entonces para que $V(x) = 267$

$$267 = 20000\left(\frac{3}{4}\right)^x \quad \rightarrow \quad \frac{267}{20000} = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

$$\ln\left(\frac{267}{20000}\right) = \ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x\right) \quad \rightarrow \quad -4,3162 = x\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$-4,3162 = x(-0,2876) \quad \rightarrow \quad \frac{-4,3162}{-0,2876} = x$$

$$x = 15,0076$$
- 3) Deben transcurrir aproximadamente 15 años para que el valor del automóvil sea de 267 dólares.

Rpta.: D

8. Jorgito es un estudiante del curso de Cálculo I que obtuvo la nota de $4[f^*(2)]^3$ en el examen parcial (EP) y en el promedio de prácticas (PP) su nota fue $\left([f^*(0)]^3 - 3\right)$.

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida por $f(x) = \left(3 - x^3\right)^{\frac{1}{3}} + 2$ y el profesor informó que el promedio final del curso será el promedio aritmético de las notas de EP, PP y EF y que la nota mínima aprobatoria es 10,5; ¿cuánto de nota, como mínimo, debería obtener Jorgito en el examen final (EF) para aprobar el curso de cálculo I? (Ninguna nota se redondea antes de calcular el promedio final).

- A) 12 B) 11,5 C) 15 D) 14

Solución:

Se tiene $f(x) = \left(3 - x^3\right)^{\frac{1}{3}} + 2 = \sqrt[3]{3 - x^3} + 2$, $x \in \mathbb{R} \rightarrow y = \sqrt[3]{3 - x^3} + 2$

$$(y - 2)^3 = 3 - x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{3 - (y - 2)^3}$$

$$\rightarrow f^*(x) = \sqrt[3]{3 - (x - 2)^3}$$

- 1) Luego Jorgito obtuvo las siguientes notas

$$\text{Nota del 1er parcial: } 4 \left[f^*(2) \right]^3 = 12$$

$$\text{Nota de Práctica: } \left(\left[f^*(0) \right]^3 - 3 \right) = 8$$

Nota del examen final = x

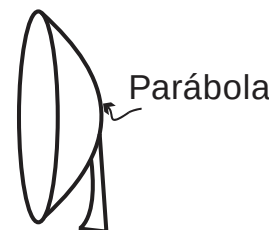
$$\frac{12 + 8 + x}{3} \geq 10,5 \rightarrow x \geq 11,5$$

- 2) En el examen final debe obtener de nota como mínimo 11,5

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

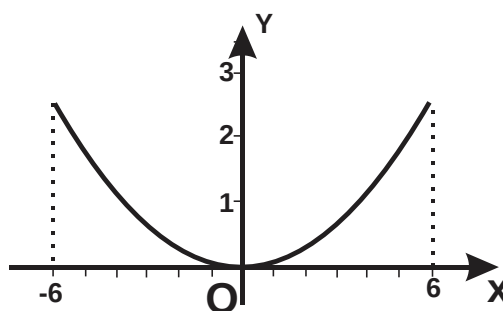
1. El reflector de la antena de TV por satélite es tal que al hacer un corte transversal se obtiene una parábola, como se ve en la figura, tal que la distancia entre los extremos es de 12 pies y 2,5 pies de profundidad. Determine la distancia del vértice a la antena receptora que se encuentra en el foco de la parábola determinada en el plano XY. Considere el vértice en el origen de coordenadas.



- A) 3 pies B) 3,5 pies C) 3,6 pies D) 4 pies

Solución:

- 1) Consideremos la ecuación $y = ax^2$, ya que su vértice es el eje de coordenadas



De los datos $f(6) = f(-6) = 2,5$

$$\text{Luego } 2,5 = a(6)^2 \rightarrow a = \frac{5}{72}$$

- 2) Si consideramos la ecuación de una parábola $x^2 = 4p \rightarrow x^2 = 4\left(\frac{18}{5}\right)$, la distancia del vértice a la antena receptora (foco) es $\frac{18}{5} = 3,6$ pies

Rpta.: C

2. María José compró $b - \sqrt{14}$ pelotas de fútbol para regalar a sus sobrinos. Si cada pelota costó "a" decenas de soles y la función $f: \text{Dom}(f) = [5; b] \rightarrow [a - 10; 5]$ definida por $f(x) = x^2 - 8x + 7$ es biyectiva, ¿cuánto pagó en total María José por la pelotas?

- A) 60 soles B) 80 soles C) 100 soles D) 150 soles

Solución:

- 1)
- f
- es biyectiva, entonces
- f
- es suryectiva

$$\text{Luego } \text{Ran}(f) = [a-10, 5]$$

- 2)
- f
- es inyectiva entonces
- $f(x) = (x-4)^2 - 9$
- con vértice
- $V(4, -9)$
- es creciente en el intervalo
- $[4, +\infty)$

$$\text{Entonces } \text{Ran}(f) = [f(5), f(b)] = [(5-4)^2 - 9, (b-4)^2 - 9] = [-8, (b-4)^2 - 9]$$

$$\text{Luego } \text{Ran}(f) = [-8, (b-4)^2 - 9] = [a-10, 5]$$

$$a-10 = -8 \wedge (b-4)^2 - 9 = 5$$

$$a = 2 \wedge (b-4)^2 = 14$$

$$a = 2 \wedge (b-4 = \sqrt{14} \vee b-4 = -\sqrt{14})$$

$$a = 2 \wedge (b = 4 + \sqrt{14} \vee b = 4 - \sqrt{14}),$$

$$a = 2 \wedge b = 4 + \sqrt{14}$$

- 3) compró
- $b - \sqrt{14} = 4$
- pelotas, a 20 soles cada una, luego María José pagó 80 soles en total por las pelotas.

Rpta.: B

3. El precio de un auto se va depreciando al transcurrir de los años. Una función f lineal y biyectiva modela dicho precio de costo al transcurrir x años desde el momento de la compra del auto. Si $f: \text{Dom}(f) = [0, 20] \rightarrow [0, 20000]$ y x es un elemento del dominio de f , ¿dentro de cuántos años el auto costará \$ 5000?

A) 12 años

B) 15 años

C) 18 años

D) 20 años

Solución:

- 1) Como
- f
- es lineal,
- $f(x) = ax + b$
- y como es sobreyectiva
- $\text{Ran}(f) = [0, 20000]$
- .

- 2) Como el valor de un auto disminuye conforme pasa el tiempo;
- f
- debe ser decreciente, entonces
- $\text{Ran}(f) = [f(20), f(0)]$
- .

$$\begin{aligned} f(0) = b & \rightarrow \begin{cases} f(0) = b = 20000 \\ f(20) = 20a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(0) = b = 20000 \\ f(20) = 20a + 20000 = 0 \end{cases} \rightarrow a = -1000 \end{aligned}$$

- 3) Luego
- $f(x) = -1000x + 20000$

Para que cueste \$5000

$$5000 = -1000x + 20000$$

$$1000x = 15000$$

$$x = 15$$

- 4) Luego de 15 años el auto costará \$ 5000

Rpta.: B

4. Dados los conjuntos $M = \{x / x \text{ es de nacionalidad peruana}\}$ y $N = \{\text{Puno, Huánuco, Lima}\}$. Sea f una función de M en N sobreyectiva que relaciona una persona con su lugar de nacimiento. Podemos afirmar que f podría determinarse por:

- I. Mario y Jhon son puneños, y Luis y Carlos limeños.
- II. Luis es limeño, Jhon es puneño, y Mario y Carlos huanuqueños.
- III. Luis y Mario son limeños, y Jhon y Carlos huanuqueños.

- A) solo I B) solo II C) solo III D) II y III

Solución:

- 1) f es sobreyectiva luego su rango es $N = \{\text{Puno, Huanuco, Lima}\}$.
- 2) Luego solo II podría determinar f , ya que es la única que considera los tres departamentos.

Rpta.: B

5. Juan Pérez va al cine y le cobran por la entrada “ n ” soles, donde “ n ” es la suma de los 4 menores elementos enteros del dominio de la función definida por

$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{e^{x+1} - \ln(x+1)}, \text{ ¿cuál es el valor de la entrada al cine?}$$

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 17

Solución:

$$1) \quad f(x) = \frac{\ln(x-1)}{e^{x+1} - \ln(x+1)}, \text{ su dominio se obtiene:}$$

$$x-1 > 0 \wedge x+1 > 0 \wedge e^{x+1} - \ln(x+1) \neq 0$$

$$x > 1 \wedge x > -1 \wedge e^{x+1} \neq \ln(x+1)$$

$$x > 1$$

$$2) \quad \text{Dom}(f) = \langle 1, +\infty \rangle, n = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

3) El valor de la entrada al cine es de 14 soles.

Rpta.: A

6. Se calienta un objeto a 100°C y se le deja enfriar dentro de una habitación cuya temperatura ambiente es de 40°C . Si la temperatura del objeto después de t minutos esta modelada por la función $T(t) = 40 + 60e^{-0,02t}$ en grados Celsius, ¿después de cuánto tiempo en la habitación la temperatura del objetó será de 70°C ?

$$\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.69 \right)$$

- A) 53,4 minutos B) 43,5 minutos C) 34,5 minutos D) 24, 5 minutos

Solución:

$$1) \quad T(t) = 40 + 60e^{-0,02t}$$

$$70 = 40 + 60e^{-0,02t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-0,02t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,02t$$

$$-0.69 = -0,02t$$

$$t = 34,5$$

- 2) Después de 34,5 minutos en la habitación la temperatura del objetó será de 70°C

Rpta.: C

7. La concentración de medicamentos en el torrente sanguíneo de un paciente, t horas después de aplicados, esta dado por $C(t) = 3,97e^{-0,9t}$ miligramos por mililitro (mg/ml). ¿Después de cuántas horas, la concentración de medicamento en la sangre es de 0,17 mg/ml? Considere $\ln\left(\frac{0,17}{3,97}\right) = -3,15073$ aprox.

A) 3,5 horas B) 3 horas C) 4,5 horas D) 4 horas

Solución:

1) $C(t) = 3,97e^{-0,9t}$

$$0,17 = 3,97e^{-0,9t}$$

$$\frac{0,17}{3,97} = e^{-0,9t}$$

$$\ln\left(\frac{0,17}{3,97}\right) = -0,9t$$

2) $-3,15073 = -0,9t$

$$t = \frac{-3,15073}{-0,9} \approx 3,5$$

- 3) Después de 3,5 horas aproximadamente la concentración de medicamento en la sangre es de 0,17 mg/ml

Rpta.: A

8. Halle la función inversa f^* de la función f definida por $f(x) = x + 2\sqrt{x} + 4$.

A) $f^*(x) = x + 2\sqrt{x-3} + 2$; $x \geq 4$

B) $f^*(x) = x - 2\sqrt{x-3} + 2$; $x \geq 4$

C) $f^*(x) = x + 2\sqrt{x-3} - 2$; $x \geq 4$

D) $f^*(x) = x - 2\sqrt{x-3} - 2$; $x \geq 4$

Solución:

1) $f(x) = x + 2\sqrt{x} + 4 = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x} + 1)^2 + 3$

$$\sqrt{x} \geq 0 \rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \rightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 \geq 1 \rightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 + 3 \geq 4$$

$$\text{Ran}(f) = [4, +\infty)$$

2) $y = (\sqrt{x} + 1)^2 + 3 \rightarrow y - 3 = (\sqrt{x} + 1)^2$

$$(-1 \pm \sqrt{y-3})^2 = x$$

$$f^*(x) = (-1 + \sqrt{x-3})^2, x \geq 4$$

3) $f^*(x) = x - 2\sqrt{x-3} - 2, x \geq 4$

Rpta.: D

Álgebra

EJERCICIOS

1. La función f es inyectiva y satisface que $f(6a - 8b - 9) = f(a^2 + b^2 + 16)$, determine el rango de la función g definida por $g(x) = \sqrt{x^2 + 5} - 1$, si $\text{Dom}(g) = [2a + b, \sqrt{5b^2 + 5a}]$

A) $[0, 10]$ B) $[2, 9]$ C) $[2, 11]$ D) $[2, 8]$ E) $[2, 10]$

Solución:

Como f es inyectiva y $f(6a - 8b - 9) = f(a^2 + b^2 + 16)$

entonces $a^2 + b^2 + 16 = 6a - 8b - 9$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 6a + 8b + 25 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 3)^2 + (b + 4)^2 = 0 \Rightarrow (a = 3 \text{ y } b = -4).$$

Tenemos $g(x) = \sqrt{x^2 + 5} - 1$ con $\text{Dom}(g) = [2, \sqrt{95}]$

g es creciente en $[2, \sqrt{95}]$ entonces $\text{Ran}(g) = [g(2), g(\sqrt{95})] = [2, 9]$

Rpta.: B

2. Analice y determine el valor de verdad (V o F) de las siguientes proposiciones (en ese orden):

I. $f(x) = x|x|$ define una función inyectiva

II. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ define una función creciente para $x > 2$

III. $f(x) = x - \sqrt{x^2}$ no define una función inyectiva

IV. La regla de correspondencia de la función inversa de la función

$f(x) = e^{x^3}$ con $x > 0$ es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\ln(x)}$ para $x > 1$

A) VVVF B) VFVV C) VVVF D) VVVV E) VFVF

Solución:

$$\text{I. } f(x) = x|x| \text{ entonces } f(x) = \begin{cases} x^2 & \dots x \geq 0 \\ -x^2 & \dots x < 0 \end{cases} \text{ sus ramas son inyectivas... (V)}$$

$$\text{II. } f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \text{ para } x > 2$$

$$\text{Sea } 2 < a < b \Rightarrow a+1 < b+1 \Rightarrow \frac{1}{a+1} > \frac{1}{b+1} \Rightarrow -\frac{1}{a+1} < -\frac{1}{b+1}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{a+1} < 1 - \frac{1}{b+1} \Rightarrow f(a) < f(b) \dots (V)$$

$$\text{III. } f(x) = x - \sqrt{x^2} \Rightarrow f(x) = x - |x| = \begin{cases} 0 & \dots x \geq 0 \\ 2x & \dots x < 0 \end{cases} \dots (V)$$

$$\text{IV. } \left(y = e^{x^3} \wedge x > 0 \right) \Rightarrow \left(\ln(y) = x^3 \wedge x^3 > 0 \right) \Rightarrow \left(x^3 = \ln(y) \wedge e^{x^3} > 1 \right)$$

$$\Rightarrow \left(x = \sqrt[3]{\ln(y)} \wedge y > 1 \right) \therefore f^*(x) = \sqrt[3]{\ln(x)} \text{ con } x > 1 \dots (V)$$

Rpta.: D

3. La función $f: \text{Dom}(f) = [4, 10] \rightarrow [-3a^4, b-3]$ definida por $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ es suryectiva. Halle el valor de $L = a + \log_b(1 - a^3)$ si $a < 0$.

A) 10 B) 0 C) 3 D) 6 E) 9

Solución:

$$f: \text{Dom}(f) = [4, 10] \rightarrow [-3a^4, b-3] \text{ definida por } f(x) = -x^2 + 6x - 8$$

$$f(x) = -(x-3)^2 + 1 \text{ es una parábola hacia abajo de centro } (3, 1)$$

Como f es decreciente en $[4, 10]$

$$\text{entonces } \text{Ran}(f) = [f(10), f(4)] = [-48, 0]$$

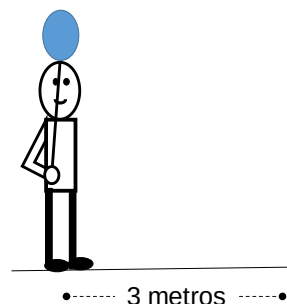
$$\text{Como } f \text{ es sobreyectiva } \Rightarrow (-3a^4 = -48 \text{ y } b-3 = 0)$$

$$\Rightarrow (a^4 = 16 \text{ y } b = 3) \Rightarrow ((a = -2 \text{ o } a = 2) \text{ y } b = 3)$$

$$\text{Si } a = -2: a + \log_b(1 - a^3) = (-2) + \log_3(9) = 0$$

Rpta.: B

4. El niño Lunié está paseando por la plaza de armas de Lima, cerca a la Catedral, sujetando un globo cuyo extremo inferior se encuentra exactamente a nivel y sobre su cabeza. Accidentalmente él suelta el globo y éste por efecto del viento asciende describiendo una trayectoria cúbica $h(t) = t^3 - 6t^2 + 12t + 1$, la cual representa la altura (en metros) del globo respecto del piso y t es el tiempo (en segundos) desde que el globo está suelto, por lo que Lunié en su intento de agarrarlo corre inmediatamente a velocidad constante de 1 m/s. Si los desplazamientos de Lunié y del globo son coplanares; halle la altura a la que se encuentra el globo respecto a la altura del niño, cuando él ha corrido 3 metros horizontales.



- A) 11 metros B) 9,5 metros C) 9 metros D) 8 metros E) 12 metros

Solución:

Del texto se deduce que el movimiento de Lunié y del globo es coplanar, además Lunié corre al mismo instante que el globo empieza a subir.

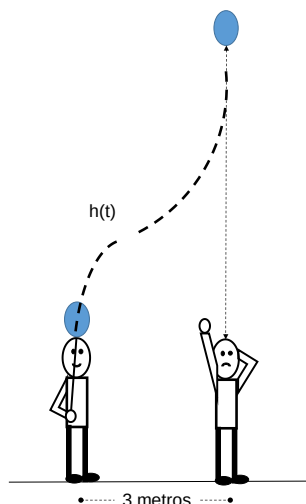
$$h(t) = t^3 - 6t^2 + 12t + 1 \quad \text{p} \quad h(t) = (t-2)^3 + 9$$

si $t=0$ segundos entonces $h(0)=1$,

Lunié mide 1 metro.

si $t=3$ segundos entonces $h(3)=10$ metros.

Cuando Lunié corrió 3 metros, su globo se encuentra a 9 metros sobre él.



Rpta.: C

5. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 4x + 5 \text{ es inyectiva y creciente}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / g(x) = x^2 - 3 \text{ es inyectiva y decreciente}\}$, halle el número de elementos enteros de $A^c \cap B^c$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Solución:

$f(x) = (x-2)^2 + 1$ es una parábola hacia arriba de centro $(2,1) \Rightarrow A = [2, +\infty)$

$g(x) = x^2 - 3$ es una parábola hacia arriba de centro $(0,-3) \Rightarrow B = \langle -\infty, 0]$

$$A^c \cap B^c = \langle -\infty, 2 \rangle \cap \langle 0, +\infty \rangle = \langle 0, 2 \rangle$$

En $\langle 0, 2 \rangle$ hay 1 elemento entero.

Rpta.: A

6. Calcule la función inversa f^* de la función f definida por $f(x) = x + 2\sqrt{x+1} + 3$.

A) $f^*(x) = 2\sqrt{x-1} - x, x \geq 2$ B) $f^*(x) = -x - \sqrt{x-1} + 2, x \geq 2$
 C) $f^*(x) = -x - \sqrt{x-1}, x \geq 2$ D) $f^*(x) = x - 2\sqrt{x-1} - 1, x \geq 2$
 E) $f^*(x) = x + \sqrt{x-1} - 1, x \geq 2$

Solución:

$f(x) = x + 2\sqrt{x+1} + 3$ entonces $x \geq -1$

$$f(x) = x + 2\sqrt{x+1} + 3 \Rightarrow f(x) = (\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1} + 1 + 1 \Rightarrow f(x) = (\sqrt{x+1} + 1)^2 + 1$$

$$\text{Como } x \geq -1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow \underbrace{(\sqrt{x+1} + 1)^2}_{f(x)} + 1 \geq 2 \therefore \text{Dom}(f^*) = \text{Ran}(f) = [2, +\infty)$$

$$\text{Si } y = f(x) = (\sqrt{x+1} + 1)^2 + 1 \Rightarrow x = (\sqrt{y-1} - 1)^2 - 1$$

$$\Rightarrow f^*(x) = (\sqrt{x-1} - 1)^2 - 1 \therefore f^*(x) = x - 2\sqrt{x-1} - 1$$

Por lo tanto $f^*(x) = x - 2\sqrt{x-1} - 1$ con $x \geq 2$.

Rpta.: D

7. Sea f una función lineal, creciente y sobreyectiva tal que $f: \text{Dom}(f)=[2,20] \rightarrow [10,64]$. Carlos compró en una librería, $f^*(40)$ lapiceros pagando por cada uno de ellos $f^*(19)$ soles, ¿cuánto recibió de vuelto Carlos, si pagó con un billete de 100 soles?

A) 80 soles B) 40 soles C) 90 soles D) 84 soles E) 60 soles

Solución:

Sea $f(x) = ax + b$ creciente y sobreyectiva

$$\begin{cases} f(2) = 10 \Rightarrow 2a + b = 10 \\ f(20) = 64 \Rightarrow 20a + b = 64 \end{cases} \text{ entonces } (a = 3 \text{ y } b = 4)$$

$$\text{Tenemos } f(x) = 3x + 4 \Rightarrow f^*(x) = \frac{1}{3}(x - 4)$$

$$\text{Precio de cada lapicero: } f^*(19) = \frac{1}{3}(15) = 5 \text{ soles}$$

$$\text{Cantidad de lapiceros comprados: } f^*(40) = \frac{1}{3}(36) = 12 \text{ lapiceros}$$

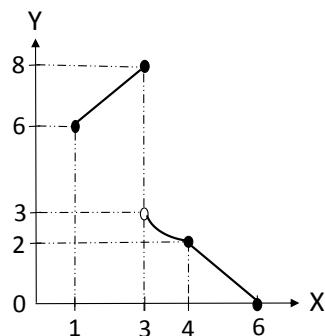
Carlos gastó $12 \times 5 = 60$ soles entonces recibió, 40 soles de vuelto.

Rpta.: B

8. La gráfica adjunta corresponde a la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + m & 1 \leq x \leq 3 \\ (x - 4)^2 + 2 & 3 < x < 4 \\ -x + n & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Halle el valor de $f^*(n - m) + f^*(n)$.



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Solución:

$$f(3) = 8 \Rightarrow 3 + m = 8 \Rightarrow m = 5$$

$$f(4) = 2 \Rightarrow -4 + n = 2 \Rightarrow n = 6$$

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & 1 \leq x \leq 3 \\ (x-4)^2 + 2 & 3 < x < 4 \\ -x+6 & 4 \leq x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow f^*(x) = \begin{cases} x-5 & 6 \leq x \leq 8 \\ 4-\sqrt{x-2} & 2 < x < 3 \\ -x+6 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$f^*(n-m) + f^*(n) = f^*(1) + f^*(6) = (5) + (1) = 6$$

Rpta.: E**EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. Si $f = \{(a^2, 2), (3, -3), (-1, 0), (4, 2), (2, 9), (-1, b^2 - 9), (-b, 6), (2a, -5), (6, c)\}$ es una función inyectiva tal que la suma de los elementos de su rango es 7, halle el valor de $a+b+c+f^*(-2)$.

A) 0 B) 6 C) 5 D) 2 E) -4

Solución:

$$f = \{(a^2, 2), (3, -3), (-1, 0), (4, 2), (2, 9), (-1, b^2 - 9), (-b, 6), (2a, -5), (6, c)\}$$

f es función: $b^2 - 9 = 0 \Rightarrow (b = -3 \vee b = 3)$

$b = -3$: $f = \{(a^2, 2), (3, -3), (-1, 0), (4, 2), (2, 9), (3, 6), (2a, -5), (6, c)\}$ no es función

$b = 3$: $f = \{(a^2, 2), (3, -3), (-1, 0), (4, 2), (2, 9), (-3, 6), (2a, -5), (6, c)\}$

dato: $(2) + (-3) + (0) + (9) + (6) + (-5) + c = 7 \Rightarrow c = -2$

$\therefore f = \{(a^2, 2), (3, -3), (-1, 0), (4, 2), (2, 9), (-3, 6), (2a, -5), (6, -2)\}$

f es inyectiva: $a^2 = 4 \Rightarrow (a = 2 \vee a = -2)$

Si $a = 2$: $f = \{(4, 2), (3, -3), (-1, 0), (2, 9), (-3, 6), (4, -5), (6, -2)\}$ no es función

Si $a = -2$: $f = \{(4, 2), (3, -3), (-1, 0), (2, 9), (-3, 6), (-4, -5), (6, -2)\}$

Piden $a+b+c+f^*(-2) = (-2) + (3) + (-2) + 6 = 5$

Rpta.: C

2. El profesor Luis en su clase de funciones pide a sus estudiantes que hallen el valor de verdad de las siguientes proposiciones, según el orden dado:
- la función f definida por $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ es creciente en $\langle -\infty, 5 \rangle$.
 - la función g definida por $g(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ no es inyectiva
 - Si la función $f = \{(3a^2, -4), (7, 2), (12, -4), (5, a)\}$ es inyectiva entonces $a^3 + 2 = -6$.
 - la función $h: \text{Dom}(h) = [2, 9] \rightarrow [-1, 13]$ definida por $h(x) = 2x - 5$ es sobreyectiva.

Alexandra respondió así: FVFV

Fabrizio respondió así: VFVV

Nicolás respondió así: FVVV

Susana respondió así: VVVV

¿Quiénes de los estudiantes respondieron al menos 3 preguntas, correctamente?

- Alexandra y Susana
- Alexandra y Fabrizio
- Fabrizio y Susana

- Susana, Fabrizio y Nicolás
- Alexandra, Susana y Nicolás

Solución:

I. $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ es una parábola hacia abajo de centro $(3, 2)$... (F)

II. $g(x) = 1$ es una función constante ... (V)

III. $f = \{(3a^2, -4), (7, 2), (12, -4), (5, a)\}$

$$3a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow (a = 2 \vee a = -2)$$

Si $a = 2$: $f = \{(12, -4), (7, 2), (5, 2)\}$ no es inyectiva

Si $a = -2$: $f = \{(12, -4), (7, 2), (5, -2)\}$ es inyectiva $\Rightarrow a^3 + 2 = -6$... (V)

IV. la función $h(x) = 2x - 5$ es lineal y creciente en $[2, 9]$

entonces $\text{Ran}(h) = [h(2), h(9)] = [-1, 13]$... (V)

Rpta.: D

3. Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones, según el orden dado:

I. la función f definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$ es inyectiva

II. la función $f: \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 9$ es suryectiva

III. la función $f: \text{Dom}(f) = [2, +\infty) \rightarrow [-1, +\infty)$, definida por $f(x) = x^2 - 2x - 1$ entonces $f^*(2) = 3$.

A) FFV

B) FVF

C) VVV

D) FVV

E) FFF

Solución:

I. Para $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8} = \sqrt{(x-2)(x+4)} \Rightarrow f(-4) = 0 = f(2)$ entonces f no es inyectiva ... (F)

- II. Si $f(x) = (x-2)^2 + 5$, para $x \in \mathbb{R} : (x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 + 5 \geq 5$ entonces se tiene $f(x) \geq 5$, es decir $\text{Ran}(f) = [5, +\infty)$. Por lo tanto f no es suryectiva ... (F)
- III. $f(x) = (x-1)^2 - 2$ es una parábola hacia arriba de centro $(1, -2)$ entonces f es inyectiva en $[2, +\infty)$ y también es suryectiva, pues
- $$f(2) = -1 \therefore \text{Ran}(f) = [-1, +\infty)$$
- $$f(x) = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 3.$$
- Por lo tanto $f(3) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = 3 \dots (V)$

Rpta: A

4. Frank invita a sus “b” compañeros de oficina al restaurante “Clarita” para almorzar juntos. Si $p = a + b + c + d$ representa el precio de un menú y la función f es tal que

$$f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ y } f(x) = \frac{x+5}{x-2}, \quad x \neq 2, \text{ ¿cuánto fue el pago total que hizo Frank?}$$

- A) 70 soles B) 28 soles C) 35 soles D) 42 soles E) 21 soles

Solución:

$$y = \frac{x+5}{x-2} \text{ con } x \neq 2 \Rightarrow x = \frac{2y+5}{y-1} \therefore f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{x-1}$$

Identificando $a = 2, b = 5, c = 1, d = -1$

Precio de un menú: $p = (2) + (5) + (1) + (-1) = 7$ soles

número de menús: $b + 1 = 6 \therefore$ Frank pagó: $7 \times 6 = 42$ soles

Rpta.: D

5. La función f es definida por $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$ con $x \in [-4, 4]$. Determine cuánto pagó Pepito por comprar $n = \text{Card}[\text{Dom}(f^*) \cap \mathbb{Z}]$ cuadernos en una feria escolar a $f^*(9)$ soles cada uno de ellos.

- A) 44 soles B) 28 soles C) 36 soles D) 72 soles E) 56 soles

Solución:**Cálculo de $\text{Ran}(f)$**

Tenemos

$$\text{i) } x^2 + 9 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 9} > |x| = \pm x \Rightarrow y = x + \sqrt{x^2 + 9} > 0$$

$$\text{ii) } y = x + \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow x = \frac{y^2 - 9}{2y}$$

$$\text{Como } -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow 0 \leq |x| \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \left| \frac{y^2 - 9}{2y} \right| \leq 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq |y^2 - 9| \leq 8y \Rightarrow -8y \leq y^2 - 9 \leq 8y \Rightarrow 1 \leq y \leq 9 \therefore \text{Ran}(f) = [1, 9]$$

Cálculo de f^*

$$\text{De ii) } x = \frac{y^2 - 9}{2y} \Rightarrow f^*(x) = \frac{x^2 - 9}{2x} \Rightarrow f^*(9) = 4$$

$$\text{Dom}(f^*) = \text{Ran}(f) = [1, 9] \Rightarrow n = 9$$

Pepito compró 9 cuadernos de 4 soles cada uno de ellos,
pagó $9 \times 4 = 36$ soles.

Rpta.: C

6. La función $f(t) = p \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n \cdot t}$ expresa el valor futuro de un capital p cuando se invierte a una tasa de interés anual r , donde n es el número de capitalizaciones y t es el tiempo en años, al que se impone dicho capital. Suponga que se invierte 1000 dolares a una tasa de interés anual del 20 % capitalizable semestralmente y se espera que el valor futuro sea de 2000 dolares. ¿En qué tiempo aproximadamente se logra esto?. Considere que $\log(2) = 0,30$ y $\log(1,1) = 0,04$.

- A) 3 años y 9 meses
D) 4 años y 3 meses

- B) 3 años y 2 meses
E) 2 años y 9 meses

- C) 2 años y 6 meses

SoluciónTenemos $p = 1000$, $f(t_0) = 2000$, $r = 0,20$ y $n = 2$

$$\text{Por dato: } 1000 \left(1 + \frac{0,20}{2} \right)^{2t_0} = 2000 \Rightarrow (1,1)^{2t_0} = 2$$

$$\Rightarrow 2t_0 \cdot \ln(1,1) = \ln(2) \Rightarrow t_0 = \frac{0,30}{0,08} = 3,75 \text{ años}$$

Se logra 2000 dólares en aprox 3 años y 9 meses.

Rpta: A

7. Un padre comunica a sus tres hijos que repartirá cierta cantidad de dinero según la edad que ellos posean. Si las edades (en años) de los tres hijos son las soluciones de la ecuación $(x-8)(x^2-37x+330)=0$ y el reparto se hará mediante la función inversa de f definida por $f(x)=1+\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}$, ¿cuánto dinero (en miles de soles) le correspondió al mayor de los hijos?
- A) 18 B) 6 C) 12 D) 24 E) 30

Solución:

$$(x-8)(x^2-37x+330)=0 \Rightarrow (x-8)(x-15)(x-22)=0$$

$$\Rightarrow \text{C.S.} = \{8, 15, 22\} \therefore \text{Edad del hijo mayor: } 22 \text{ años}$$

$$\text{Dado } f(x)=1+\frac{7x}{6} \Rightarrow f^*(x)=\frac{6(x-1)}{7}$$

Al hijo mayor le corresponde $f^*(22)=18$ mil soles

Rpta.: A

8. En una playa de estacionamiento hay $(3a+10)$ vehículos entre autos y motos lineales y el total de ruedas es 170. Si “a” es la suma de los 5 primeros elementos enteros del rango de la función f definida por $f(x)=\log\left(1+\frac{1}{\ln(x)-1}\right)$ con $x \in \langle e, +\infty \rangle$, ¿cuántas motos lineales hay en el estacionamiento?
- A) 25 B) 30 C) 20 D) 40 E) 35

Solución:**Cálculo del rango**

$$x > e \Rightarrow \ln(x) > \ln(e) \Rightarrow \ln(x)-1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{\ln(x)-1} > 0$$

$$\Rightarrow \log\left(1+\frac{1}{\ln(x)-1}\right) > 0 \therefore \text{Ran}(f) = \langle 0, +\infty \rangle$$

Por dato: $a=1+2+3+4+5=15$

Sean x : número de autos y y : número de motos lineales

$$\text{entonces } \begin{cases} x+y=55 \\ 4x+2y=170 \end{cases} \Rightarrow (x=30 \text{ y } y=25)$$

Hay 25 motos lineales en el estacionamiento.

Rpta.: A

Álgebra

EJERCICIOS

1. Si $f : [m; -2] \rightarrow \left[n; -\frac{1}{24} \right]$ es una función biyectiva tal que $f(x) = \frac{1}{6x+6}$, halle $6n - m$.

A) -5 B) -2 C) 3 D) 4 E) 8

Solución:

- 1) Como f es biyectiva, f es suryectiva es decir $\text{Ran}(f) = \left[n; -\frac{1}{24} \right]$

Por otro lado

- 2) Como f es biyectiva, f es inyectiva

Luego f podría ser creciente entonces $\text{Ran}(f) = [f(m); f(-2)]$

$$f(m) = n \text{ y } f(-2) = -\frac{1}{24}$$

$$f(m) = \frac{1}{6m+6} = n \text{ y } f(-2) = \frac{1}{6(-2)+6} = -\frac{1}{24} \text{ ¡no es posible!}$$

Luego f debe ser decreciente entonces $\text{Ran}(f) = [f(-2); f(m)]$

$$f(-2) = n \text{ y } f(m) = -\frac{1}{24}$$

$$f(-2) = \frac{1}{6(-2)+6} = -\frac{1}{6} = n \text{ y } f(m) = \frac{1}{6m+6} = -\frac{1}{24} \quad m = -5$$

- 3) $6n - m = 6\left(-\frac{1}{6}\right) - (-5) = 4$

Rpta.: D

2. La distancia Lima –Pichanaqui está determinada por $(10(a+2b)+35)$ kilómetros, donde la fracción irreducible $\frac{a}{b}$ es la suma de cada una de las ordenadas elevadas

a la potencia 4 de los elementos del cociente de funciones $\frac{F}{G}$ donde,

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = F(x) = \sqrt[4]{8-2|x|}\}$$

$G = \{(-4, 0), (-3, 1), (1, 0), (3, 2), (5, 1), (8, 3)\}$. Determine la distancia Lima –Satipo que es 45 kilómetros más que la distancia anterior.

A) 360 km B) 365 km C) 400 km D) 410 km E) 700 km

Solución:

- 1) Hallemos la intersección de dominios

Para $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sqrt[4]{8-2|x|}\}$, el dominio de F es $x \in [-4, 4]$

Para $G = \{(-4, 0), (-3, 1), (1, 0), (3, 2), (5, 1), (8, 3)\}$, el dominio de G es $x = \{-4, -3, 1, 3, 5, 8\}$

Luego

$$\text{Dom}\left(\frac{F}{G}\right) = (\text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G)) - \{x / G(x) = 0\} = \{-4, -3, 1, 3\} - \{-4, 1\} = \{-3, 3\}$$

$$2) \text{ Entonces } \frac{F}{G} = \left\{ \left(-3, \frac{\sqrt[4]{2}}{1} \right), \left(3, \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \right) \right\} \text{ luego } \frac{a}{b} = \frac{17}{8}$$

- 3) Luego la distancia Lima –Satipo es
- $(10(17 + 2(8)) + 35) + 45 = 410$
- kilómetros.

Rpta.: D

3. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ definida por $f(x) = |x-2| - x$ es suryectiva, halle la suma de los 3 menores elementos enteros de M.

- A) 3 B) 1 C) -2 D) 2 E) -3

Solución:

- 1) Como $f(x) = |x-2| - x$ se tiene $f(x) = \begin{cases} 2-2x, & \text{si } x < 2 \\ -2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- 2) Como f es suryectiva $\text{Ran}(f) = \mathbb{M}$, hallando el rango de f

Para $x < 2$

$$f_1(x) = 2 - 2x$$

$$x < 2 \rightarrow 2x < 4 \rightarrow -2x > -4 \rightarrow 2 - 2x > -2$$

$$\text{Ran } f_1 = \langle -2, +\infty \rangle$$

Para $x \geq 2$

$$f_2(x) = -2$$

$$\text{Ran } f_2 = -2$$

$$\text{Luego } \text{Ran } f = [-2, +\infty)$$

- 3) $\mathbb{M} = \text{Ran } f = [-2, +\infty)$
 $-2 + -1 + 0 = -3$

Rpta.: E

4. Jesús desea adquirir una promoción de NETFLIX, que consiste en que: por a meses, el pago mensual sería de b soles. Para ello se tiene la función $f: \text{Dom}(f) = [2, 8] \rightarrow [a, b]$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 7$ es biyectiva. ¿cuánto pagó Jesús en total por dicha promoción de NETFLIX?

A) S/ 117 B) S/ 279 C) S/ 78 D) S/ 154 E) S/ 87

Solución:

- 1) La regla $f(x) = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$ corresponde a una función cuadrática creciente en el intervalo $[2, 8]$, luego $\text{Ran}(f) = [f(2), f(8)] = [a, b]$
Entonces $a = (2-2)^2 + 3 = 3$ y $b = (8-2)^2 + 3 = 39$
2) La promoción de NETFLIX corresponde a un pago de 39 soles por 3 meses, es decir 117 soles

Rpta.: A

5. Halle el rango de la función definida por $f(x) = \ln(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})$; $\forall x \in [2; 4]$.

A) $\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right), \ln\sqrt{2} \right]$ B) $\left[\frac{1}{2}\ln(2), \ln(2) \right]$ C) $\left[\frac{1}{2}\ln(2), \ln(4) \right]$
D) $\left[\frac{1}{4}\ln(2), \ln(2) \right]$ E) $\left\langle \frac{1}{5}\ln(2); \ln(2) \right\rangle$

Solución:

- 1) Como $x \in [2; 4] \rightarrow 2 \leq x \leq 4$
2) Consideremos $u = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \rightarrow u^2 = 2 + 2\sqrt{-x^2 + 6x - 8} = 2 + 2\sqrt{1-(x-3)^2}$
Como $2 \leq x \leq 4 \rightarrow 0 \leq (x-3)^2 \leq 1 \rightarrow 0 \leq 1-(x-3)^2 \leq 1 \rightarrow 0 \leq \sqrt{1-(x-3)^2} \leq 1$
 $2 \leq 2 + 2\sqrt{1-(x-3)^2} \leq 4 \rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq 2$
 $\ln\sqrt{2} \leq \ln(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}) \leq \ln(2)$
 $\frac{1}{2}\ln(2) \leq \ln(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}) \leq \ln(2)$
3) $\text{Ran}(f) = \left[\frac{1}{2}\ln(2), \ln(2) \right]$

Rpta.: B

6. Si la función $f = \{(-3; 6); (0; 0); (a; 3); (b; 6); (2b+2a; 3)\}$, halle el valor de $f^*(0) + f(f^*(3)) + f^*(6)$.

A) 3 B) -3 C) 0 D) 6 E) 2

Solución:

- 1) $f^*(0) + f(f^*(3)) + f^*(6) = 0 + 3 + b$
- 2) Como $(-3; 6) \in f \wedge (b; 6) \in f \rightarrow b = -3$
- 3) $f^*(0) + f(f^*(3)) + f^*(6) = 0 + 3 + b = 0 + 3 - 3 = 0$

Rpta.: C

7. Un cultivo de bacterias crece de acuerdo al modelo de crecimiento exponencial $n(t) = Me^{rt}$, donde **M** es el número inicial de bacterias, **r** es la tasa relativa de crecimiento y **t** representa el tiempo en horas transcurrido desde el inicio. La cuenta en dicho cultivo de bacterias fue de 400 bacterias después de dos horas y 25600 después de seis horas. Determine la tasa relativa de crecimiento de dicha población de bacterias, aproximadamente. Considere: $\ln 2 = 0,693$.

- A) 104% B) 1,04% C) 102% D) 100,3% E) 105%

Solución:

- 1) De los datos se tiene $n(2) = 400$ y $n(6) = 25600$

$$400 = Me^{2r} \text{ y } 25600 = Me^{6r}$$

$$M = \frac{400}{e^{2r}} = \frac{25600}{e^{6r}} \rightarrow e^{4r} = 64 \rightarrow 4r = \ln 64 \rightarrow r = \frac{\ln 2^6}{4}$$

$$\rightarrow r = \frac{6 \ln 2}{4} = 1.0395$$

- 2) tasa relativa de crecimiento es de 103.95 % aproximadamente sería 104%

Rpta.: A

8. f es una función lineal, tal que $f(5) = 25$ y $f^*(45)$ es igual a 10, donde f^* es la función inversa de f . Si $f(1)$ es el precio en soles de cada revista M y $f^*(17)$ es el número de revistas M que compró María, ¿cuál es el gasto total de María?

- A) S/ 15.00 B) S/ 25.00 C) S/ 26.00 D) S/ 27.00 E) S/ 30.00

Solución:

- 1) Como f es una función lineal $f(x) = ax + b$, $f(5) = 5a + b = 25$ además $f^*(45) = 10$ esto significa $f(10) = 10a + b = 45$ luego $a = 4$ y $b = 5$ con lo que la función está definida por $f(x) = 4x + 5$
- 2) Por lo tanto $f(1) = 9$ soles que es el precio de cada revista y $4x + 5 = 17$ resultando $x = 3$ con lo que $f^*(17) = 3$ revistas.
- 3) María gastó en total $9(3) = 27$ soles

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones:

i) $\forall b \in \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{bx}$ es una función decreciente.

ii) El rango de toda función exponencial es $[0, +\infty)$

iii) $f(x) = 4^{-x}, x \in \mathbb{R}$ es una función creciente.

A) VFF

B) FVV

C) VFV

D) FFF

E) FVF

Solución:

1) i) Para $b = -1$ se tiene $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 3^x$, f es una función creciente (F)

2) ii) Para $f(x) = -2(3)^x$ el $\text{Ran}(f) = \langle -\infty, 0 \rangle$ (F)

3) iii) $f(x) = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ función decreciente (F)

Rpta.: D

2. Diana comienza una dieta que le permite bajar de peso, su meta es alcanzar su peso ideal de 50 kg. Ella nota que su pérdida de peso es lineal y que cuando han transcurrido 3 meses su peso es de 65kg. además nota que su peso disminuye a razón de 5 kg por mes, ¿cuántos meses transcurrirán para que Diana obtenga su peso ideal?

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

Solución:

1) Consideremos $f(x) = ax + b$ donde $f(x)$ representa el número de kg que baja desde que inició la dieta. Como su peso disminuye a razón de 5 kg por mes $f(x) = -5x + b$ que cuando han transcurrido 3 meses su peso es de 65 kg $f(3) = 65, -5(3) + b = 65 \rightarrow b = 80$

2) $f(x) = -5x + 80$

$50 = -5x + 80$, luego $x = 6$, deben transcurrir 6 meses para que Diana alcance su peso ideal

Rpta.: C

3. Jorge es un estudiante universitario que recibe mensualmente para sus gastos una pensión de su padre que corresponde a un número entero mayor a S/ 1193 y menor a S/ 1200. Luego de recibir dicha pensión, el dinero diario del que dispone esta modelado por una función cuadrática de coeficientes enteros en función del número de días transcurridos. Si luego de 2 días de haber recibido la pensión Jorge dispone de S/ 1173 y al día siguiente de S/ 1152, ¿para cuántos días le alcanza el integro de la pensión recibida por Jorge?

A) 20 días

B) 19 días

C) 18 días

D) 16 días

E) 15 días

Solución:

- 1) Consideremos $f(x) = ax^2 + bx + c$, la función que modela el dinero diario que dispone Jorge luego de x días de recibida la pensión
Del dato $1193 < c < 1200$
- 2) Del dato luego de 2 días de haber recibido la pensión Jorge dispone de S/ 1173 y al día siguiente de S/ 1152
 $f(2) = a(2)^2 + b(2) + c = 1173 \rightarrow 4a + 2b + c = 1173$
 $f(3) = a(3)^2 + b(3) + c = 1152 \rightarrow 9a + 3b + c = 1152 \rightarrow 5a + b = -21$
Entonces $c = 6a + 1215$, $1193 < 6a + 1215 < 1200$
Luego $a = -3$ y $b = -6$
 $f(x) = -3x^2 - 6x + 1197$
- 3) $f(x) = -3x^2 - 6x + 1197 = 0$
 $x = -21 \vee x = 19$
- 4) Luego de 19 días se le acabará el dinero a Jorge

Rpta.: B

4. Indecopi multó a la empresa "San Hernando" con la cantidad de $\left[(a-b)^{b-a} + 50(b-a) - 6\right]$ UIT, por no cumplir con las especificaciones básicas en la elaboración de sus productos. Además a y b cumplen que $N^C = \langle a, b \rangle$ siendo $f: \text{Dom}(f) = M \rightarrow N$ una función suryectiva tal que $f(x) = \frac{x}{|x|}(x^2 - 2|x| + 3)$. Determine la multa (en UIT) asignada a dicha empresa.

- A) 450 UIT B) 400 UIT C) 390 UIT D) 370 UIT E) 420 UIT

Solución:

- 1) Hallamos el rango de f
- 2) $M = \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, entonces
* $x > 0: f(x) = \frac{x}{x}(x^2 - 2x + 3) = (x-1)^2 + 2 \rightarrow f(x) \in [2, +\infty)$
* $x < 0: f(x) = -\left[(x+1)^2 + 2\right] \rightarrow f(x) \in \langle -\infty, -2]$
- 3) De aquí se tiene $\text{Ran}(f) = \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty) = N$ (pues f es suryectiva)
Luego $N^C = \langle -2, 2 \rangle \rightarrow a = -2, b = 2$.
 $\therefore$ La multa (en UIT) asignado a la empresa San Fernandoes 450 UIT

Rpta.: A

5. De la función G definida por $G(x) = e^{2x^2} - e^{x^2+4} + e^8 - e^4 \cdot e^{x^2}$, calcule el producto de las longitudes finitas de los intervalos en los que la función G es creciente y decreciente.

- A) $4 u^2$ B) $2e^2 u^2$ C) $2 u^2$ D) $(1-e^2)^2 u^2$ E) $8 u^2$

Solución:

$$1) \quad G(x) = e^{2x^2} - e^{x^2+4} + e^8 - e^4 \cdot e^{x^2} = e^{2x^2} - 2e^4 \cdot e^{x^2} + e^8 = (e^{x^2} - e^4)^2$$

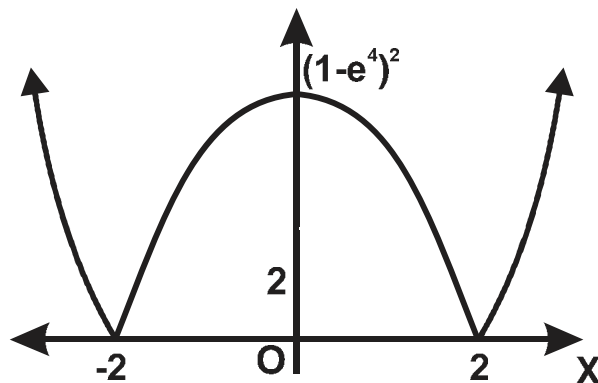
$$2) \quad \text{Luego } G(x) = (e^{x^2} - e^4)^2 \geq 0$$

3) Hallando la gráfica

$$(e^{x^2} - e^4)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \vee x = -2$$

$$\text{Si } x = 0, y = (1 - e^4)^2$$

Como $G(x) = G(-x)$, G es par



4) Luego es creciente en los intervalos $[-2, 0]$ y $[2, +\infty)$

y es decreciente en los intervalos $(-\infty, -2]$ y $[0, 2]$

5) el producto de las longitudes finitas de los intervalos en los que la función G es creciente y decreciente 4

Rpta.: A

6. El mayor elemento entero del dominio de la función inversa de f definida por $f(x) = 6 - 2^{-x}$ representa la edad de Luis hace 10 años. ¿Cuál será su edad dentro de 8 años?

- A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Solución:

1) Se tiene $\text{Dom}(f^*) = \text{Ran}(f)$

$$\text{Como } 2^{-x} > 0 \rightarrow -2^{-x} < 0 \rightarrow 6 - 2^{-x} < 6$$

$$\text{Luego } \text{Dom}(f^*) = (-\infty, 6)$$

2) La edad de Luis hace 10 años fue de 5 años, dentro de 8 años tendrá 23 años

Rpta.: E

7. Un terreno de forma rectangular tiene un perímetro de 200 metros y su área en términos de uno de sus lados de longitud x metros, donde $x > 50$ está representada por $y = A(x)$. Con respecto a la función L que modela la longitud del lado de dicho terreno, de medida x en metros, en función del área, se puede decir:

A) $|L - 50| = \sqrt{y - 250}$

B) L es creciente

C) $L - 50 = \sqrt{50^2 - y}$

D) $L = 50^2 + \sqrt{50 - y}$

E) L es una función cuadrática**Solución:**

- 1) Como el perímetro es 200 y uno de los lados x , el otro lado debe ser $100 - x$
 luego $y = A(x) = x(100 - x) = 50^2 - (x - 50)^2$
 2) Despejamos x en términos de y
 Se tiene $x = 50 + \sqrt{50^2 - y}$
 Luego $L - 50 = \sqrt{50^2 - y}$

Rpta.: C

8. Giordano Bruno fue un fraile dominicano, astrónomo, filósofo, matemático y poeta italiano. Murió quemado en la hoguera por sus teorías cosmológicas que superaron el modelo copernicano. Murió a los $(8(7 + f^*(4)) - 12)$ años, donde $f : \text{Dom}(f) = [0, 1] \rightarrow [2, 4]$ es una función creciente y suryectiva tal que $f(x) = ax + b$. ¿A qué edad murió Giordano Bruno?

- A) 40 años B) 60 años C) 80 años D) 52 años E) 32 años

Solución:

- 1) Como f es creciente y suryectiva, entonces $f(0) = 2 \wedge f(1) = 4$
 $\Rightarrow a = 2 \wedge b = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + 2$
 Sea $y = 2x + 2 \Rightarrow x = \frac{y - 2}{2}$
 $\Rightarrow f^*(x) = \frac{x - 2}{2} \Rightarrow f^*(4) = 1$
 2) $(8(7 + f^*(4)) - 12) = (8(7 + 1) - 12) = 52$ años.

Rpta.: D